Untersuchungen zu x^y im Vergleich zu y^x

Jens Weitendorf

Kurzfassung des Inhalts:
In dem Artikel wird ausgehend von der Fragestellung, ob x^y oder y^x größer ist, aufgezeigt, welchen Beitrag der ClassPad zur Klärung dieser Frage beitragen kann. Für Interessierte wird auch der mathematische Hintergrund beleuchtet.

Klassenstufe(n):
Geeignet ist das Thema für gute bzw. sehr gute Mathematikkurse der Sek. II

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler ...

- erkennen, dass man durch einen experimentellen Ansatz zur Lösung von Problemen gelangen kann;
- erfahren an Hand eines Beispiels die Entwicklung einer mathematischen Fragestellung;
- erfahren, dass es zur endgültigen Klärung eines Problems hilfreich sein kann, dass Problem in eine allgemeinere Theorie einzubetten.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Alle erforderlichen Kenntnisse bzgl. der Bedienung des ClassPad werden ausführlich dargestellt. Hilfreich sind Vorkenntnisse:

- beim Zeichnen von Graphen mithilfe des Graphikmenüs;
- zur Veranschaulichung von Daten mit Hilfe des Statistik- und Tabellenkalkulations-Menüs;
- in der Programmierung mit dem ClassPad.

Zeitbedarf:
Der Zeitbedarf hängt davon ab, wie tief in die Problematik eingestiegen werden soll.

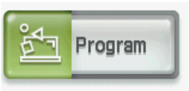
Sonstige Materialien:
Keine

Einleitung

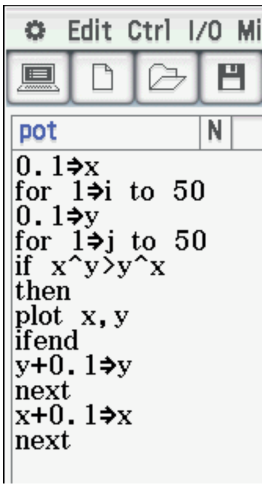
Der Artikel soll Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes des ClassPad aufzeigen. Er bewegt sich inhaltlich an der Grenze dessen, was in der Schule noch behandelt werden kann. Auf der anderen Seite bieten sich aber auch Differenzierungsmöglichkeiten an. Den Ausgangspunkt bildet die Frage, für welche Wertepaare (x, y) $x^y > y^x$ gilt. Für einzelne gegebene Werte ist dies leicht überprüfbar. Es sollen aber alle Paare bestimmt werden, für die die Ungleichung richtig ist. Dies geschieht in einem Wechselspiel zwischen Untersuchungen und Überprüfungen mit dem ClassPad und der Benutzung von mathematischem Hintergrundwissen. Dabei werden neben der Diskussion des Rechnereinsatzes auch mathematische Arbeitsweisen erkennbar.

Ein erster Überblick

Um sich einen Überblick über die Lösungsmenge der obigen Ungleichung zu verschaffen, hilft ein Programm, das in Abbildung 1 wiedergegebenen ist.



Für das Erstellen von Programmen gibt es ein spezielles Modul, das man im Hauptmenü findet. Mit Hilfe solcher Programme lassen sich zum Beispiel Werte erzeugen, die in anderen Modulen des ClassPad weiter verarbeitet werden können. Für die Erstellung eines solchen Programms muss zunächst ein Name gewählt werden; danach gelangt man automatisch in den Editor. Nach der Erstellung kann man diesen mit Hilfe des Symbols verlassen. Die Ausführung wird durch Betätigung von ▶ erreicht.




```
0.1→x
for 1→i to 50
0.1→y
for 1→j to 50
if x^y>y^x
then
plot x,y
ifend
y+0.1→y
next
x+0.1→x
next
```

Abb. 1 Programm zur Bestimmung der Punktemenge, für die $x^y > y^x$ gilt

Das Programm ist so aufgebaut, dass die Ungleichung für alle x, y mit $0 < x,\ y \leq 5$ beginnend mit $x = y = 0{,}1$ und einer Schrittweite von 0,1 überprüft wird. Erfüllt ein Wertepaar die Bedingung, wird dies durch einen „Punkt“ im Koordinatensystem dargestellt. Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis. Bevor man das Programm laufen lässt, sollte man im *Modul Grafik und Tabelle* über die Schaltfläche einen sinnvollen Bereich einstellen.

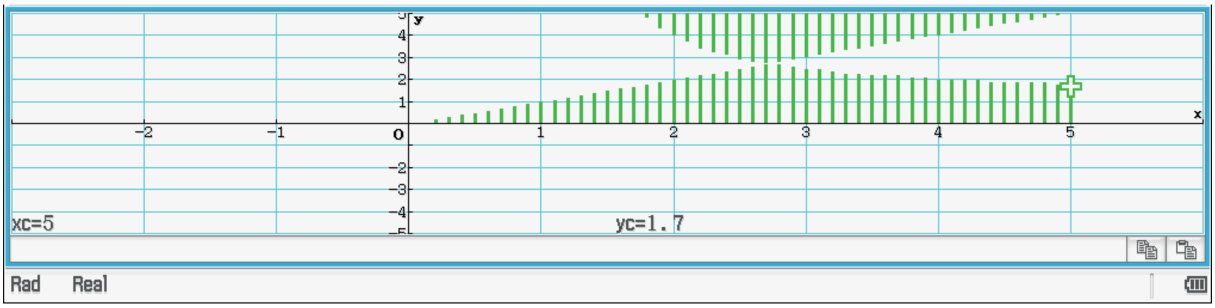


Abb. 2 Wertepaare, für die $x^y > y^x$ gilt

Die erkennbaren Grenzen scheinen zum einen durch den Graphen der Funktion $f(x) = x$ gegeben zu sein, zum anderen durch Wertepaare, die die Gleichung $x^y = y^x$ erfüllen.

Daraus ergibt sich zunächst, dass die Gleichung $x^y = y^x$ in der Regel zwei Lösungen hat. Interessant sind in diesem Zusammenhang zwei Fragen: Für welchen x- bzw. y-Wert gibt es genau eine Lösung und durch welche Funktion ist das Gebiet der Lösungen beschränkt? Diese beiden Probleme sollen im Folgenden diskutiert werden.

Bestimmung des x- bzw. y-Wertes, für den es genau eine Lösung gibt

Durch numerisches sukzessives Probieren kann man vermuten, dass man für $x = e$ genau eine Lösung der Gleichung erhält. Dass es für die Stelle 2,72 sogar eine Lösung im negativen Bereich gibt, soll hier nicht weiter diskutiert werden; im Unterricht ist dies aber natürlich zu klären, um den Schülerinnen und Schülern zu veranschaulichen, dass die Benutzung eines CAS durchaus zu unerwarteten Lösungen führen kann.

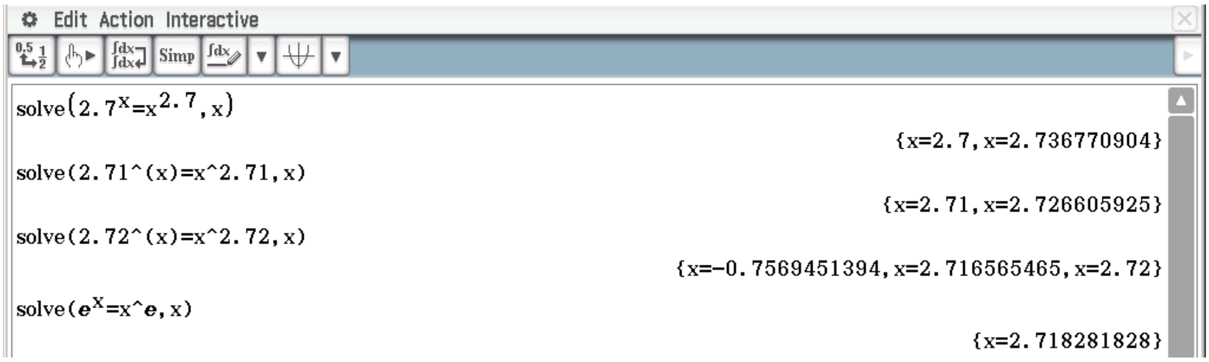


Abb. 3 Beispiele für Lösungen der Gleichung $x^y = y^x$

Zur Bestätigung kann man sich das noch grafisch veranschaulichen. Mit Hilfe der zur Verfügung stehenden analytischen Untersuchungen lassen sich auch im *Grafik-Menü* Schnittpunktberechnungen durchführen. Wie die folgenden Abbildungen zeigen, werden die obigen Ergebnisse bestätigt. Da die Berechnungen deutlich länger dauern, benutzt der ClassPad in diesem Menü offensichtlich ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Schnittpunkts. Vom Graphischen her lassen sich die Schnittpunkte trotz großer Auflösung nicht erkennen. So ist in den Abbildungen in der Regel nur ein Graph zu erkennen. Dies ist der zweite gezeichnete, da der erste überschrieben wird.

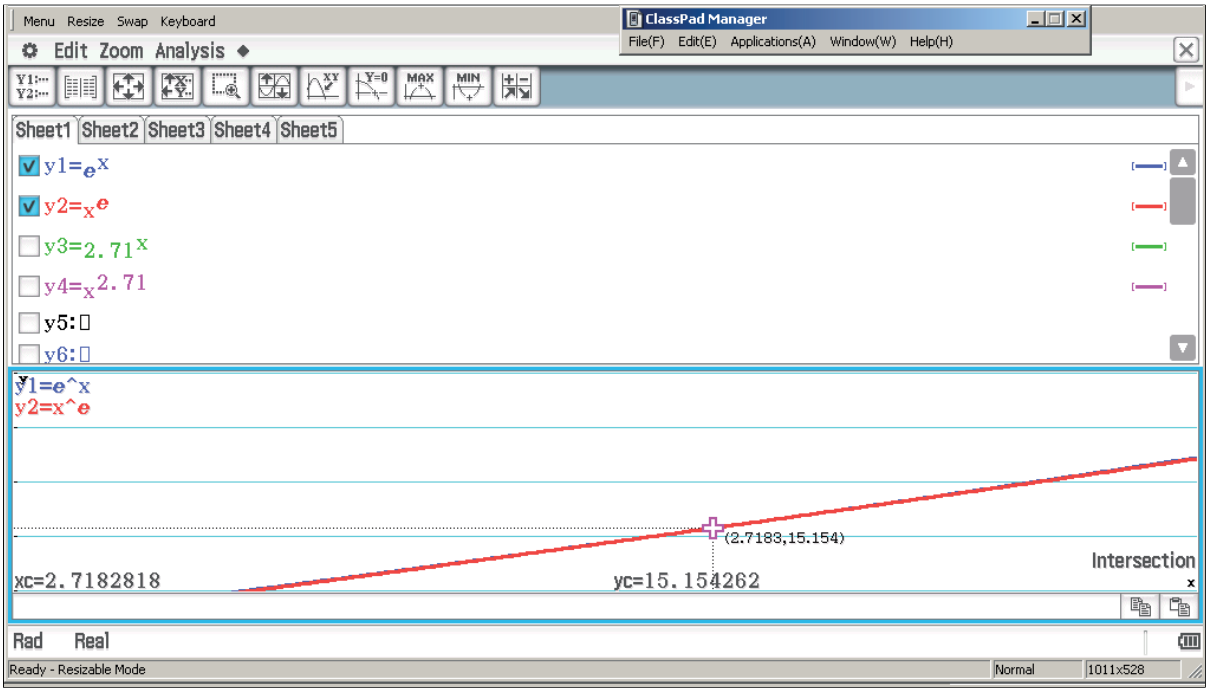


Abb. 4 Graphen der Funktionen $f(x) = e^x$ und $f(x) = x^e$ mit Schnittpunkt

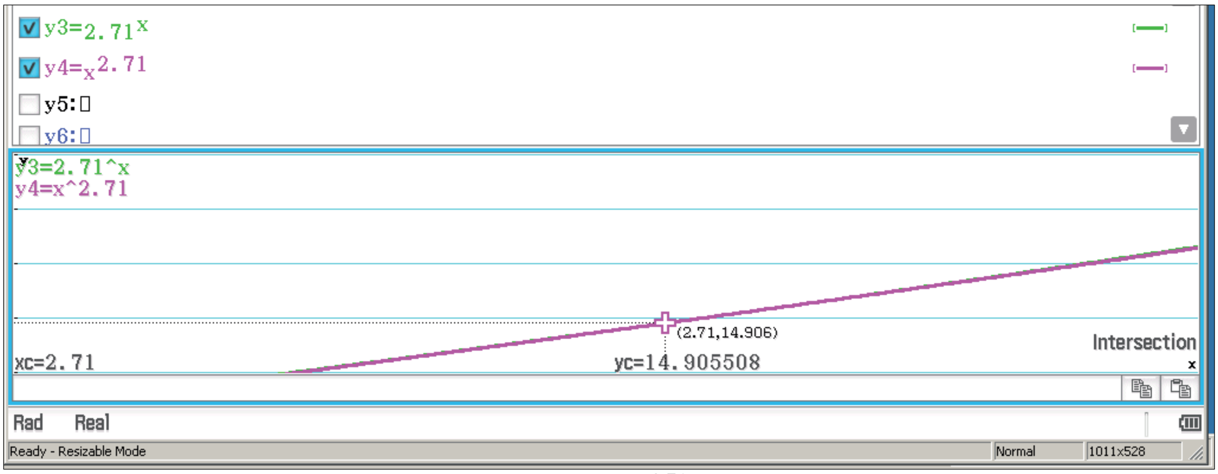


Abb. 5 Graphen der Funktionen $f(x) = 2{,}71^x$ und *f(x)* = $x^{2,71}$ mit 1. Schnittpunkt

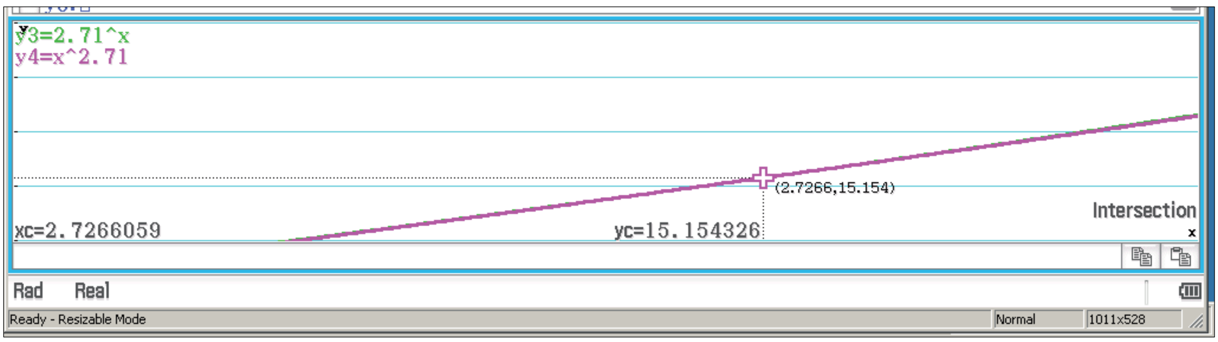


Abb. 6 Graphen der Funktionen $f(x) = 2{,}71^x$ und $f(x) = x^{2,71}$ mit 2. Schnittpunkt

Das Obige ist natürlich noch kein Beweis dafür, dass es für $x = e$ genau eine Lösung gibt.

Für den Beweis wird die Lambertsche W-Funktion benötigt. Diese ist implizit durch die Gleichung $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$ gegeben. Die Lambertsche W-Funktion ist also die Umkehrfunktion zu der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$. Wählt man für die graphische Darstellung den

Parametertyp, so lassen sich die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion in einem Schaubild darstellen.

Aus der Abbildung 7 wird deutlich, dass es in der Regel für die Lambertsche W-Funktion für $x < 0$ zwei Werte gibt, das heißt, man muss sich auf einen „Zweig" beschränken. Die entsprechende Einschränkung erhält man, indem man das Extremum der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ bestimmt.

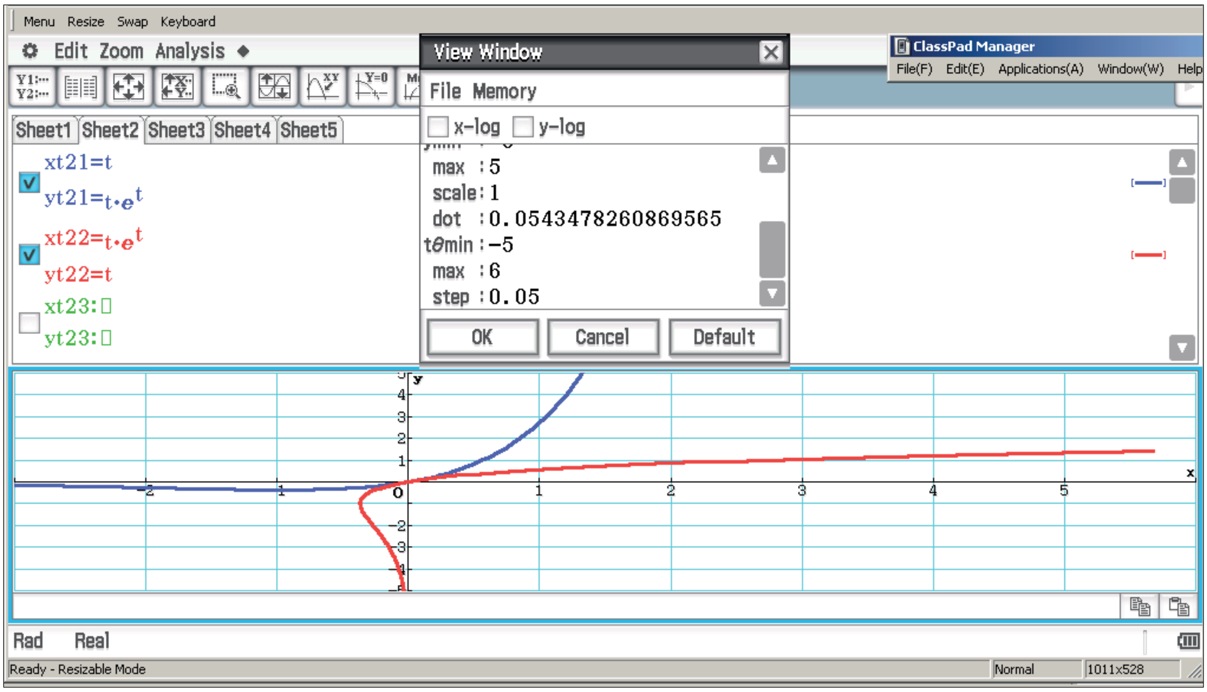


Abb. 7 Graphen von $f(x) = x \cdot e^x$ und der Umkehrfunktion $W(x)$

Für die Erzeugung von Graphen als Parametertyp wählt man diesen Typ entweder über die Einstellung „Typ" oder über das Untermenü von $\boxed{\text{y=}}$*. Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion erhält man durch Vertauschen der Terme von* x_t *und* y_t*.*

Abb. 8 Bestimmung des Extremums von $f(x) = x \cdot e^x$

Das Extremum von $f(x) = x \cdot e^x$ ist $E(-1; -1/e)$. Das heißt der kritische Punkt der Lambertschen W-Funktion liegt bei $P(-1/e; -1)$. Es fehlt jetzt noch der Bezug zum obigen Problem. Um diesen Zusammenhang zu erkennen, muss die Gleichung $x^y = y^x$ auf eine Form der Art $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$ gebracht werden. Hierbei hilft einem das CAS leider nicht.

Die im Folgenden dargestellten Umformungen sind für den Unterricht sicher nicht geeignet. Sie werden der Vollständigkeit halber trotzdem angegeben. Für den Unterricht erhält man einen Ansatz durch: $y = k \cdot x$ $(k > 0)$. Dieser Ansatz wird weiter unten durchgeführt.

$$x^y = y^x$$

$$y \cdot ln(x) = x \cdot ln(y)$$

$$\frac{y}{ln(y)} = \frac{x}{ln(x)} \ \ bzw. \ \frac{ln(y)}{y} = \frac{ln(x)}{x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{ln(x)}{x}$$

$$e^{ln(\frac{1}{y})} \cdot ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{ln(x)}{x}$$

Aus der Definition für die Lambertsche W-Funktion folgt dann: $ln\left(\frac{1}{y}\right) = W(-\frac{ln(x)}{x})$ bzw.

$$y = e^{-W\left(-\frac{ln(x)}{x}\right)} = -\frac{x \cdot W\left(-\frac{ln(x)}{x}\right)}{ln(x)} \text{ , da } W\left(-\frac{ln(x)}{x}\right) \cdot e^{W\left(-\frac{ln(x)}{x}\right)} = -\frac{ln(x)}{x}.$$

Wir interessieren uns für den y-Wert für $x = e$

$$y(e) = -\frac{e \cdot W\left(-\frac{ln(e)}{e}\right)}{ln(e)} = -e \cdot W\left(-\frac{1}{e}\right) = -e \cdot (-1) = e.$$

Aus den obigen Berechnungen folgt, dass $P(e; e)$ der gesuchte Punkt ist, das heißt, für $x = e$ gibt es genau eine Lösung.

Bestimmung der zweiten Grenzfunktion

Es sei $y = k \cdot x$ mit $k > 0$. [14]

Durch Variation von k kann man den gesamten 1. Quadranten sozusagen nach Lösungen „durchrastern".

Es sei $x > 0$ und $y > 0$, gesucht sind die Lösungen der Gleichung $x^y = y^x$.

$$x^y = y^x$$

$$\Leftrightarrow y \cdot ln\, x = x \cdot ln\, y$$

$$y = k \cdot x$$

$$\Rightarrow k \cdot x \cdot ln\, x = x \cdot ln(k \cdot x)$$

$$k \cdot x \cdot ln\, x - x \cdot ln(k \cdot x) = 0$$

$$x \cdot (k \cdot ln\, x - ln(k \cdot x)) = 0$$

$$x > 0 \ \Rightarrow k \cdot ln\, x - ln(k \cdot x) = 0$$

[14] Diese Idee und die entsprechenden Umformungen stammen von Jürgen Appel

$$\Rightarrow k \cdot ln\, x - (ln\, k + ln\, x) = 0$$

$$k \cdot ln\, x - ln\, x - ln\, k \; = 0$$

$$(k-1) \cdot ln\, x - ln\, k = 0$$

$$(k-1) \cdot ln\, x = ln\, k$$

Fall 1: $k = 1$ ($y = x$, dies ist die zu erwartende erste Lösungsgerade des Problems)

$\Rightarrow (1-1) \cdot ln\, x = ln\, 1$, d. h. *0 = 0* (wahre Aussage für alle $x > 0$)

Fall 2: $k \neq 1$

$(k-1) \cdot ln\, x = ln\, k$

$ln\, x = \frac{ln\, k}{k-1} \Rightarrow x = e^{\frac{ln\, k}{k-1}} = (e^{ln\, k})^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{1}{k-1}}$.

Mit $y = k \cdot x$ folgt: $y = k \cdot k^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{1}{k-1}+1} = k^{\frac{k-1+1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}}$

$x(k) = k^{\frac{1}{k-1}}$ und $y(k) = k^{\frac{k}{k-1}}$.

Aus dem Obigen folgt, dass man diese Grenzfunktion sicher nur indirekt angeben kann. Untermauern lässt sich dieses durch Experimente mit dem *Statistik-Modul*.

Zunächst kann man sich aber Wertepaare der Grenzfunktion grafisch darstellen lassen. Dazu wird das obige Programm ein wenig geändert. (s. Abbildung 9)

```
0.1⇒x
for 1⇒i to 80
0.1⇒y
for 1⇒j to 80
if abs(x^y-y^x)<0.1
then
plot x,y
ifend
y+0.1⇒y
Next
x+0.1⇒x
Next
```

Abb. 9 Programm zum Kennzeichnen der Grenzen

Das Ergebnis zeigt die Abbildung 10. Man erkennt, dass einige Grenzwerte mehrfach belegt sind. Die Werte lassen verschiedene Regressionen zu. Um dieses genauer zu untersuchen, wird eine weitere Änderung vorgenommen, so dass die Punkte nicht geplottet, sondern in Listen gespeichert werden.

Für eine weitere Verarbeitung im Statistik-Modul speichert man die x-Werte am einfachsten in „list1“ und die y-Werte in „list2“. Soll z. B. eine „3“ an 5. Stelle in Liste 1 gespeichert werden, so geschieht das durch: 3 -> list1[5]. Auf diese Listen kann man dann im Statistik-Modul direkt zugreifen, verschiedene Regressionen durchführen oder diese auch mit Hilfe der Import-Funktion in der Tabellenkalkulation weiter bearbeiten.

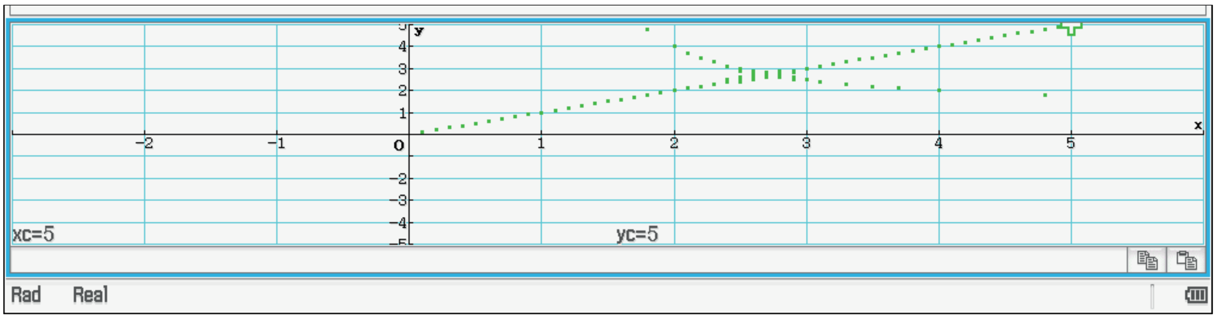


Abb. 10 Die Grenzen des Bereichs für $x^y > y^x$

Die Werte werden noch bereinigt, damit jedem x-Wert nicht mehr als ein y-Wert zugeordnet wird. Die Regressionen lassen sich dann im Statistik-Modul des ClassPads durchführen.

Die folgenden Abbildungen zeigen die „bereinigten Werte“. Weiterhin zeigt sich, dass weder eine *exponentielle* noch eine *Potenzregression* die Werte zufriedenstellend annähern. Die Regression und die dargestellten Werte beziehen sich auf die Listen 4 und 5. Bei der Regression sind die Bezugslisten direkt einzustellen; für die zeichnerische Darstellung muss dies zunächst über das Symbol geschehen. Bzgl. der allgemeinen Potenzregression erkennt man, dass die Punkte im mittleren Bereich gut durch den Graphen angenähert werden.

Bestätigt werden die obigen Feststellungen dadurch, dass man sich die Werte genauer betrachtet. Als allgemeine Potenzfunktion käme sowieso nur $f(x) = \frac{1}{x}$ in Frage, da der Graph achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden im ersten Quadranten sein muss.

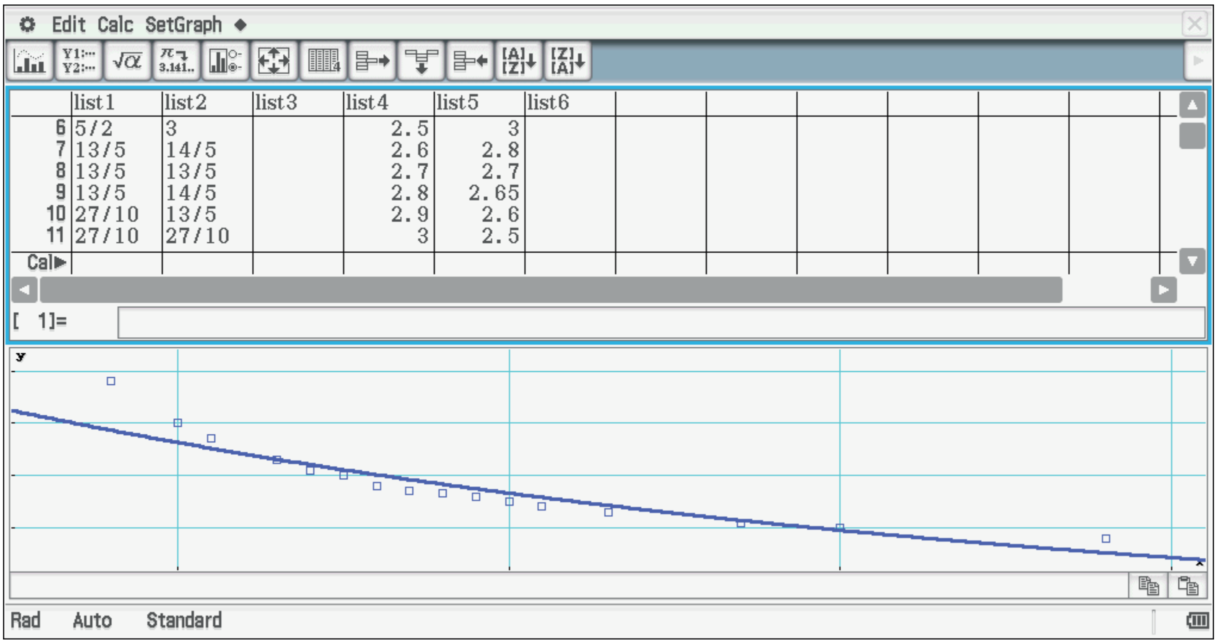


Abb. 11.1 Exponentielle Regression

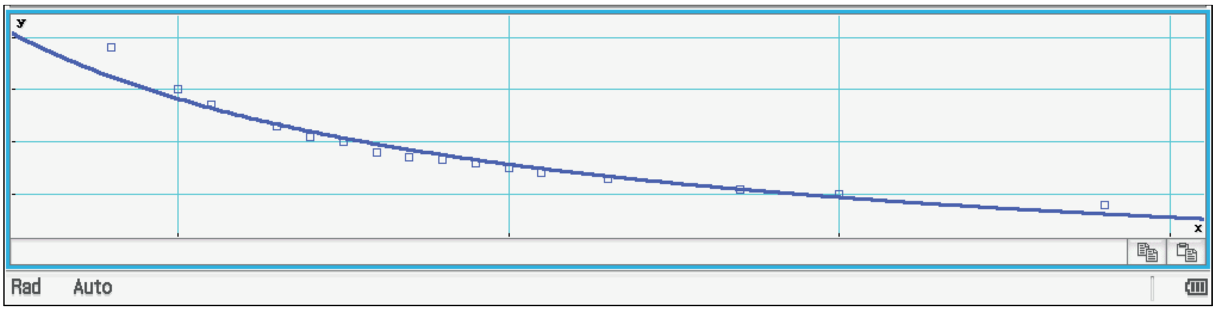


Abb. 11.2 Allgemeine Potenzregression

Berechnung von Werten mit dem Newton-Verfahren

Eine andere Möglichkeit, Wertepaare der Gleichung $x^y = y^x$ zu berechnen, ist zunächst nur mit Hilfe von Näherungsverfahren möglich. Im Folgenden werden Werte mit Hilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise bestimmt. Dazu betrachten wir die Gleichung:

$$f(W) = W \cdot e^W - x = 0.$$

Für das Newton-Verfahren benötigt man die Ableitung (in diesem Fall nach W, x ist als Parameter zu verstehen):

$$f'(W) = (1 + W) \cdot e^W.$$

Mit Hilfe des Newton-Verfahrens ergibt sich dann:

$$W_{n+1} = W_n - \frac{f(W_n)}{f'(W_n)}$$

$$W_{n+1} = W_n - \frac{W_n \cdot e^{W_n} - x}{e^{W_n} \cdot (1 + W_n)}$$

$$W_{n+1} = \frac{W_n^2 \cdot e^{W_n} + x}{e^{W_n} \cdot (1 + W_n)}$$

Da $y = e^{-W(-\frac{ln(x)}{x})}$, muss man zunächst x durch $-\frac{\ln(x)}{x}$ ersetzen, dann wendet man das Newton-Verfahren an und erhält den gesuchten y-Wert durch $e^{-W_{n+1}}$. Die Abbildung 12 zeigt die Umsetzung des Prozesses mit Hilfe der Tabellenkalkulation.

File Edit Graph Calc

	A	B	C
1	10	3.1	−0.3650
2	9.09091		
3	8.19000	2.40890	
4	7.29881		
5	6.41928		
6	5.55398		
7	4.70634		
8	3.88101		
9	3.08434		
10	2.32509		
11	1.61510		
12	0.96974		
13	0.40716		
14	−0.0548		
15	−0.4047		
16	−0.6438		

B4

Abb. 12 Newton-Verfahren zur Berechnung von Lösungen der Gleichung $x^y = y^x$

In der Zelle A1 steht der Startwert. In B1 steht der x-Wert und dessen Umrechnung ist in C1aufgeführt. Das Verfahren wird 20-mal durchlaufen. Den gesuchten y-Wert erhält man dann aus der Zelle B3. Die Konvergenz ist relativ langsam. Lässt man noch einige weitere Näherungswerte bestimmen, so ist die Konvergenz aber gut abzulesen (s. Abbildung 13). Man erkennt, dass sich ab dem 21. Wert im Prinzip nichts mehr verändert.

15	−0.4047			
16	−0.6438			
17	−0.7870			
18	−0.8563			
19	−0.8771			
20	−0.8792			
21	−0.8792			
22	−0.8792			
23	−0.8792			
24	−0.8792			
25	−0.8792			
26	−0.8792			
27	−0.8792			
28	−0.8792			

=(A20^2·e^A20+C1)/((1+A20)·e^A20)

A21:A28

Abb. 13 Konvergenz des Newton-Verfahrens

Das Verfahren zur Berechnung ist so aufgebaut, dass durch die Veränderung des x-Wertes (B1) die anderen Werte automatisch angepasst werden. So lassen sich leicht Untersuchungen in Bezug auf den x-Wert und den Anfangswert durchführen.

So ergibt sich zum Beispiel für $x = 2$ nicht der gewünschte Wert $y = 4$, sondern $y = 2$, was natürlich auch richtig ist. Für $x = e$ ist die Konvergenz noch deutlich langsamer, was aber natürlich wegen des Extremums von $x \cdot e^x$ an der Stelle $x = -1$ verständlich ist. Wählt man einen anderen Anfangswert ($W_0 = 0$), so ist die Konvergenz deutlich schneller.

File Edit Graph Calc

	A	B	C
1	0	4	-0.3466
2	-0.3466		
3	-0.5663	2	
4	-0.6684		
5	-0.6919		
6	-0.6931		
7	-0.6931		
8	-0.6931		
9	-0.6931		

Abb. 14 Konvergenz des Newton-Verfahrens für $W_0 = 0$ und $x = 4$

Wendet man das Newton-Verfahren auf mehrere Werte an, so erkennt man, dass das Verfahren jeweils gegen den „unteren" Wert konvergiert (s. Abb. 15). Die Abhängigkeit zwischen Anfangs- und Grenzwert soll an dieser Stelle nicht weiter diskutiert werden.

In der ersten Zeile stehen die x-Werte und in der zweiten die jeweils transponierten. Als Anfangswert wurde jeweils 0 gewählt. Die Zeilen 12 und 13 geben die gesuchte Funktion wider.

File Edit Graph Calc

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3
2	-0.3121	-0.3378	-0.3533	-0.3621	-0.3665	-0.3679	-0.3671	-0.3650	-0.3618	-0.3579	-0.3536	-0.34
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	-0.3121	-0.3378	-0.3533	-0.3621	-0.3665	-0.3679	-0.3671	-0.3650	-0.3618	-0.3579	-0.3536	-0.34
5	-0.4784	-0.5428	-0.5848	-0.6099	-0.6227	-0.6266	-0.6245	-0.6181	-0.6089	-0.5978	-0.5857	-0.57
6	-0.5268	-0.6271	-0.7034	-0.7548	-0.7829	-0.7921	-0.7871	-0.7728	-0.7527	-0.7295	-0.7051	-0.68
7	-0.5306	-0.6415	-0.7388	-0.8181	-0.8703	-0.8891	-0.8788	-0.8505	-0.8145	-0.7771	-0.7411	-0.70
8	-0.5306	-0.6419	-0.7419	-0.8322	-0.9073	-0.9424	-0.9224	-0.8761	-0.8277	-0.7836	-0.7444	-0.70
9	-0.5306	-0.6419	-0.7419	-0.8329	-0.9158	-0.9703	-0.9363	-0.8791	-0.8283	-0.7838	-0.7444	-0.70
10	-0.5306	-0.6419	-0.7419	-0.8329	-0.9163	-0.9842	-0.9379	-0.8792	-0.8283	-0.7838	-0.7444	-0.70
11												
12	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3
13	1.7	1.9	2.1	2.3	2.50000	2.67577	2.55472	2.40894	2.28944	2.18970	2.10516	2.032
14												
15												
16												

T3

Abb. 15 Das Newton-Verfahren für mehrere Werte

Es wurde bisher gezeigt, dass man die gesuchte Funktion nicht in geschlossener Form angeben kann. Es ist aber die Parameterdarstellung bekannt, die dann natürlich auch graphisch darstellbar ist.

$$x(t) = e^{\frac{ln(t)}{t-1}} \; und \; y(t) = t \cdot e^{\frac{ln(t)}{t-1}}$$

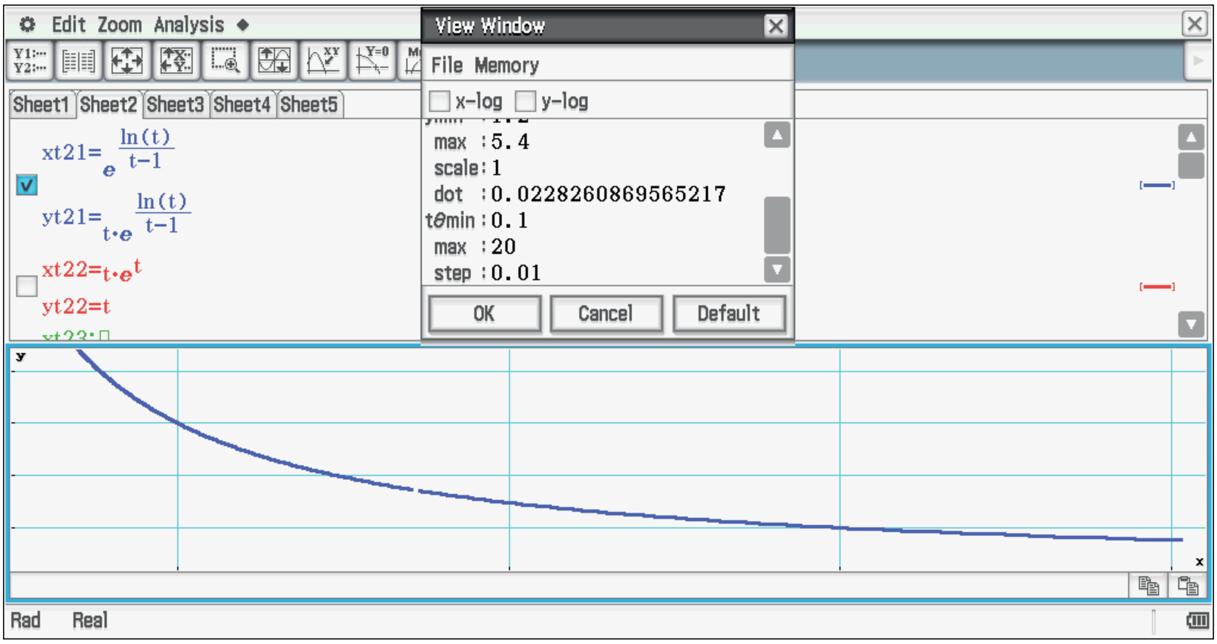
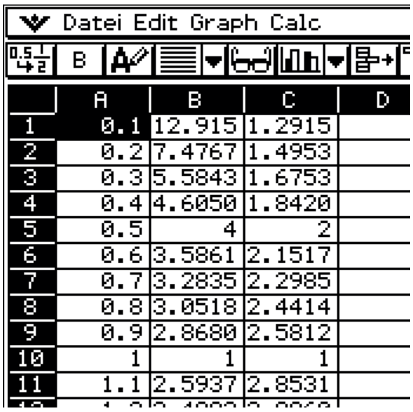


Abb. 16 Darstellung der Grenzfunktion mit den Einstellungen für den Parameter

Auf den ersten Blick vermittelt sich einem der Eindruck, dass nur $y = t \cdot x$ für $x{=}e^{\frac{ln(t)}{t-1}}$ gilt. Zu berücksichtigen ist dabei aber natürlich, dass sich kein linearer Zusammenhang zwischen x und y ergibt, da die x-Achse ebenfalls einer Abbildung unterliegt. Des Weiteren erkennt man die Definitionslücke für $t = 1$. Die 330-Version des ClassPad hat diese Lücke einfach ignoriert. Ein entsprechend merkwürdiges Bild ergibt sich, wenn man mit Hilfe der Tabellenkalkulation des 330 die Werte für $t = 1$ bestimmt.


Datei Edit Graph Calc

	A	B	C	D
1	0.1	12.915	1.2915	
2	0.2	7.4767	1.4953	
3	0.3	5.5843	1.6753	
4	0.4	4.6050	1.8420	
5	0.5	4	2	
6	0.6	3.5861	2.1517	
7	0.7	3.2835	2.2985	
8	0.8	3.0518	2.4414	
9	0.9	2.8680	2.5812	
10	1	1	1	
11	1.1	2.5937	2.8531	

Abb. 17 Funktionswerte für t (Spalte A), $x = e^{\frac{ln(t)}{t-1}}$ (Spalte B) und $y = t \cdot e^{\frac{ln(t)}{t-1}}$ (Spalte C). Version ClassPad 330

Der für $t = 1$ angegebene Wert kann nicht richtig sein. Der ClassPad II bzw. die entsprechende Managerversion geben für die Stelle $t = 1$ jeweils den Hinweis „Undefiniert“. Dass eine stetige Ergänzung möglich ist zeigt der Graph. Die Abbildung 18 zeigt die Ergebnisse einer genaueren Untersuchung.

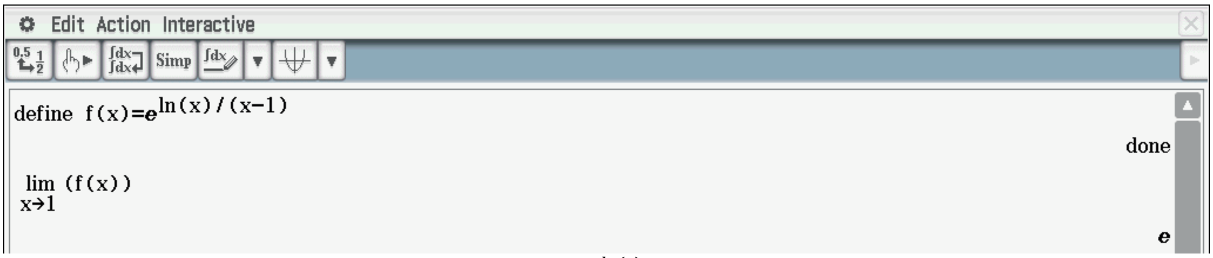


Abb. 18 Stetige Ergänzung für die Funktion $f(x) = e^{\frac{ln(x)}{x-1}}$ an der Stelle $x = 1$

Der obige Grenzwert lässt sich mit Hilfe der Regel von L´Hospital verifizieren.

Literatur

Rolf, J. (2012) Was ist größer: x^y oder y^x? in MNU 02, Jahrgang 65, S. 75 - 79