Unterrichtspraktische Beispiele mit CAS- & graphikfähigen Taschenrechnern

---

Einsatzmöglichkeiten des ClassPad II und des FX-CG50 im Mathematikunterricht

CASIO®

2. Auflage – Juni 2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ramona Behrens, Hans-Georg Weigand

1972 kam der erste wissenschaftlich-technische Taschenrechner – der Hewlett-Packard 35 – auf den Markt. Von Anfang an wurden damit große Erwartungen, vor allem auch im Zusammenhang mit dessen Einsatz im Schul- und insbesondere im Mathematikunterricht, verbunden. So wurde in der Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) vom 28. Februar 1978 ein „kontrollierter Einsatz von Taschenrechnern ab dem 7. Schuljahr aller Schulformen" (S. 117) gefordert. Man erwartete sich davon u. a. verstärkte experimentelle Schüleraktivitäten im Rahmen des entdeckenden Lernens und Problemlösens, eine konkrete numerische Ausgangsbasis für Begriffsbildungen, das wirklichkeitsnahe Behandeln von Anwendungsaufgaben durch realitätsadäquate Zahlen und das Entlasten von Tätigkeiten, die für die Lösung der anstehenden Aufgabe keine zentrale Bedeutung haben.

Zwischen 1976 und 1978 wurde der Taschenrechner dann in den meisten Bundesländern der damaligen Bundesrepublik Deutschland im Mathematikunterricht – meist ab Klasse 7 – erlaubt. In der DDR wurde der Schulrechner SR 1 an der Erweiterten Oberschule ab Schuljahr 1984/85 in der Klasse 11 und in der Polytechnischen Oberschule mit dem Schuljahr 1985/86 in Klasse 7 eingeführt.

Sicherlich kann heute festgestellt werden, dass die mit dem Taschenrechnereinsatz verbundenen Hoffnungen, Erwartungen und Zielsetzungen zu weitreichend waren und wohl nur zum kleinen Teil – wenn überhaupt – erfüllt wurden. Für die Ursachen lassen sich unterschiedliche Gründe anführen (vgl. Weigand 2003).

Nun wurden die Erwartungen mit dem Aufkommen der ersten „Personal Computer" zu Anfang der 1980er-Jahre nochmals erweitert. In der ersten ICMI-Studie von 1986 mit dem Titel "The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching" (Churchhouse) wurde ein großer Enthusiasmus bezüglich der Entwicklungsperspektiven des Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit neuer Technologien deutlich. Damals sagten viele, wie etwa Jim Kaput, voraus, dass neue Technologien sehr schnell alle Bereiche des Mathematikunterrichts verändern würden:

> *"Neue Technologien wirken im Mathematikunterricht wie ein aktiver Vulkan – der mathematische Berg verändert sich unmittelbar vor unseren Augen" (1992, p. 515).*

In den NCTM-Standards von 1989 – den weltweit ersten sog. „Standards", die das Vorbild der KMK-Standards von 2003 bildeten – wurde ein eigenes Technologieprinzip eingeführt:

> *„Taschenrechner und Computer gestalten die mathematische Landschaft neu und die Schulmathematik sollte diese Veränderungen reflektieren. Schüler können mehr Mathematik eingehender mit der richtigen und passenden Technologie lernen. Sie können auf einem höheren Niveau der Verallgemeinerung und Abstraktion arbeiten. Dabei soll-*

te jeder Schüler Zugang zu neuen Technologien haben, um sich damit das Lernen von Mathematik zu erleichtern."

1985 kam der weltweit erste graphikfähige Taschenrechner – der Casio FX-7000G – und 1999 der Casio Algebra FX 2.0 auf den Markt, ein Rechner, der ein Computeralgebrasystem integriert hatte. Mit diesen neuen Werkzeugen waren wiederum noch größere Erwartungen als mit dem einfachen arithmetischen Taschenrechner verbunden, da diese Rechner nun Möglichkeiten boten, die bisher – zur damaligen Zeit – nur auf „Personal Computern" zur Verfügung standen und nur im Computerraum der Schule oder – vereinzelt – zuhause verfügbar waren. Von der Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler den Computer an ihrem Arbeitsplatz im Klassenzimmer jederzeit verfügbar hätten und somit eine „Wanderung" zum Computerraum entfiele, wurden tiefgreifende inhaltliche und methodische Veränderungen des Unterrichts erwartet, allerdings auch Befürchtungen und Ängste geweckt. Insbesondere wurde intensiv diskutiert, wie sich Inhalte, Methoden und Prüfungen im Mathematikunterricht ändern müssen, wenn Schülerinnen und Schüler ein Gerät in der Hand haben, das gerade jene kalkülhaften Berechnungen auf Knopfdruck durchführen kann, die in der Unterrichtswirklichkeit zu den zentralen Elementen des Mathematikunterrichts und den Prüfungen zählen.

Auch hinsichtlich der Einführung von Taschenrechnern mit Computeralgebrasystem sind mittlerweile anfängliche euphorische Erwartungen durch pragmatische Haltungen verdrängt worden. So wird zwar in den Empfehlungen der Kultusministerkonferenz (KMK) von 2009 für die MINT-Fächer ohne weitergehende Begründung gefordert,

„Computerprogramme (z. B. Tabellenkalkulation, Dynamische Geometrie, Computer-Algebra) sowie Taschenrechner (z. B. mit Graphikfunktion oder CAS) in allen MINT-Fächern verbindlich nutzen" (S. 5).

GDM und MNU sahen sich dadurch herausgefordert, in einer eigenen Stellungnahme (2010) nochmals auf die Vorteile des Rechnereinsatz hinzuweisen:

„Wir sehen es insbesondere im Hinblick auf die Entwicklung des Begriffsverständnisses, der Problemlösekompetenz, des Modellierens und der Fähigkeit des Argumentierens und Begründens als unverzichtbar an, über den Einsatz von Taschenrechnern hinaus diese digitalen Werkzeuge nachhaltig in den Mathematikunterricht zu integrieren."

Mittlerweile wird der Einsatz neuer Technologien im Unterricht weltweit befürwortet, unterstützt oder verbindlich gefordert. Allerdings ist die Situation hinsichtlich des Einsatzes in Prüfungen sowohl weltweit als auch innerhalb Deutschlands höchst unterschiedlich. Es gibt (Bundes-)Länder, in denen alle Technologien verwendet werden dürfen, andere, in denen Prüfungen nur technologiefrei geschrieben werden dürfen, wieder andere, in denen nur (arithmetische) Taschenrechner, andere in denen nur graphikfähige Rechner eingesetzt werden dürfen. Schließlich gibt es (Bundes-)Länder, in denen Taschenrechner mit Computeralgebrasystemen in Prüfungen obligatorisch für alle Schülerinnen und Schüler sind, während in anderen (Bundes-)Ländern diese nur eine Wahloption darstellen.

Über die zukünftige Verwendung von Taschenrechnern im Mathematikunterricht lässt sich allerdings augenblicklich nur spekulieren. So wird etwa in der 17. ICMI-Study mit dem Titel "Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain" (Hoyles & Lagrange 2010) an vielen Stellen die Enttäuschung deutlich, dass sich neue Technologien trotz zahlloser Ideen, unterrichtspraktischer Erfahrungen und Forschungsberichten zum Unterrichtseinsatz nicht in der Weise durchgesetzt haben, wie das viele zu Beginn der 1990er-Jahre erwartet oder erhofft hatten.

Es lassen sich verschiedene Gründe für diese Situation anführen. Insbesondere wurden sicherlich die Schwierigkeiten unterschätzt, die Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte mit dem technischen Umgang von digitalen Technologien und insbesondere Taschencomputern hatten, die sich bei der Integration digitaler Technologien in das – technologiefrei entwickelte – Curriculum ergaben oder technologisch nicht vorgebildete Lehrkräfte vom Mehrwert des Einsatzes digitaler Technologien zu überzeugen.

Dieses Buch setzt genau bei dieser letzten Erkenntnis an. Es möchte Studierenden, Referendarinnen und Referendaren sowie Lehrerinnen und Lehrern Hilfen und Unterstützung dabei anbieten, sowohl graphikfähige Taschenrechner als auch Taschenrechner mit Computeralgebrasystem im Unterricht einzusetzen. Die Artikel verwenden dabei entweder den Casio FX-CG50 (GTR) oder den ClassPad II (GTR mit CAS). Allerdings lassen sich die hier entwickelten Ideen in gleicher Weise auch mit anderen Modellen umsetzen.

Die Artikel in diesem Buch sind von erfahrenen praktizierenden Lehrerinnen und Lehrern geschrieben, die alle eine jahrelange Erfahrung mit dem Einsatz von Casio-Rechnern haben. Deshalb wurde der Praxisnähe der verwendeten Beispiele die höchste Priorität beigemessen. Weiterhin sind sowohl Artikel für Einsteiger oder Neulinge im Umgang mit dem Taschenrechner als auch für Fortgeschrittene oder gar Experten vorhanden. Zusätzliche bzw. ergänzende Materialien zu den Artikeln im Buch finden Sie auf www.casio-schulrechner.de in der Materialdatenbank.

Die Artikel in diesem Buch wurden nach Klassenstufen – beginnend bei Sekundarstufe I – geordnet. Im Folgenden ist eine kurze Übersicht über die Artikel und deren Inhalte dargestellt.

In dem Artikel „Einstieg in die Arbeit mit dem ClassPad in der Sekundarstufe I" von Christoph Kost werden anhand von Beispielen der Sekundarstufe I, die u. a. mithilfe von Termen, Wertetabellen und linearen Gleichungssystemen gelöst werden können, Einstiegsmöglichkeiten in die Arbeit mit Taschenrechnern mit Computeralgebrasystem aufgezeigt.

Der Artikel „Zugänge zur linearen Regression" von Karel Tschacher zeigt eine Möglichkeit auf, Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I an die Methode der minimalen Fehlerquadrate von Gauß heranzuführen, ohne Differenzialrechnung zu verwenden. Dafür werden Alltagsbeispiele betrachtet, bei denen die Schülerinnen und Schüler selbst Daten u. a. durch Messungen erheben. Für dieses Thema bietet das Statistikmenü von graphikfähigen Taschenrechnern (mit CAS) gute Möglichkeiten zur Veranschaulichung der Datenpaare.

Im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung eignen sich Graphikrechner beispielsweise zur Simulation von Wahrscheinlichkeitsexperimenten. Jürgen Appel verdeutlicht diese Einsatzmöglichkeiten des Graphikrechners FX-CG50 anhand von vier Beispielen aus der Mittelstufe (Klasse 7 bis 10). Hierbei werden unterschiedliche Methoden zur Simulation mithilfe des graphikfähigen Taschenrechners dargestellt. Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung im Bereich des Statistik- und Tabellenkalkulationsprogramms sind für die Bearbeitung der Aufgaben hilfreich, aber nicht notwendig.

Anhand des ersten Beispiels „Simulation des Ziegenproblems“ stellt Jürgen Appel eine Variante für den Einstieg in das Thema „Wahrscheinlichkeit“ vor. Dabei bietet der Graphikrechner die Möglichkeit das Ziegenproblem für verschiedene Fälle zu simulieren und die Daten auszuwerten.

Im Artikel „Simulation der Augensumme zweier Würfel“ wird der Graphikrechner verwendet, um durch Erzeugung von Zufallszahlen eine hohe Anzahl von Würfen mit zwei Würfeln zu simulieren und die gewürfelten Augensummen in einem Histogramm zu veranschaulichen.

Beim dritten Beispiel, der „Simulation eines Geburtstagsproblems“, bietet der graphikfähige Taschenrechner verschiedene Möglichkeiten durch Simulation einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass zwei von drei Personen am selben Wochentag Geburtstag haben.

Im vierten Unterrichtsarrangement geht es um die „Simulation eines Multiple-Choice-Tests“ mit acht Fragen und jeweils vier Antwortmöglichkeiten. Hierbei soll ein Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass mindestens vier Fragen richtig beantwortet werden, wenn die Antworten zufällig angekreuzt werden. Zur Bestimmung dieses Näherungswertes kann die Tabellenkalkulation des FX-CG50 zur Simulation verwendet werden.

Im Beispiel „Eine Zeichnung als Ausgangspunkt für variierende Aufgabenstellungen“ von Ramona Behrens haben die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe, sich ausgehend von einer Zeichnung eigenständig mathematische Fragestellungen zu überlegen und diese zu beantworten. Im Artikel werden mögliche Fragestellungen aufgezeigt und deren Lösungen mithilfe des ClassPad dargestellt. Hierbei ermöglichen Graphikrechner beispielsweise verschiedene Lösungswege zur Beantwortung der Fragestellungen sowie Unterstützung bei der Variation der Ausgangszeichnung.

Der Artikel von Andreas Schneider „Iterative Lösung von Bewegungsgleichungen“ beschäftigt sich mit einem physikalischen Thema der 10. Klasse, bei dem die Tabellenkalkulation des ClassPad gewinnbringend eingesetzt werden kann, um mithilfe eines numerischen Verfahrens den Einfluss verschiedener Parameter auf den freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstands zu untersuchen.

Die folgenden Artikel behandeln Themen der Oberstufe des Gymnasiums.

Elvira Malitte, Thomas Krohn und Karin Richter zeigen in dem Artikel „Historische astronomische Daten und moderne CAS-Rechner: Der Komet von 1618“ an historischen Messwerten zur Bahn eines Kometen des 17. Jahrhunderts, welche verschiedenen Unterstützungsmöglichkeiten der ClassPad bei der Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge bei der Funktionsergänzung und -anpassung bietet.

Im Artikel „Unterstützung durch den ClassPad II bei der Einführung des Ableitungsbegriffs“ stellt Jens Weitendorf dar, wie der Einsatz des ClassPad bei der Einführung des Ableitungsbegriffs u. a. durch graphische Veranschaulichungen das Verständnis der Schülerinnen und Schüler unterstützen kann.

Das Unterrichtsarrangement „Optimale Verpackung“ von Sascha Reimers und Martin Scharschmidt behandelt die Modellierung von optimalen Verpackungen, was auch eine Bearbeitung von Extremwertaufgaben beinhaltet. In diesem Zusammenhang dient der ClassPad insbesondere zur Erkundung von Lösungsstrategien und zur Präsentation der Schülerergebnisse.

Dieter Haß gibt „Empfehlungen für den Umgang mit eActivities“ und wendet diese Empfehlungen in einem weiteren Artikel auf „Beispiele aus der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ an. Anders als im Main-Menü des ClassPad können im eActivity-Menü Texteingaben sowie Berechnungen gespeichert und die Eingaben gegliedert werden, so dass beispielsweise Berechnungen bei Bedarf jederzeit mit geänderten Werten wiederholt werden können.

In dem Artikel „Der etwas andere Einstieg in die Integralrechnung“ von Arnold Zitterbart werden realitätsbezogene Aufgaben zur Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Ableitung betrachtet. In den zwei Beispielen „Motorradfahrt“ und „Dauerregen“ werden momentane Änderungsraten mithilfe von Funktionen beschrieben, aus denen eine Gesamtveränderung einer Größe, beispielsweise der auf der Fahrt insgesamt zurückgelegten Weg bzw. die gesamte Niederschlagsmenge, bestimmt werden soll. Dabei kann der ClassPad die Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten der Aufgaben durch die Möglichkeiten der graphischen Veranschaulichung, dem Lösen von Gleichungen bzw. linearen Gleichungssystemen und der Arbeit mit Listen unterstützen.

In dem Artikel „Herleitung der Formel für die Krümmung von Funktionsgraphen mit Hilfe der Beispiele $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$“ von Jens Weitendorf wird anhand dieser Beispiele eine Möglichkeit dargestellt, wie die Krümmung von Funktionsgraphen an bestimmten Stellen, hier am Koordinatenursprung, ermittelt und daraus eine allgemeine Formel für die Krümmung hergeleitet werden kann.

Das Thema „Untersuchungen zu x^y im Vergleich zu y^x“ von Jens Weitendorf eignet sich für gute bzw. sehr gute Mathematikkurse der Sekundarstufe II. Dabei geht es um die Beantwortung der Frage, für welche Wertepaare (x, y) die Ungleichung $x^y > y^x$ gilt. In diesem Zusammenhang sind beispielsweise das Programm-Menü sowie das Graphik-

Menü des ClassPad zur Veranschaulichung der Wertepaare hilfreich, für die diese Ungleichung erfüllt ist. Alle zur Bedienung des ClassPad benötigten Kenntnisse werden in dem Artikel dargestellt.

An dieser Stelle möchten wir uns sehr herzlich bei allen Autorinnen und Autoren für die produktive Zusammenarbeit, die interessanten Artikel und die konstruktiven sowie anregenden Diskussionen bedanken. Vielen Dank vor allem dafür, dass Sie Ihre Erfahrungen mit dem Graphikrechner-Einsatz im Unterricht anhand von anschaulichen Beispielen und hilfreichen Hinweisen zur Bedienung dargestellt und verdeutlicht haben.
Ein besonderer Dank gilt der Firma Casio für die Unterstützung bei der Realisierung dieses Buchprojektes. Insbesondere bedanken wir uns sehr herzlich beim Schoolcoordinator Stefan Goltz, dass er die gesamte Entstehungsgeschichte dieses Buches stets interessiert und kooperativ begleitet, immer wieder technische Fragen bezüglich der Graphikrechner beantwortet hat und uns bei der Erstellung des Buches stets unterstützend zur Seite stand. Dem Educational Coordinator Tom Herwig danken wir für die hilfreichen Hinweise in Bezug auf die Formatierungen des Buches und dem Educational Project Manager Tim Bebensee für die Unterstützung unseres Projekts. Des Weiteren möchten wir uns sehr herzlich für die konstruktiven Rückmeldungen bedanken.

Literatur:

Churchhouse, R. F. (Ed.) (1986). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. University Press: Cambridge

GDM u. MNU (2010). Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) sowie des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) zur „Empfehlung der Kulturministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung“ http://madipedia.de/images/4/40/Stellungnahme-GDM-MNU-2010.pdf

Hoyles, C. & J.-B. Lagrange (Eds.) (2010). Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study, Springer: New York u. a.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. McMillan: New York, S. 515–556

KMK (2009). Empfehlung der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2009/2009_05_07-Empf-MINT.pdf

NCTM (1989, 2000). Principles and Standards for School Mathematics. NCTM, Inc.: Reston. http://standards.nctm.org/

Weigand, H.-G. (2003). Taschenrechner im Mathematikunterricht - Ein retrospektiver Vergleich der Diskussion und Vorgehensweise in der BRD und in der DDR, in: Henning, H. u. Bender, P. (Hrsg.), Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern - Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR, Bericht über eine Doppeltagung zur gemeinsamen Aufarbeitung einer getrennten Geschichte, Universität Magdeburg, Universität Paderborn. 205–216

Einstieg in die Arbeit mit dem ClassPad in der Sekundarstufe I

Christoph Kost

Kurzfassung des Inhalts:
Es werden Einstiegsmöglichkeiten in das Arbeiten mit dem ClassPad in der Unter- und Mittelstufe dargestellt. Diese Einführungsbeispiele wurden im Unterricht erprobt.

Klassenstufe(n):
5 – 9 (auch in der Realschule)

Lernziele:
- Darstellung von Diagrammen und geometrischen Abbildungen
- Nutzung des Geräts als Kontrollinstrument

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung bedarf es nicht

Zeitbedarf:
Punktueller Einsatz des Rechners (kurze Sequenzen), Aufgaben zum Ausprobieren und zur Weiterarbeit

Sonstige Materialien:
Keine

Welche Einstiegsmöglichkeiten bietet der ClassPad in der Sekundarstufe I?

Der ClassPad bietet bereits in der Sekundarstufe I sehr viele Möglichkeiten einer sinnvollen Nutzung. Bereits Schülerinnen und Schüler der Klasse 5 können das Gerät gewinnbringend einsetzen. Wie sieht jedoch die Arbeit mit diesem Gerät konkret aus?

Der ClassPad ermöglicht jeder Schülerin bzw. jedem Schüler, eigene Zeichnungen, Graphiken und Rechnungen hinsichtlich des Ergebnisses schnell zu überprüfen. Mit der Einführung des Geräts bereits in der Klassenstufe 5 nimmt man vielen Schülerinnen und Schülern die Angst vor diesem Medium. Allerdings sei auch erwähnt, dass der ClassPad in dieser Klassenstufe von mir nur punktuell und ausschließlich als Kontrollinstrument eingesetzt wurde, da das Kopfrechnen und auch die schriftliche Rechnung natürlich im Vordergrund stehen sollten. Schülerinnen und Schüler, die bereits in der 5. Jahrgangsstufe mit diesem Gerät gearbeitet haben, sind in der Mittelstufe bereits mit vielen Anwendungen vertraut und haben zum Beispiel im Wahlfach Bürokommunikation eine gute Grundlage für den Einstieg in Excel.

Ich möchte hier exemplarisch einige Möglichkeiten darstellen, die sich auch gut für den Einsatz in der Realschule eignen. Die hier aufgezeigten Wege wurden alle erfolgreich erprobt und mittlerweile mehrfach in den verschiedenen Klassenstufen einer Realschule angewendet. Der Einstieg in der 5. Klasse, dies sei an dieser Stelle ausdrücklich erwähnt, erscheint mir sehr sinnvoll, ist aber auch zu einem späteren Zeitpunkt gut möglich.

Einstieg in Klasse 5:

Der Einstieg mit dem ClassPad kann bereits in Klasse 5 erfolgen. Das Arbeiten mit dem ClassPad erfolgt durch das Erstellen von Balken- und Säulendiagrammen.

Die Schülerinnen und Schüler sehen das Gerät zum ersten Mal und sind meist durch die Nutzung von Smartphones sehr versiert im Umgang, können sehr schnell Daten eingeben und diese in verschiedenen Formen darstellen lassen.

Die Schülerinnen und Schüler erstellen vorgegebene Diagramme zunächst im Heft und kontrollieren diese dann mithilfe des ClassPad. Beide Vorgänge sollen sie stets auch in eigenen Worten beschreiben können.

Thema in 5. Klasse: Darstellen von Daten, Listen und Diagrammen

Die letzte Klassenarbeit lieferte die folgenden Ergebnisse:

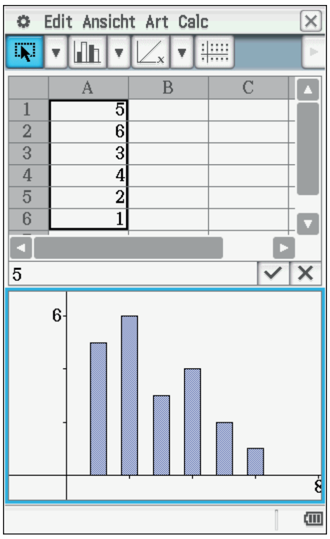
Noten	Klasse 5a	Klasse 5b
1	5	1
2	6	7
3	3	10
4	4	5
5	2	1
6	1	0

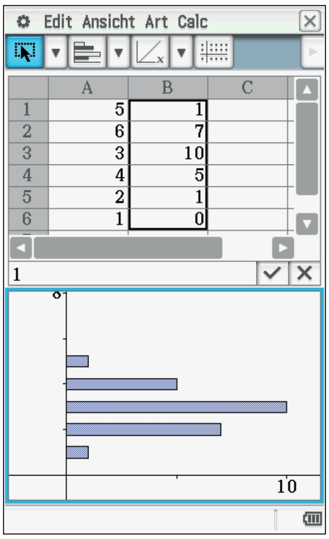
Arbeitsaufträge:

- Stelle das Abschneiden der Klassen in deinem Heft grafisch dar.
- Fertige für das Ergebnis der Klasse 5a ein Säulendiagramm an und stelle das Ergebnis der Klasse 5b in einem Balkendiagramm dar.
- Nach der grafischen Darstellung im Heft kannst du die Diagramme mit dem ClassPad zeichnen.

Lösungsvorschlag:

Die Daten für die Klassen 5a und 5b werden in die Spalte A bzw. B des Tabellenkalkulations-Menüs eingegeben. Zur Erzeugung eines Säulendiagramms wird die Spalte A markiert und dann wird ausgewählt (Balkendiagramm:).





Folgende Aufgabenbeispiele bieten sich zur Weiterarbeit an:

- Schaue in deine Schultasche und notiere die Anzahl der Hefte, Bücher, Buntstifte und Filzstifte. Stelle die Daten grafisch dar.

- Überlege dir selbst eine ähnliche Datenerhebung und stelle das Ergebnis in Partnerarbeit mit dem ClassPad dar.
- Beispiele: Pausenverpflegung, Autos der Lehrerinnen und Lehrer, Anreise zur Schule.

Einstieg /Weiterarbeit in Klasse 7:

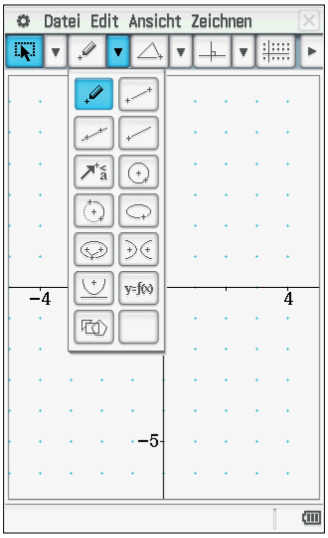
Als Beispiel für die Arbeit in Klasse 7 wird hier ein geometrischer Zusammenhang ausgewählt. Die Schülerinnen und Schüler haben zu diesem Zeitpunkt bereits Dreiecke kennengelernt und können diese – durch die Koordinaten der Eckpunkte – im Koordinatensystem darstellen.

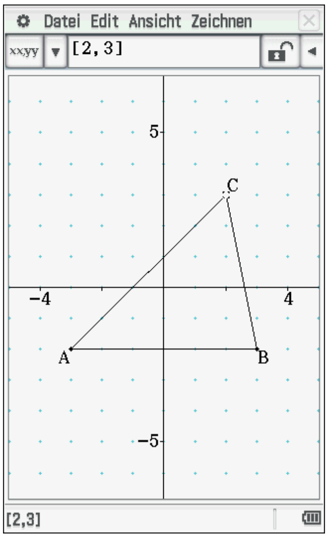
Arbeitsauftrag:

- Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck mit dem ClassPad und notiere die Koordinaten der Eckpunkte.

Lösungsbeispiel:

Im Geometrie-Menü kann ein Dreieck beispielsweise mit den, in der folgenden Abbildung gezeigten, Werkzeugen gezeichnet werden. Das Koordinatensystem sowie Gitterpunkte können durch mehrfaches Anklicken der Taste eingeblendet werden. Mithilfe des Messfeldes können beispielsweise Koordinaten eines Punktes angezeigt oder der Punkt selbst umbenannt werden. Dazu muss der entsprechende Punkt ausgewählt und die Taste ▸ gedrückt werden, um in das Messfeld zu gelangen.



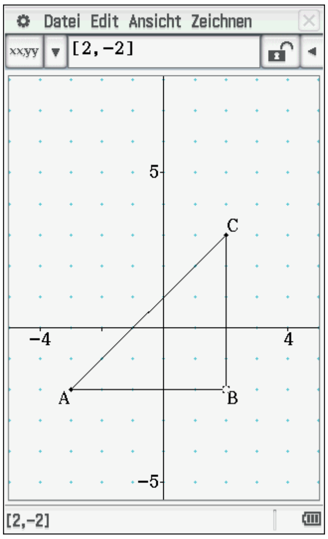


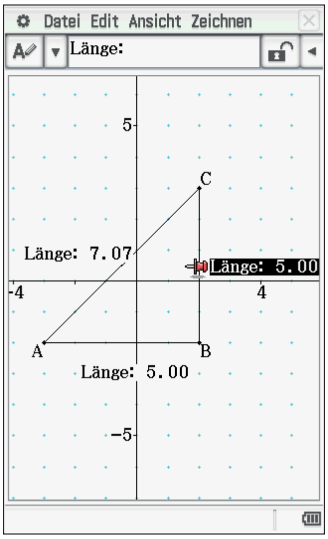
Arbeitsaufträge:

- Überlege dir selbst eine derartige Zeichenaufgabe und löse sie in Partnerarbeit mithilfe des ClassPad.

- Schätze die Längen der Dreieckseiten und bestimme anschließend die Maße mithilfe des ClassPad.

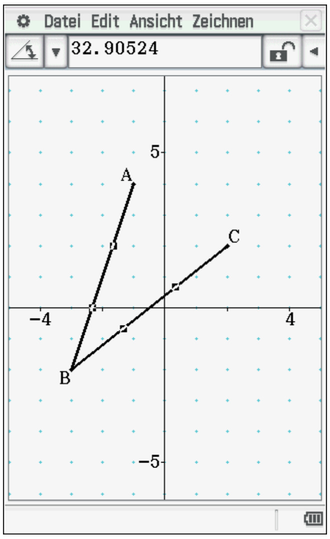
Lösungsbeispiel:
Mögliche Zeichenaufgabe: Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck und beschreibe deine Vorgehensweise.
Eine Senkrechte durch einen Punkt zu einer Strecke wird mithilfe des ClassPad erzeugt, indem der Punkt und die Strecke markiert werden und ausgewählt wird.
Die Längen der Dreiecksseiten können im Messfeld abgelesen werden. Dazu werden eine Seite und (links neben dem Messfeld) ausgewählt. Diese Messwerte können in das Zeichenblatt eingetragen werden, indem sie markiert und in das Zeichenfeld gezogen werden.





Weitere mögliche Arbeitsaufträge:
- Zeichne mit dem ClassPad einen spitzen Winkel.
- Schätze zuerst die Größe des Winkels und bestimme sie dann exakt.

Lösungsbeispiel:



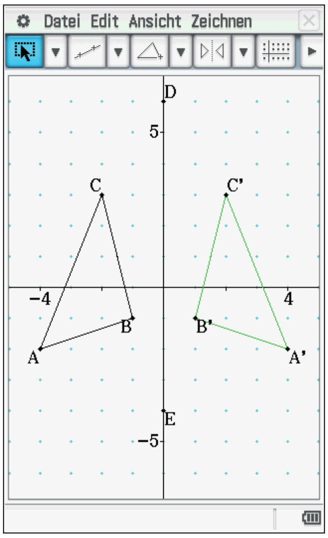
Aufgabenbeispiel zur Spiegelung

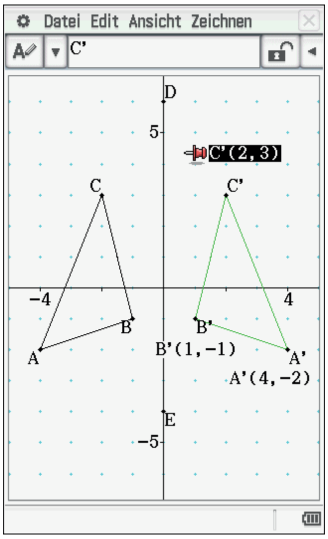
- Zeichne das Dreieck ABC mit den Punkten $A(-4|-2), B(-1|-1)$ und $C(-2|3)$ und spiegele es an der y-Achse. Notiere dann die Bildpunkte $A‘, B‘$ und $C‘$.
- Beschreibe hinterher genau, wie du vorgegangen bist.

Lösungsvorschlag:

Das Dreieck ABC kann mithilfe des ClassPad gezeichnet werden, indem man zunächst die Punkte A, B und C an die entsprechenden Positionen im Koordinatensystem einträgt (oder indem man drei Punkte in das Koordinatensystem setzt und durch Markieren und Verwenden des Messfeldes die entsprechenden Koordinaten für die Punkte eingibt).

Zum Spiegeln an der y-Achse muss zuvor eine entsprechende Gerade (hier: $[DE]$) über die Koordinatenachse gelegt werden, da diese beim ClassPad kein geometrisches Objekt ist. Anschließend werden die Seiten des Dreiecks sowie die Gerade, die über der y-Achse liegt, ausgewählt, und es wird gedrückt. Die in das Zeichenblatt (durch Markieren und Ziehen in das Zeichenfeld) eingetragenen Werte können noch entsprechend benannt werden, indem man in das Messfeld statt *Koord:* die gewünschte Bezeichnung eingibt.





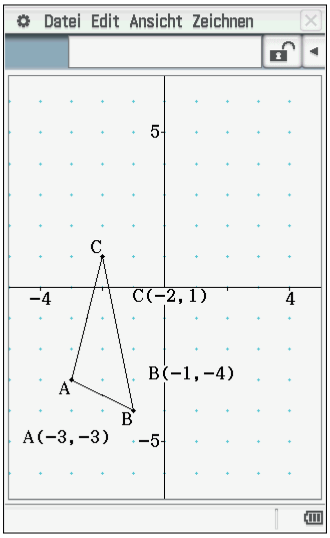
Aufgaben zur Weiterarbeit

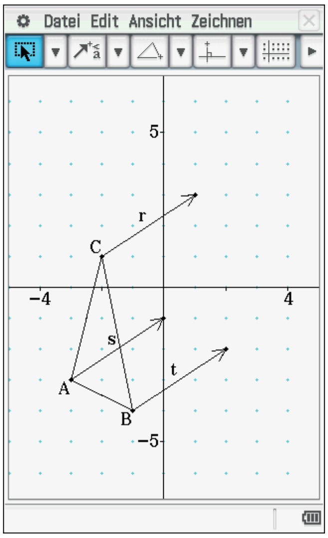
- Überlege dir selbst die Eckpunkte eines Dreiecks und zeichne es mit dem ClassPad.
- Zeichne eine Strecke $[DE]$ und spiegele das Dreieck an dieser Strecke.
- Notiere die Koordinaten der Bildpunkte.
- Schreibe auf, was dir bei der Bearbeitung aufgefallen ist.

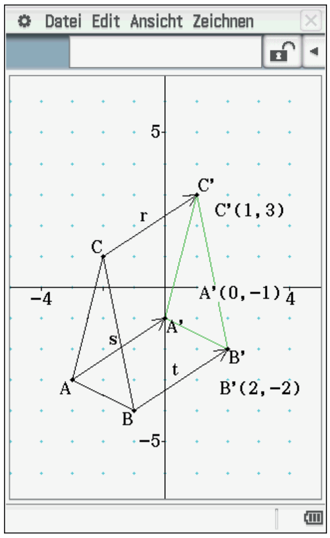
Verschiebungen

- Verschiebe das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(-3|-3), B(-1|-4)$ und $C(-2|1)$ um drei Einheiten nach rechts und um zwei Einheiten nach oben.
- Notiere die Koordinaten der Bildpunkte.

Lösungsbeispiel:
Nachdem das Dreieck ABC eingezeichnet wurde, wird jeweils ausgehend von den Eckpunkten des Dreiecks ein Vektor eingezeichnet, der die Verschiebung der Punkte um drei Einheiten nach rechts und um zwei Einheiten nach oben andeutet. Anschließend wird mithilfe von der Verschiebevektor ausgewählt. Es öffnet sich ein Feld, indem der Verschiebevektor direkt eingegeben oder in der Zeichnung ausgewählt (Schaltfläche: Vektor wählen) werden kann.



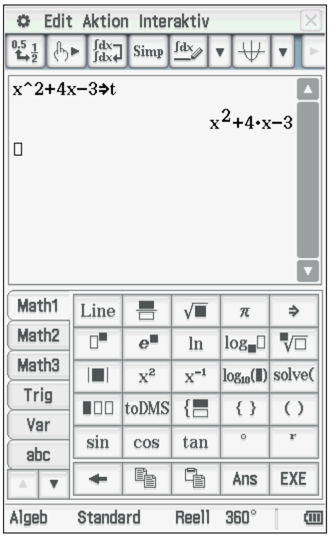


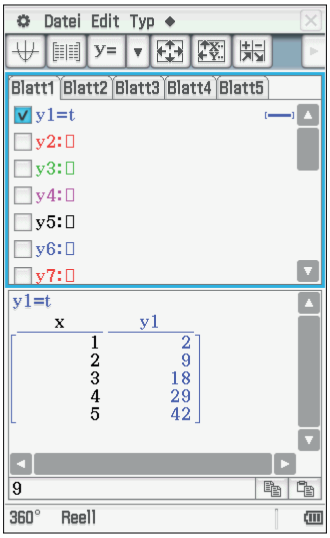


Einstieg/ Weiterarbeit in Klasse 8:
Der Einstieg kann über ein Zahlenrätsel erfolgen. Die Schülerinnen und Schüler lösen vorgegebene Zahlenrätsel zunächst durch das Aufstellen von Termen und dem Erstellen einer Wertetabelle.

Aufgabenbeispiel:
Man erhält die Zahl 18, wenn man die gesuchte Zahl quadriert, dann das Vierfache dieser Zahl addiert und nun drei subtrahiert. Welche natürliche Zahl ist gesucht?

Lösung mittels Definition eines Terms:
Es wird ein Term erzeugt, der die Informationen des Zahlenrätsels enthält. Dieser wird in das Main-Menü eingegeben und mithilfe des Zuweisungspfeils als t gespeichert.
Mithilfe des Grafik- und Tabellen-Menüs kann eine Wertetabelle erstellt werden. Dafür wird beispielsweise bei $y1= t$ eingegeben und mit EXE bestätigt. Zur Erzeugung der Wertetabelle wird die -Schaltfläche gedrückt.





Weiterführende Aufgabe:

Im Anschluss könnte man direkt die Aufgabe durch folgende Fragestellung öffnen:

- Überlege dir selbst ein ähnliches Zahlenrätsel und löse es mithilfe des ClassPad.

Alternative Einstiegsmöglichkeit: Anwenden der Umformungsmodule

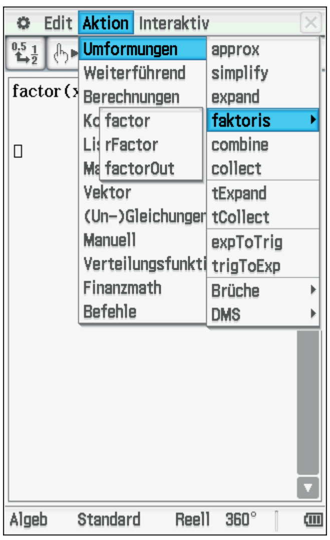
Untersuche die Wirkung von *factor* und *expand* auf folgende Beispiele:

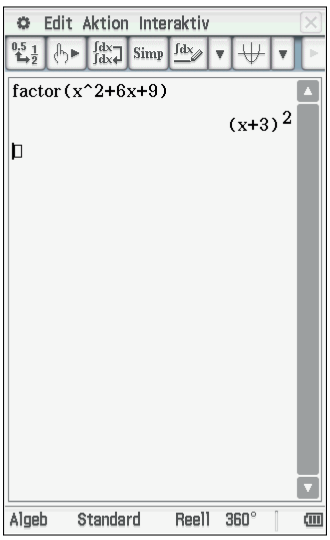
- $factor(x^2 + 6x + 9)$
- $expand((x + 2)^2)$

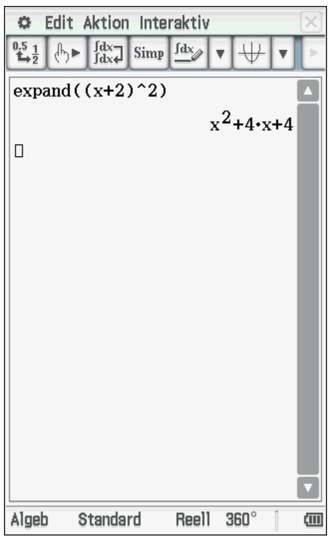
Lösungsvorschlag:

Zur Eingabe wird im Main-Menü im Untermenü *Aktion* → *Umformungen* ausgewählt.

- Der Befehl *factor* ergibt die rationalen Faktoren eines Terms.
- Der Befehl *expand* multipliziert einen Term aus.







Beide Umformungen dienen den Schülerinnen und Schülern zur Überprüfung bei der Anwendung der binomischen Formeln, dabei kann jeder in seinem individuellen Lerntempo seine Aufgaben überprüfen. In dieser Arbeitsphase multiplizieren die Schülerinnen und Schüler Terme, klammern Faktoren aus und wenden die binomische Formel an. Das Gerät sollte auch hier ausschließlich zur Kontrolle verwendet werden. Erfahrungsgemäß sind die meisten Schülerinnen und Schüler verantwortungsvoll im Umgang mit dem Gerät und merken bei Klassenarbeiten oder Hausaufgabenkontrollen (diese finden dann ohne den ClassPad statt) sehr schnell, ob und wie sie den Rechner verwendet haben. Viele Schülerinnen und Schüler melden gerade in Übungsphasen zurück, dass sie sehr dankbar über die direkte Kontrollmöglichkeit sind. Kleine Fehler, gerade beim Ausmultiplizieren, können dadurch direkt beseitigt werden.
Beispiel: $(2x + y)^2 \; = \underline{4x^2} + 4xy + y^2$

Lösen von linearen Gleichungssystemen

Das Lösen von Gleichungssystemen kann einerseits mit der eingebauten Lösungsfunktionalität, andererseits mit dem schrittweisen Eliminieren durchgeführt werden.

Aufgabenbeispiel:
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

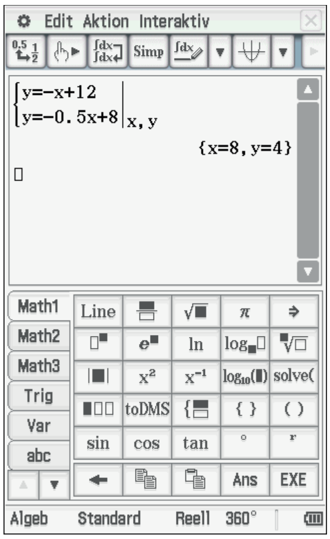
$$I \quad y = -x + 12$$

$$II \quad y = -0{,}5x + 8$$

Lösungsvorschläge:
Die Lösung dieser Aufgabe kann alternativ über zwei Wege erfolgen.

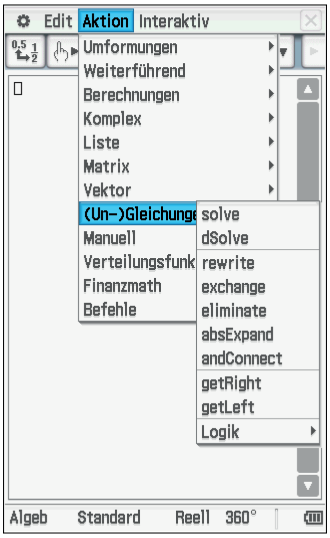
Weg 1:
Im Keyboard Math1 wird der Befehl verwendet und die beiden linearen Gleichungen in die beiden Zeilen des Feldes eingegeben. Im rechten unteren Feld werden die Variablen x und y – durch Komma getrennt – eingegeben, nach denen aufgelöst werden soll.

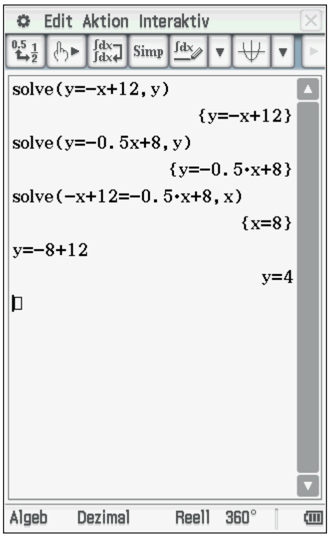
Als Ergebnis erhält man $x = 8$ und $y = 4$.



Weg 2:

Im $\sqrt{\alpha}$-Menü wird der Befehl *solve* verwendet, um zunächst beide Gleichungen nach einer Variablen aufzulösen. In diesem Beispiel wurden beide Gleichungen nach der Variablen y aufgelöst. Im Anschluss wird der *solve*-Befehl erneut benutzt und die Lösungsterme gleichgesetzt. Nach dem Berechnen der Variablen x muss diese natürlich noch in eine der Gleichungen eingesetzt werden. Außerdem darf bei diesem Lösungsweg das Notieren der Lösungsmenge nicht vergessen werden.





Aufgaben zur Weiterarbeit:

- Stelle die linearen Funktionen nun grafisch dar und ermittle zeichnerisch den Schnittpunkt.
- Überprüfe anschließend deine Lösung mit dem ClassPad.

Weiteres Aufgabenbeispiel:

In einem Gästehaus werden zwei Ferienwohnungen zu unterschiedlichen Bedingungen angeboten:

Wohnung A: Tagesmiete *57 €*, zusätzlich *40 €* für die Endreinigung.
Wohnung B: Tagesmiete *65 €*, die Endreinigung ist im Preis enthalten.

- Bei wie viel Urlaubstagen kosten beide Wohnungen gleich viel?
- Löse die Aufgabe grafisch und überprüfe dein Ergebnis mit dem ClassPad.

Zugänge zur linearen Regression

Karel Tschacher

Kurzfassung des Inhalts:
Es wird ein Weg aufgezeigt, wie Schülerinnen und Schülern ohne Kenntnisse der Differenzialrechnung an die Gaußsche Methode der minimalen Fehlerquadrate herangeführt werden können. Die mathematischen Hintergründe der linearen Regression werden dann – für Lehrerinnen und Lehrer – als Hintergrundwissen dargestellt.

Klassenstufe(n):
Die Aufgaben eignen sich sowohl für Klasse 6 ohne Verwendung des Funktionsbegriffs und deren Graphen, als auch für Klasse 8 bei Kenntnissen über Funktionen und deren Graphen.

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen ...

- bei Alltagssituationen proportionale Zusammenhänge erkennen und diese quantitativ beschreiben;
- Einsicht in verschiedene Verfahren gewinnen, die dazu dienen, Zusammenhänge bei gegebenen Daten zu beschreiben;
- unterschiedliche Darstellungen zur Bearbeitung von metrischen zweidimensionalen Datenlisten verwenden können.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Es sind keine Vorkenntnisse für die Nutzung des Graphikrechners erforderlich.

Zeitbedarf:
Jeder Arbeitsauftrag kann im Rahmen einer Doppelstunde behandelt werden.

Sonstige Materialien:
Zu den Arbeitsaufträgen sind beispielhafte Daten in den Lösungsvorschlägen zu finden.
Damit die Schülerinnen und Schüler diese Daten selbst ermitteln können, werden folgende Materialien benötigt:
Lineal, Bandmaß sowie für

- Arbeitsauftrag 1: Runde Alltagsgegenstände
- Arbeitsauftrag 2: Schulhefte
- Arbeitsauftrag 3: Seite eines Fahrtenbuches eines Autofahrers
- Arbeitsauftrag 4: „Ihr Zugbegleiter“ eines ICE

Begleittext

Die drei Grunderfahrungen, die den Mathematikunterricht nach Winter (1996) als allgemeinbildend herausstellen, liegen auch den KMK-Standards zugrunde:

1. *„Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen."*

In dem hier vorgeschlagenen Unterrichtsentwurf sollen Schülerinnen und Schüler bei Alltagsgegenständen bzw. -situationen, z. B. bei Gebrauchsgegenständen, Schulheften oder Fahrtstrecken, proportionale Zusammenhänge konstruieren, entdecken oder erkennen.

2. *„Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern, und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen."*

Schülerinnen und Schüler sollen die Vorgehensweise einer statistischen Auswertung von Alltagsdaten kennenlernen. Dabei werden sie mit Arbeitsweisen und Verfahren vertraut, die eigene Fachbegriffe und Darstellungsformen erfordern. Sie entwickeln Vorstellungen über die Struktur einer empirischen oder statistischen Untersuchung und lernen Begriffe der Statistik kennen. Sie verwenden dabei den ClassPad als ein Werkzeug zur Problemlösung.

3. *„In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben."*

In diesem Unterrichtsentwurf sollen die Schülerinnen und Schüler Fragestellungen eigenständig aufwerfen, Vorgehensweisen selbst finden und die Güte von Ergebnissen einschätzen lernen.

Die Unterrichtssequenz geht der Frage nach, wie man Beziehungen zwischen Daten von zwei gegebenen Größen erkennen kann. Dabei werden nur proportionale Zusammenhänge betrachtet, damit die Minimierungsaufgabe der Abstände zwischen Messwerten und Schätzwerten eindimensional bleibt. Die allgemeine lineare Regression erfolgt mit einer linearen Funktion, so dass diese Minimisierung der Abstände zu einer Aufgabe mit zwei Variablen wird. Das fordert dann allerdings eine mehrdimensionale Statistik, was die Inhalte der Schule übersteigt. Daher werden hier nur Ausgleichsgeraden durch den Ursprung gesucht, der Regressionskoeffizient ist dann die Steigung der Geraden. Der Begriff „Korrelationskoeffizient" (das Maß für die Güte einer linearen Anpassung der Messwerte) wird nicht eingeführt, die Abweichungen werden nur qualitativ beobachtet und bewertet.

Im Rahmen dieses Artikels werden einfache Begriffe der Statistik angesprochen:

- die graphische Auswertung von Daten mit zwei Merkmalen,
- die Interpretation einer Punktewolke,
- die funktionale Abhängigkeit zweier Merkmale,

- Einführen einer Schätzfunktion zur Vorhersage eines Wertepaares,
- die Güte oder die Fehler einer Schätzfunktion,
- Methoden, Fehler klein zu halten.

Bei dieser Unterrichtssequenz dient der ClassPad nicht nur zur Vereinfachung von Rechnungen, sondern vor allem zur Veranschaulichung der Daten und dem Finden der Regressionsfunktion.

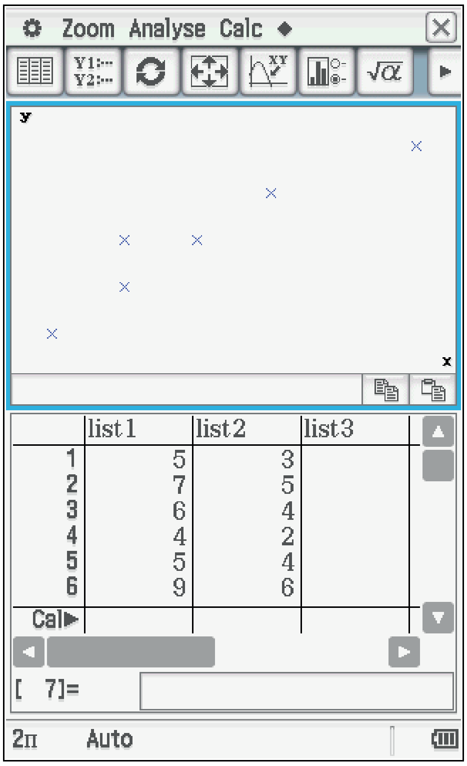
Zunächst wird der mathematische Zusammenhang an einem Beispiel erläutert.

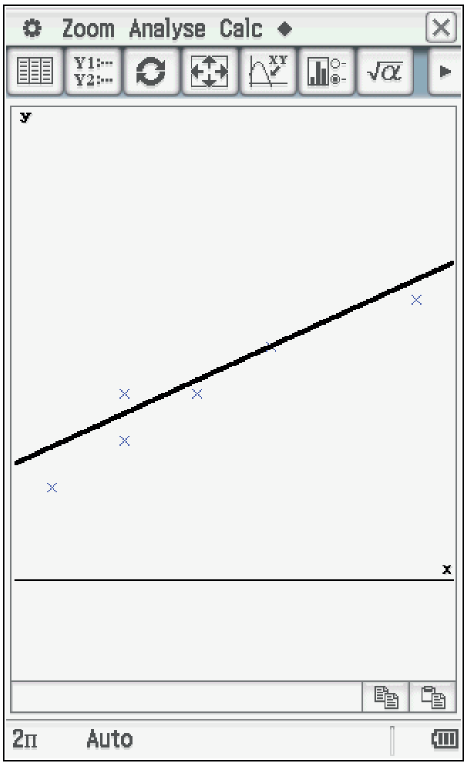
Mathematische Herleitung

Eine Aufgabe als Einstieg:

„Für ein Modegeschäft wird in einem Zeitraum die Zahl x der vor dem Schaufenster stehenden Personen und die Zahl y der anschließend das Geschäft betretenden Kunden beobachtet."

Zahl x der die Auslagen ansehenden Personen	5	7	6	4	5	9
Zahl y der den Laden betretenden Personen	3	5	4	2	4	6





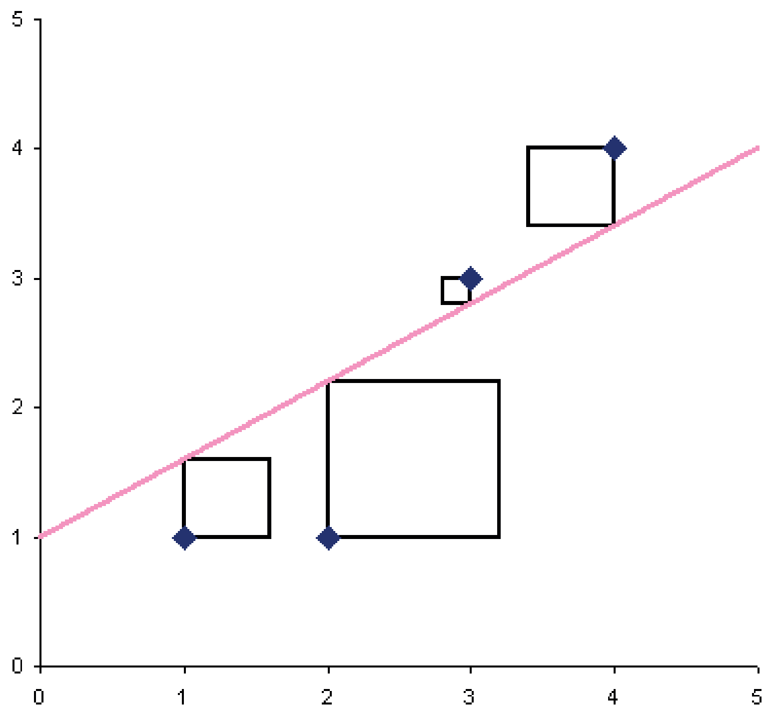
In den Rechner werden die Datenpaare im Statistikmenü eingegeben, die Punktewolke erzeugt (*Grafik einst*→ *Einstellung*→) und die Gerade der sog. „Schätzfunktion" gezeichnet (*Calc*→ *Regressionen*→ *lineare Regression*), einer Funktion, die den Zusammenhang zwischen den beiden betrachteten Merkmalen beschreibt oder beschreiben könnte. Die Eingaben in den ClassPad sind am Ende des Artikels dargestellt.

Wie erhält man diese Funktion bzw. Gerade?

Hierzu könnte man sich verschiedene Methoden denken:

a) Man könnte die Summe der Abstände der Punkte von der Gerade oder
b) die Differenz der y-Werte der gegebenen Punkte $P_i(x_i, y_i)$ und den Punkten $P_g(x_i, y_g)$ auf der Geraden minimieren.

Die auf Carl Friedrich Gauß zurückgehende Idee besteht darin, die Quadrate der Differenz der Punkte entsprechend b) zu verwenden. Geometrisch lässt sich das so veranschaulichen, dass über den y-Abstandsstrecken Quadrate gelegt werden, wobei ein Eckpunkt der entsprechende Messpunkt (x, y) ist und der andere auf der Geraden liegt. Die Summe der Quadratflächeninhalte soll minimal sein. Dann wird diese Gerade als diejenige angesehen, die den Zusammenhang der Datenpaare am besten beschreibt.



Zunächst werden im Folgenden Schülerarbeitsaufträge formuliert, die die eigenständige Erarbeitung der linearen Regression ermöglichen. Dann folgen Lösungshinweise zu diesen Arbeitsaufträgen. Die theoretische Herleitung für die Berechnung der Regressionsgeraden findet sich – als Hintergrundwissen für interessierte Lehrerinnen und Lehrer – am Ende des Artikels.

Schülerarbeitsaufträge

Aufgabe 1

Der Zusammenhang von Durchmesser und Umfang bei Kreisen
Die Schülerinnen und Schüler verwenden ein Lineal und ein Bandmaß. Sie messen den Durchmesser und den Umfang von Alltagsgegenständen und tabellarisieren die Wertepaare.

Im Schülergespräch werden Fragen aufgeworfen, denen dann im Unterricht nachgegangen werden kann.

Aufgabe 2

Der Zusammenhang von Länge und Breite bei Schulheften (Din-A-Formate)
Die Schülerinnen und Schüler messen die Längen und Breiten ihrer Schulhefte, vom Vokabelheft bis zum Zeichenblock und tabellarisieren die Wertepaare.

Aufgabe 3

Zusammenhang von Benzinpreis, Benzinmenge und zurückgelegter Fahrstrecke
Die Schülerinnen und Schüler erhalten eine Seite eines Fahrtenbuches eines Autofahrers für den Monat April. Alternativ werden die Eltern gebeten, Daten der Autofahrten zu notieren, dann werden die Daten in der Klasse zusammengetragen und ausgewertet.

Aufgabe 4

Zusammenhang Fahrzeit und Strecke bei einem ICE der Bundesbahn
Die Schülerinnen und Schüler erhalten das Blatt „Ihr Zugbegleiter“ eines ICE, aus dem sie selbst gewählte Daten entnehmen.

Lösungshilfen zu Aufgabe 1: Kreiszahl Pi

Die Schülerinnen und Schüler messen den Durchmesser und den Umfang verschiedener runder Gegenstände und erstellen eine Liste. Im Folgenden wurden beispielhafte Messwerte verwendet.

	Durchmesser (cm)	Umfang (cm)
Tasse	7,9	25,3
Milchkanne	10,3	32,1
Untertasse	13,8	44,6
Kuchenteller	18	57,1
Brotteller	20	61,5

Diese Aufgabe kann sowohl in der 6. als auch in der 8. Klassenstufe bearbeitet werden. Die Schülerinnen und Schüler erkennen unmittelbar, dass mit dem Durchmesser auch die Umfänge zunehmen. Mögliche Fragen, die bei der Bearbeitung der Aufgaben auftreten könnten, sind etwa die Folgenden:

Klassenstufe 6
- Wie kann man den Zusammenhang beschreiben?
- Wie genau sind diese Messungen?
- Kann man den Umfang aus dem Durchmesser berechnen?
- Wie kann man bei bekanntem Durchmesser den Umfang eines Gegenstandes vorhersagen?
- Mit welchem Fehler ist bei der Vorhersage zu rechnen?

Klassenstufe 8
- Wie kann man die Kreiszahl π aus den Daten ermitteln?
- Wie kann der Rechner bei diesen Berechnungen helfen?
- Kann man einen Term (eine Funktionsgleichung) für die Vorhersage finden, um bei bekanntem Durchmesser den Umfang zu berechnen?
- Welche Eigenschaften der Funktion kann man aus dem Graphen erkennen?

Die gemessenen Daten werden im Menü Statistik eingegeben. Dazu wird *list1* mit „Durchm“ und *list2* mit „Umfang“ überschrieben. Die Eingabe der Daten erfolgt zellenweise und jede Eingabe wird mit der EXE-Taste abgeschlossen (s. Abb. 1).

Im Statistik-Menü kann die „Punktewolke“ dargestellt werden. Dazu wird zunächst das Graphikfenster festgelegt. Mit dem Befehl *Grafik einst* → *Einstellung* wird der *StatGraph1* eingestellt. Die Listennamen findet man am Ende der Darstellung von *X-List* und *Y-List*. Hier kann man nach Wunsch andere Darstellungen wählen. Man beendet die Eingabe mit *Einst* oder Verlassen der Seite (s. Abb. 2). Dann kehrt man auf die Seite der Listen zurück und wählt das Menü *Graphen anzeigen* (s. Abb. 3). Mit dem Befehl *Verfolgen* im Menü *Analyse* (alternativ:) kann man die Wertepaare durchlaufen.

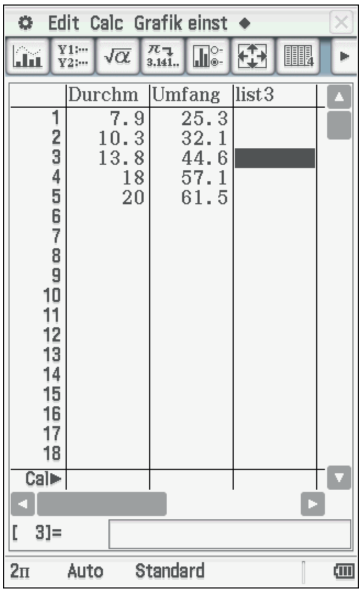


Abb. 1: Eingabe von Daten in Listen

Abb. 2: Einstellung

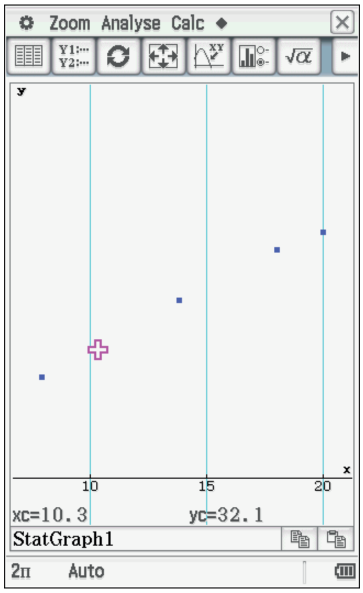


Abb. 3: Die Punktewolke

Die Quotienten der Wertepaare können bestimmt werden, daraus lässt sich dann die Kreiszahl π berechnen. Dazu wechselt man in das Main-Menü. Man schreibt den gewünschten Bruch mit den Namen der Listen und ordnet der Liste der Brüche einen Namen zu, den man zuvor in die erste Zeile von *list3* geschrieben hat, hier der Name „Kreisz“ für Kreiszahl. Die Werte sind oft als Brüche mit größeren Zählern und Nennern dargestellt. Ein Wechsel zu Dezimalzahlen erfolgt mit dem Befehl Näherungswert. Zum Zuordnen einer Liste oder eines Ergebnisses verwendet man die Speichertaste. Dazu verwendet man die Tastatur Keyboard und dann in der ersten Zeile am Ende den Pfeil ⇒ (s. Abb. 4). Der Mittelwert dieser fünf Quotienten wird gebildet. Der Befehl für Mittelwert heißt *mean*. Man findet ihn im Menü *Aktion*→ *Liste*→ *Statistik* (oder Eingabe der Buchstaben mithilfe der Tastatur). Den Namen der Liste kann man auch durch Kopieren (im Menü *Statistik*→ *Einfügen*→ *Kopieren)* im Main-Menü erzeugen. Hier wird der Wert der Variablen „p“ zugeordnet (s. Abb. 5). Der Mittelwert von der Kreiszahl ist $p =$ 3,159628556, mit der eingestellten Genauigkeit von neun Nachkommastellen. Die Schätzwerte des Umfangs können mit der Rechnung: $Umfang = p \cdot Durchmesser$, kurz

$Uschaetz = p \cdot Durchm$ ermittelt werden. Dazu wird *list4* in “Uschaetz“ umbenannt und im Main-Menü wird die Rechnung und der Speicherplatz eingegeben (s. Abb. 6).

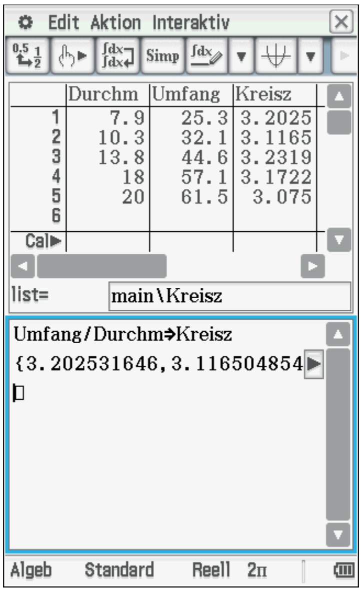


Abb. 4: Die Quotienten der Wertepaare

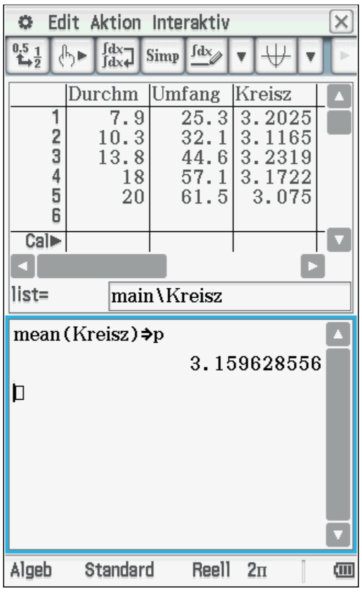


Abb. 5: Der Mittelwert von der Kreiszahl

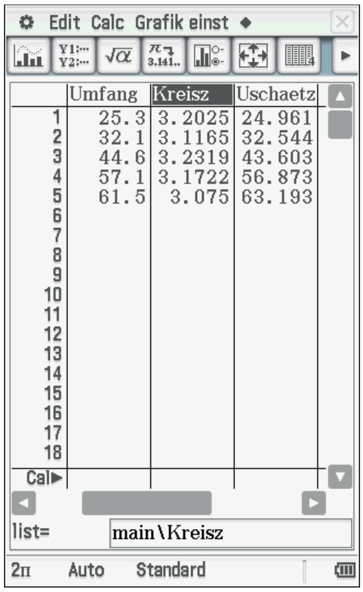


Abb. 6: Die Schätzwerte mit der Kreiszahl p

Die Abweichungen der Schätzwerte von den Messwerten werden berechnet, um die Güte der Schätzung zu ermitteln. Dazu wird die nächste Liste mit „Abweich“ beschriftet, die Rechnung in das Main-Menü eingegeben und in der Liste „Abweich“ abgespeichert (s. Abb. 7). Die Summe dieser Werte sollte möglichst „klein“, d. h. möglichst Null oder nahe Null sein. Dazu wird die Summe der Einzelwerte der Liste „Abweich“ gebildet. Im Main-Menü schreibt man *sum* und den Namen der Liste in runden Klammern dazu, dann werden die Listenwerte addiert. Man kann den Befehl *sum* auch unter *Aktion→ List→ Berechnungen* finden. Die Abweichung ist *-0,57* (s. Abb. 8). Ist der Näherungswert für die Kreiszahl „p“ besser, wenn man die Mittelwerte der Umfänge durch die Mittelwerte der Durchmesser dividiert? Der Wert $p2 = 3{,}151428571$ ist wenig verschieden von $p = 3{,}159628556$. Ist damit auch der Fehler bei den Schätzwerten kleiner? Dazu berechnet man den Bruch aus den Mittelwerten und speichert das Ergebnis unter „p2“. Dabei zeigt sich, dass es einen Unterschied zwischen der Kreiszahl „p“ aus der ersten Berechnung und der Kreiszahl „p2“ aus der letzten Berechnung gibt, wenn der Unterschied auch klein ist (s. Abb. 9).

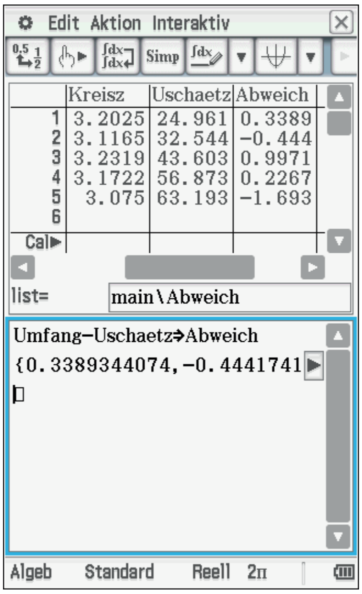


Abb. 7: Die Liste der Abweichungen der Einzelwerte des Umfangs vom Schätzwert

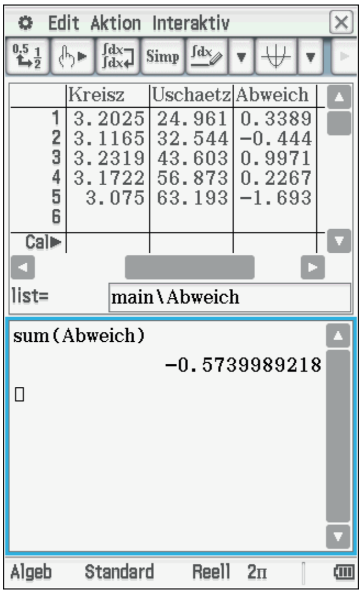


Abb. 8: Summe der Einzelwerte der Liste „Abweich“

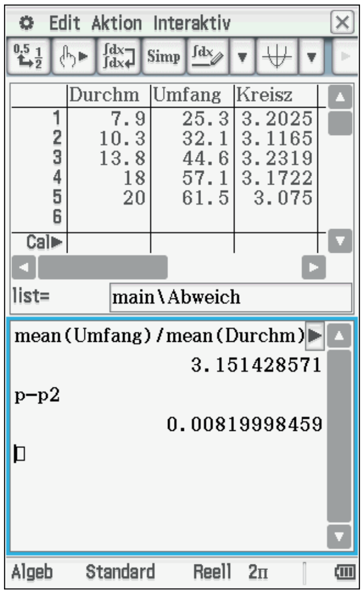


Abb. 9: Differenz von p und p2

Wenn wir nun die Summe der Abweichungen von den neu berechneten Schätzwerten „Abweich2“ betrachten, sehen wir, dass nun die Abweichungssumme tatsächlich Null ist (s. Abb. 10). Das ist erst einmal ein Ergebnis, das man sich gewünscht hat. Die Schätzfunktion passt sich den Messwerten gut an.

Es lässt sich fragen, ob es andere Möglichkeiten für eine „gute“ Annäherung gibt. Betrachten wir die Beträge der Abweichungen, diese sollen möglichst klein werden. Zunächst führen wir diese Überlegung für „p“, dem Mittelwert der Quotienten, durch. Man rechnet die Beträge der Abweichungen aus und bildet die Summe dieser nichtnegativen Zahlen. Den Befehl für den Betrag der Werte findet man in der Tastatur Keyboard Math1 → ▣ oder man schreibt mit Buchstaben das Wort *abs* und dann den Namen der Liste in runden Klammern. Zuvor hat man die nächste Liste mit dem Namen „Betr1“ beschriftet. Die Summe der Beträge der Abweichungen wird berechnet. Die Summe aller Fehler ist nun *3,6994* (s. Abb. 11). Wie sieht diese Summe bei „p2“ aus? Dazu errechnet man die Schätzwerte mit „p2“ und bestimmt die Summe der Beträge der Abweichungen und nennt das „Betr2“. Der Fehler ist da noch größer (s. Abb. 12).

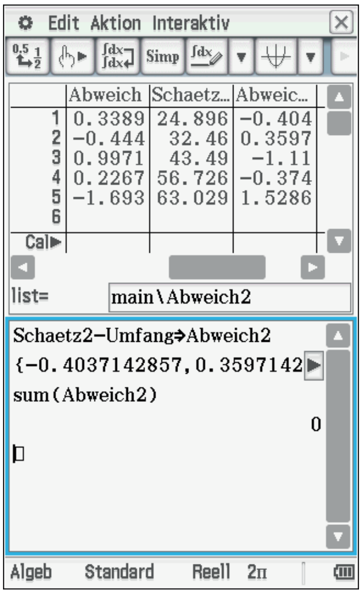


Abb. 10: Summe der Abweichungen von den neu berechneten Schätzwerten

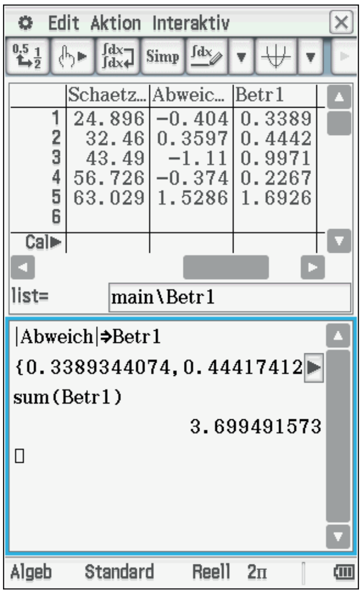


Abb. 11: Summe der Beträge der Abweichungen für „p“

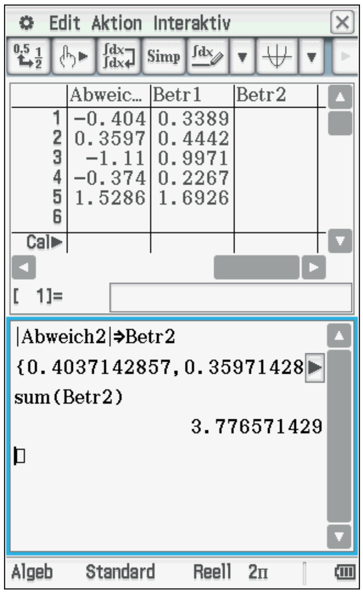


Abb. 12: Summe der Beträge der Abweichungen für „p2“

Vielleicht gibt es noch andere Wege der Annäherung? Eine Möglichkeit ist es, da wir ja an nichtnegativen Werten interessiert sind, mit den Quadraten der Abweichungen zu rechnen. Quadrate sind nichtnegativ. Werte kleiner eins werden als Quadrat noch kleiner und Werte größer eins werden größer als die Grundzahl. Das bedeutet, dass man jetzt auch noch die Fehler gewichtet. Allerdings kann man dann nur die Summe der Abweichungsquadrate vergleichen. Den Befehl für das Quadrieren findet man auf der Gerätetaste ^ gefolgt von einer 2 für „hoch 2“. Der Name für diese Liste ist „Quadr1“, wenn wir mit „p“ die quadratischen Abweichungen betrachten. Für „p“ ergibt sich eine Summe der quadratischen Abweichungen von *4,222* (s. Abb 13). Nun wiederholt man die Rechnung noch einmal für „p2“. Diese Liste heißt dann „Quadr2“. Hier ist die Summe kleiner als zuvor (Abb. 14).

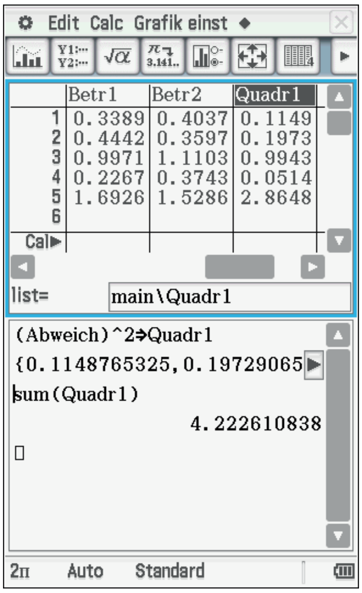


Abb. 13: Summe der Abweichungsquadrate für „p“

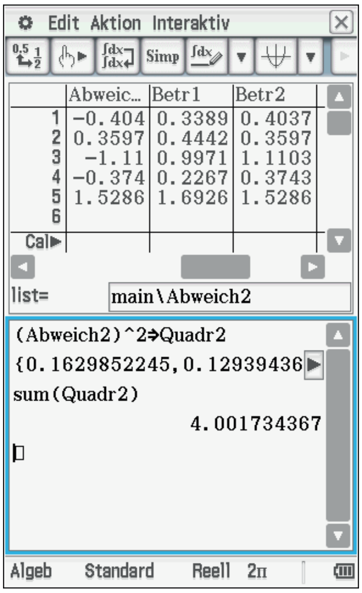
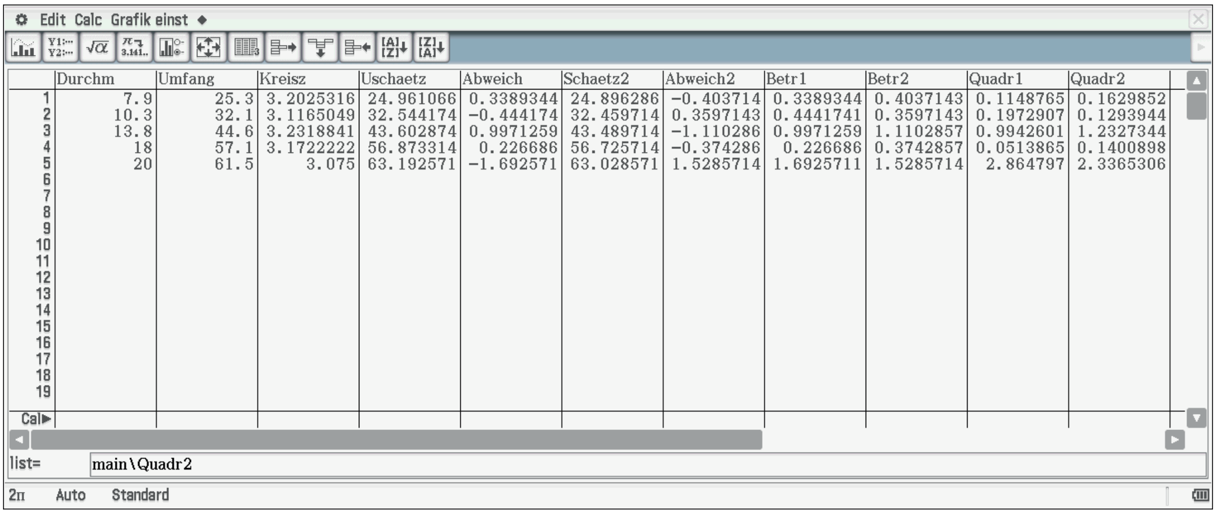


Abb. 14: Summe der Abweichungsquadrate für „p2“



	Durchm	Umfang	Kreisz	Uschaetz	Abweich	Schaetz2	Abweich2	Betr1	Betr2	Quadr1	Quadr2
1	7.9	25.3	3.2025316	24.961066	0.3389344	24.896286	−0.403714	0.3389344	0.4037143	0.1148765	0.1629852
2	10.3	32.1	3.1165049	32.544174	−0.444174	32.459714	0.3597143	0.4441741	0.3597143	0.1972907	0.1293944
3	13.8	44.6	3.2318841	43.602874	0.9971259	43.489714	−1.110286	0.9971259	1.1102857	0.9942601	1.2327344
4	18	57.1	3.1722222	56.873314	0.226686	56.725714	−0.374286	0.226686	0.3742857	0.0513865	0.1400898
5	20	61.5	3.075	63.192571	−1.692571	63.028571	1.5285714	1.6925711	1.5285714	2.864797	2.3365306

Abb. 15: Alle Listen auf einen Blick

Fazit:
Die Werte von „p“ und „p2“ sind je nach Vergleichsmethode für die Schätzung von Umfängen besser oder schlechter. Kann man einen Wert für die Kreiszahl finden, bei der diese Summe besonders klein, also minimal wird? Wie erhält man diese? Man muss eine Reihe von Berechnungen anstellen, die verschiedene Werte der Kreiszahl zum Bestimmen des Schätzumfangs mit den Messwerten vergleicht. Sinnvolle Werte für die Kreiszahl sind Werte in der Nähe von *3,15*.

Für Klasse 6 ist hier eine Grenze erreicht, weil der Termbegriff, die Verwendung von Funktionsterm und Funktionsgraph noch nicht bekannt sind. Man kann nun die anderen Beispiele von dem Schülerarbeitsblatt mit den dargestellten Methoden in Gruppen durcharbeiten lassen, wobei auch noch andere Messdaten verwendet werden können. Mögliche weitere Aufgaben wären: Zusammenhang von Fläche und Einwohnerzahlen von deutschen Städten, Zusammenhang von Preis und Mengen bei Süßigkeiten oder Getränken und vieles mehr, das Schülerinnen und Schüler interessiert.

Lösungshilfen zu Aufgabe 2: DIN-Formate von Heften

Die Schülerinnen und Schüler messen die Länge und die Breite von ihren Schulheften und erstellen eine Liste.

Heft	Länge in mm	Breite in mm
Zeichenblock	418	299
A 4 Heft	295	212
A5 Heft	208	149
A6 Heft	144	106
Vokabelheft	107	72

Die Schülerinnen und Schüler haben im ersten Durchgang wichtige Begriffe erarbeitet und genutzt. Beim zweiten Datensatz werden die Fragen schon spezifischer sein können.

Die Überlegungen aus dem 1. Bespiel werden hier nochmals etwas ausführlicher beschrieben, falls jemand sofort mit diesem Beispiel einsteigen möchte.

Nach Eingabe und graphischer Darstellung der Daten (s. Abb. 16) könnte man einen proportionalen Zusammenhang vermuten, also mit Breite B und Länge L: $B = k \cdot L$ wobei $k < 1$ ist. Ansatz: Man bestimmt eine Größe, die man Schätzfunktion nennt, die man aus Längen und Breiten berechnen kann und bildet die Abweichung des Schätzwerts vom Messwert: $a(x) = \ x \cdot Laenge[1]Breite[1] + \ldots$. Es wird also eine Funktion $a(x)$ definiert. Der Befehl $define$ wird einfach mit der Tastatur geschrieben. Die Listen „Laenge“ und „Breite“ sind Spalten (Vektoren). Man kann auf die einzelnen Werte dieser Listen zugreifen, wenn man die Nummer des Platzes in eckigen Klammern hinter den Namen der Liste schreibt. Laenge[3] bedeutet, dass man die Zahl des dritten Werts der Liste verwenden will, hier die Zahl *208*. So ist der ganze Ausdruck aufgebaut. Wenn man andere Werte in die Listen schreibt, berechnet man die neue Aufgabe, ohne die einzelnen Werte immer neu einzutippen. Der Rechner vereinfacht automatisch den langen Term. Die lange Summendarstellung wird vom Rechner ausmultipliziert, die Ausdrücke werden zusammengefasst und vereinfacht: $a(x) = \ 1172\, x - \ 838$ (s. Abb. 17).

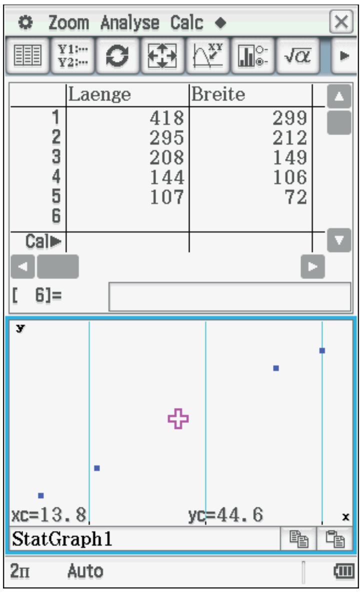


Abb. 16: Die Daten und die Punktwolke

Abb. 17: Abweichung des Schätzwerts vom Messwert

Die Funktion $a(x)$ wird graphisch dargestellt. Für positive Werte von $a(x)$, also Punkte die oberhalb der x-Achse liegen, bedeutet es, dass die Abweichungen größer als Null sind und für Punkte, die unterhalb der x-Achse liegen, dass die Abweichungen negativ sind. Im Schnittpunkt mit der x-Achse sind die Abweichungen Null, diese Nullstelle bestimmt den Wert, bei der die Abweichung am geringsten ist. Die Abweichung ist bei $x = 0{,}715$ minimal, nämlich Null (s. Abb. 18). Die Liste „Abweich“ zeigt aber, dass es negative und positive Abweichungen gibt. Das erklärt, weshalb die Summe nahezu Null ist, obwohl alle Werte Abweichungen haben, die von Null verschieden sind. Die Abweichungen werden in eine Liste eingetragen (s. Abb. 19).

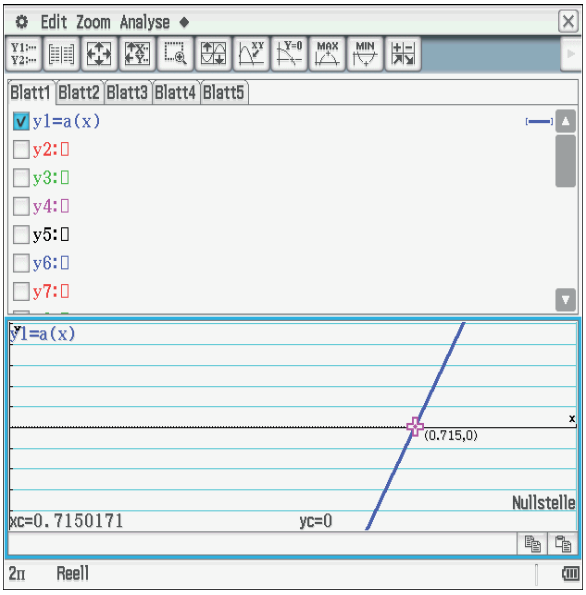


Abb. 18: Schnittpunkt mit der x-Achse

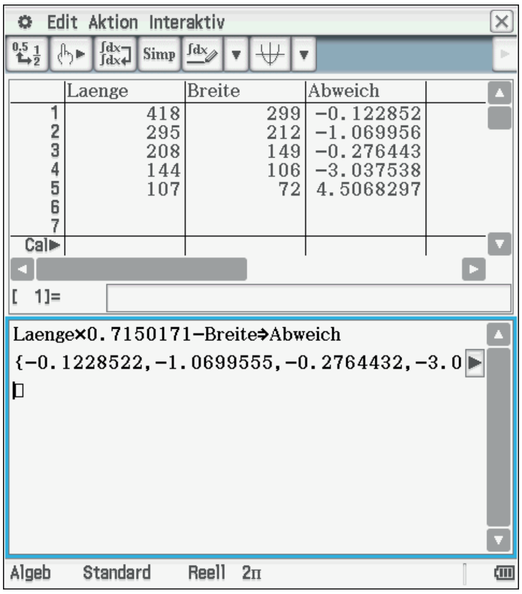


Abb. 19: Liste der Abweichungen

Eine andere Methode, um Abweichungen besser zu erfassen, besteht darin, die Beträge der Abweichungen zu betrachten. Dies ergibt eine abschnittweise lineare Funktion, das Minimum des Graphen liefert den Proportionalitätsfaktor mit der geringsten betragsmäßigen Abweichung (s. Abb. 22). Anstelle der langen Darstellung der Summe kann eine Summenfunktion verwendet werden. Alle Summanden sind ähnlich aufgebaut. Es wird jedes Mal aus den beiden Listen die gleiche Stelle [i] verwendet. Der Befehl wird über Keyboard ⟶ Math2 ⟶ Σ eingegeben.

Das Summenzeichen ist folgendermaßen erklärt:

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5;$$

$$\sum_{i=1}^{5} 3 \cdot i = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5.$$

Die folgenden einfachen Aufgabenbeispiele könnten zum Üben der Summenschreibweise und der Eingabe in den ClassPad dienen: Versuche einmal die ersten zehn natürlichen Zahlen zu addieren: $1 + 2 + \ldots + 10$ (s. Abb. 20). Dann könnte die Gauß-Aufgabe betrachtet werden, bei der die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen berechnet werden soll: $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$. Zudem könnte auch die Summe der ersten n natürlichen Zahlen $1 + 2 + \ldots + n$ berechnet werden (s. Abb. 21).

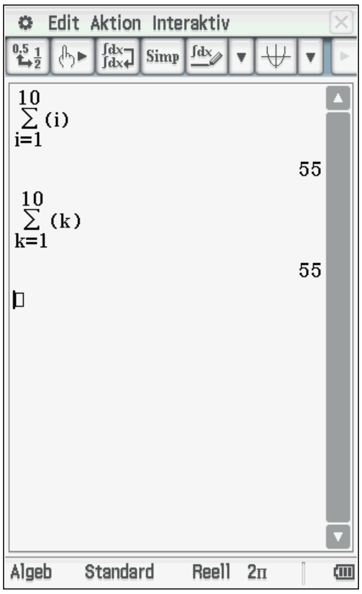


Abb. 20: Eingabe der Summe der ersten zehn natürlichen Zahlen mit Summenzeichen

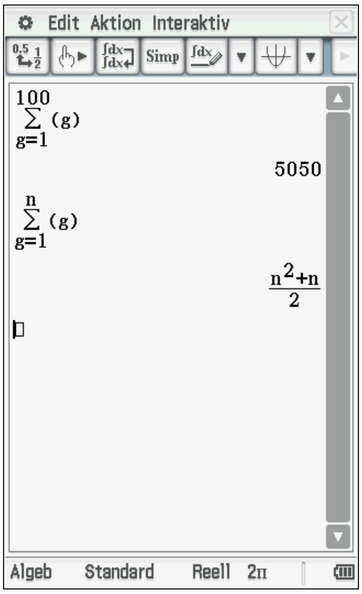


Abb. 21: Eingabe der Summe 1+2+...+99+100

Zurück zu unserer Frage, die Eingabe sieht dann so aus:

$$\sum_{i=1}^{5}(x \cdot Laenge[i] - Breite[i]) = x \cdot Laenge[1] - Breite[1] + x \cdot Laenge[2] - Breite[2] + \cdots$$

Das erspart viel Schreibarbeit. Man fügt jetzt noch den Betrag hinzu. Hier wurde der zweite Faktor x "nach hinten" verlegt. Das Minimum der Betragsabweichungsfunktion liegt bei 0,7163462 (s. Abb. 23).

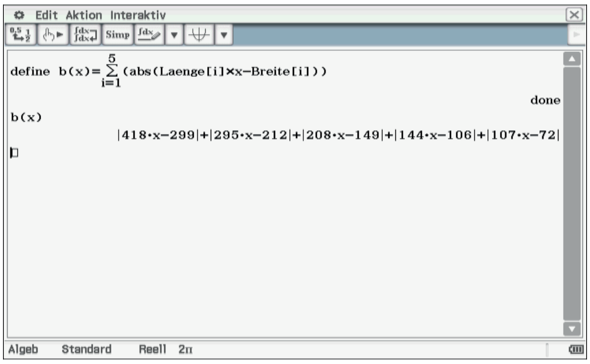


Abb. 22: Die Betragsabweichungsfunktion $b(x)$

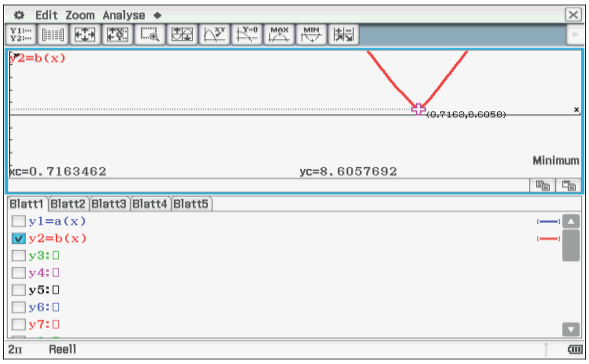


Abb. 23: Der Graph der Betragsabweichungsfunktion $b(x)$

Die Summe der Abweichungen ist 1,5577 (s. Abb. 24).

Eine weitere Methode, um nichtnegative Abweichungen zu erhalten ist, dass man die Abweichungen quadriert und das Minimum dieser Parabeln sucht (s. Abb. 25). Der Proportionalitätsfaktor ist nun 0,716143 (s. Abb. 26). Die Summe der quadratischen Abweichungen ist 1,31 (s. Abb. 27).

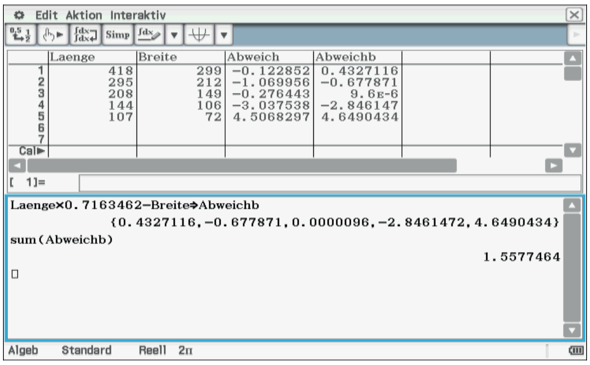


Abb. 24: Summe der Abweichungen

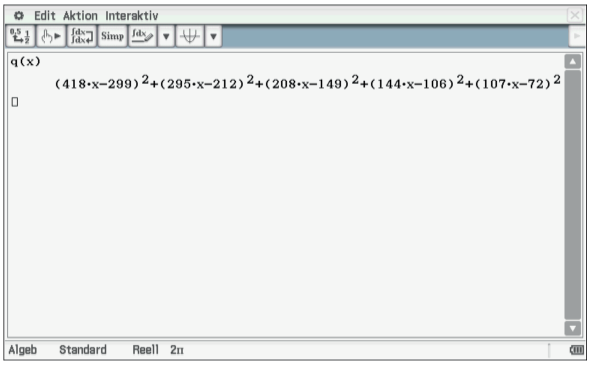


Abb. 25: Die Abstandssumme mit quadratischen Abständen $q(x)$

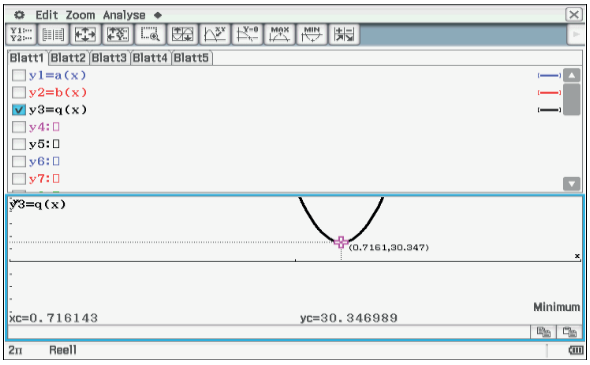


Abb. 26: Graphische Darstellung Abstandsfunktion $q(x)$

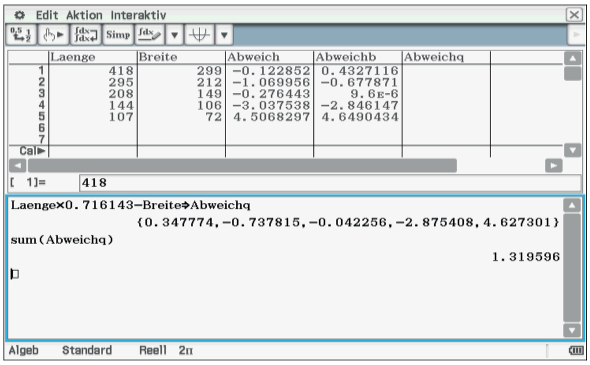


Abb. 27: Die Summe der quadratischen Abweichungen

Betrachten wir die Geraden der Schätzfunktionen in der Punktewolke. Das ist die Gerade zu $y4$, wenn man die Beträge der Abstände wählt (s. Abb. 28). In Abbildung 29 werden die quadratischen Abstände bei $y5$ betrachtet.

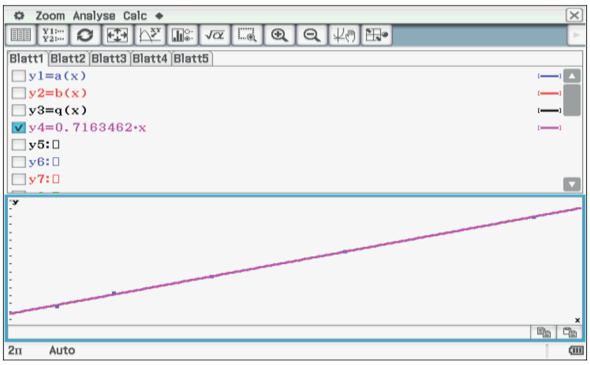


Abb. 28: Graphische Darstellung der Schätzfunktion der Beträge der Abstände

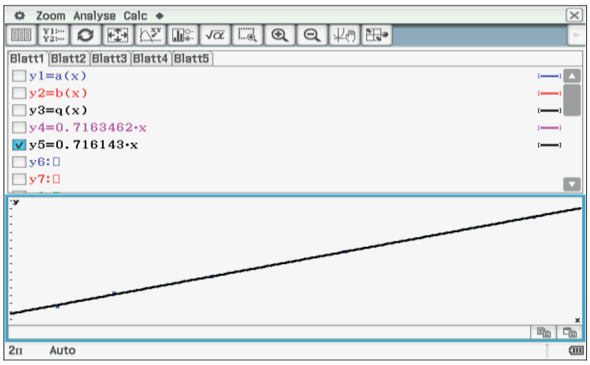


Abb. 29: Graphische Darstellung der Schätzfunktion der quadratischen Abstände

Fazit:
Es ergeben sich für diese Datenpaare keine erkennbaren Unterschiede in den Schätzfunktionen. Am Rande angemerkt: Der Proportionalitätsfaktor ist der Kehrwert von Wurzel 2, $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}70711$.

Lösungshilfen zu Aufgabe 3: Benzinverbrauch eines PKW

Die Schülerinnen und Schüler erhalten eine Seite eines Fahrtenbuches eines Autofahrers für den Monat April. Alternativ werden die Eltern gebeten, Daten der Autofahrten zu notieren, die dann in der Klasse zusammengetragen werden.

Datum	Benzinmenge	Preis	gefahrene Strecke
	Angabe in $Liter$		Angabe in km
05.04.13	45,23	67,80 €	418
08.04.13	52,89	81,93 €	452
15.04.13	35,89	57,39 €	289
15.04.13	49,26	75,35 €	493
16.04.13	22,45	32,93 €	152
22.04.13	59,57	92,27 €	528
30.04.13	42,49	64,97 €	386

Die Vorgehensweise entspricht weitgehend dem zuvor beschriebenen Vorgehen. Zunächst wird der Zusammenhang Menge und Preis untersucht. Es geht um den Preis pro Liter, der für den Monat April im Mittel gezahlt wurde. Es werden Listen erstellt und der Literpreis je Kauf ermittelt, davon wird dann der Mittelwert *mean* berechnet. Er wird verglichen mit dem Mittelwert aus der Summe der Mengen und der Summe der Rechnungsbeträge (s. Abb. 30). Auch hier ergeben sich unterschiedliche Werte, auch wenn sich das erst an der dritten Stelle hinter dem Komma zeigt (s. Abb. 31).

Mit dem Begriff des arithmetischen Mittels kann man zunächst eine Reihe von Fragen klären. Die Quotienten aus Menge und Preis liefern für jede Tankfüllung die Frage des Tagespreises. Dann kann man von diesen Tagespreisen das arithmetische Mittel bilden. Hier $k = 1{,}53162$ €. Liste „LPreis“ ist der Kaufpreis je Tankfüllung, das arithmetische Mittel ist hier $m = 1{,}53561$ €.

Ergibt es einen Unterschied, wenn man zunächst alle Mengen addiert, und alle Preise addiert und dann davon den Quotienten bildet? Hier kann dann der Begriff des gewichteten arithmetischen Mittels angesprochen werden.

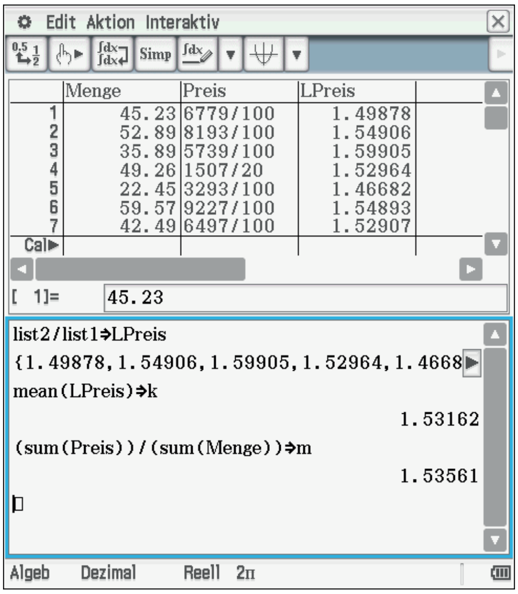


Abb. 30: Erstellung der Listen und Berechnung der Mittelwerte

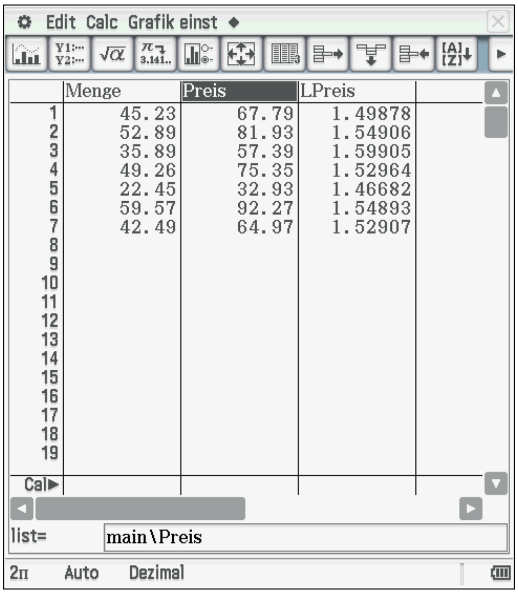


Abb. 31: Darstellung in Dezimalschreibweise

Der Kaufpreis, der sich aus dem mittleren Preis berechnet, der also theoretisch zu zahlen wäre, wird Schätzwert genannt. Der Schätzpreis errechnet sich aus den Mengen und k. Die Liste heißt „schaetzp“ (s. Abb. 32, 34). Der Schätzwert liefert zu den einzelnen Kosten einen Unterschied, nennen wir ihn Abweichung. Ein „guter“ Mittelwert sollte eine kleine Abweichung haben (s. Abb. 33).

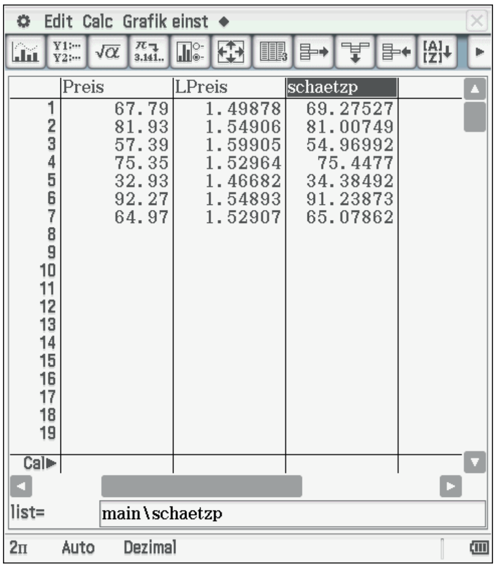


Abb. 32: Schätzpreis

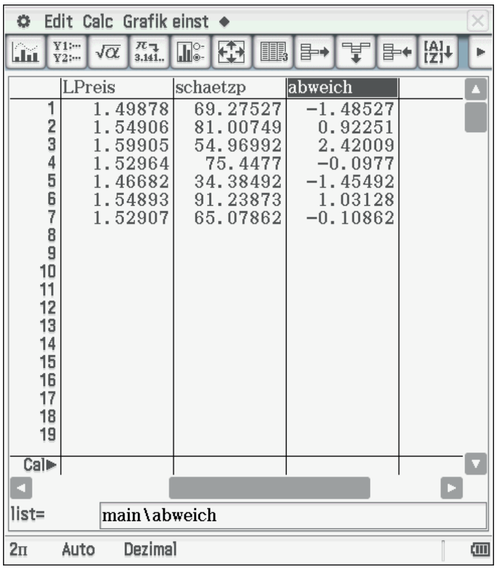


Abb. 33: Abweichung des Schätzpreises zu den einzelnen Kosten

Beurteilt man die Ergebnisse, so sieht man, dass der Wert der Summe der Abweichungen der Einzelpreise vom Schätzwert sehr gering ist. Die Abweichung ist 1,22737, also nicht Null (s. Abb. 34). Wie steht es mit der Abweichung bezogen auf den Mittelwert m? Der Fehler, die Abweichungssumme, ist Null. Die einzelnen Abweichungen schwanken erheblich. Der Mittelwert aus den Summen ist da schon ein sinnvolleres Maß, da die Abweichung nicht Null ist (s. Abb. 35).

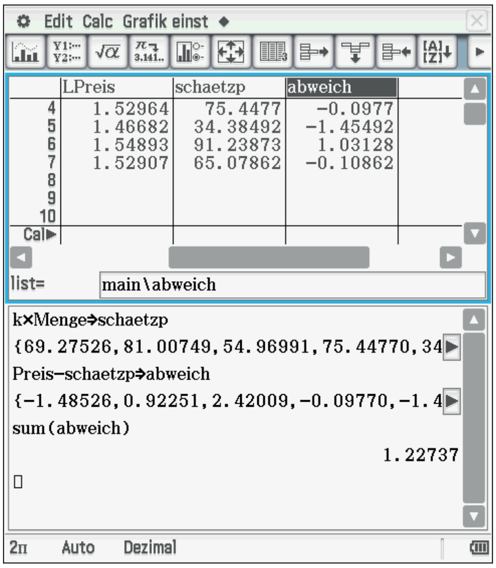


Abb. 34: Summe der Abweichungen der Einzelpreise vom Schätzwert

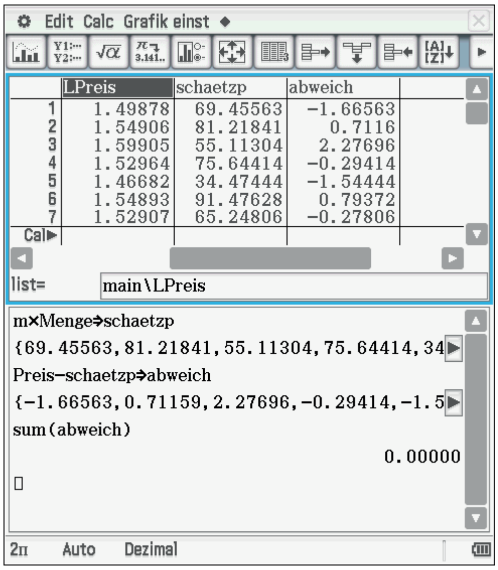


Abb. 35: Summe der Abweichungen des Mittelwerts der Preise vom Schätzwert

Fazit:
Ziel der Untersuchung ist eine Schätzfunktion, die man auch lineare Regression nennt. Man kann sie so bestimmen, dass die Abweichungen der Einzelwerte klein sind. Aber die Abweichungen schwanken in einem großen Intervall. Die Abweichungen sind negative und positive Zahlen, damit lässt sich erklären, dass diese Abweichungssumme den Wert Null annimmt.

Möchte man diesen Mangel beseitigen, kann man die Beträge der Abweichungen addieren, dann sind die Einzelwerte nichtnegativ. Aber diese Summe soll möglichst klein sein, also minimal. Dazu stellt man umfangreiche Berechnungen an. Der unbekannte Wert für das Minimum muss durch systematisches Probieren, also schrittweises Einsetzen von einer Vielzahl von geschätzten Benzinpreisen gefunden werden. Man vergleicht die gefundenen Ergebnisse und sucht nach dem kleinsten Wert der Abweichungssumme. Das ist aber in der Klassenstufe 6 nur sehr eingeschränkt möglich.

Man kann auch den Zusammenhang Fahrstrecke und Benzinmenge untersuchen, dann kommt man auf den Begriff „Verbrauch", genauer „durchschnittlicher Verbrauch" an Benzin auf 100 km Fahrstrecke, so wie in Autowerbungen die Angaben erfolgen. Hier muss man beachten, dass die Werte der ersten Zeile nicht eingebracht werden können, da man die Betrachtung bei einer vollen Tankfüllung beginnt.

Lösungshilfen zu Aufgabe 4: ICE von Hamburg nach München

Die Schülerinnen und Schüler erhalten das Blatt „Ihr Zugbegleiter“ eines ICE: Im Schülergespräch werden Fragen gefunden. Dann wird versucht, den Fragen nachzugehen.

Bahnhof	Zeitdauer in $h{:}min$	Strecke in km
Hamburg-Altona	00:00	0
Hamburg Dammtor	00:08	5
Hamburg Hbf.	00:06	1
Hamburg-Harburg	00:11	12
Lüneburg	00:21	38
Uelzen	00:25	35
Hannover	00:37	95
Göttingen	00:34	99
Kassel-Wilhelmshöhe	00:19	45
Fulda	00:30	90
Würzburg	00:31	93
Nürnberg	00:55	102
Ingolstadt	00:31	90
München Hbf.	00:49	81

Hier können alle bisher verwendeten Methoden eingesetzt werden. Es kann nach der Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen Bahnhöfen gefragt werden. Dabei kann man die Zeiten des Stillstands berücksichtigen oder auch nicht. Es muss entschieden werden, ob man, wie üblich, Kilometer pro Stunde oder besser Kilometer pro Minute verwendet. Man kann die Daten kumulieren und so die zurückgelegte Strecke darstellen, als graphischen Fahrplan. Jeder Teilstrecke entspricht dann ein Kurvenzug.

Nach der Eingabe der Daten in Listen werden die Fahrzeiten addiert, dazu dient der Befehl *cuml*, der über *Aktion*→ *Liste*→ *Berechnung* zu finden ist (s. Abb. 36, 37). Ebenso addiert man alle Teilstrecken zu einer Gesamtstrecke „Gesamt“ (s. Abb. 38). Damit hat man nun auch die Möglichkeit, die Summe aller Daten zu bearbeiten.

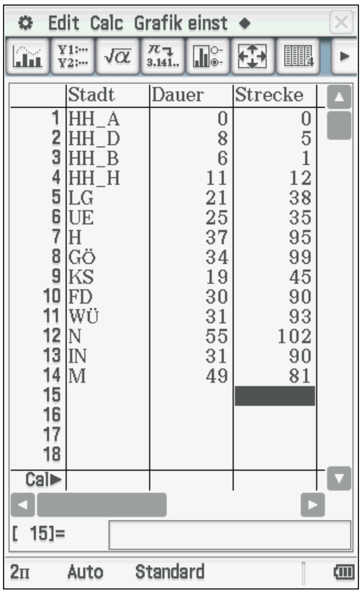


Abb. 36: Die Liste der Daten

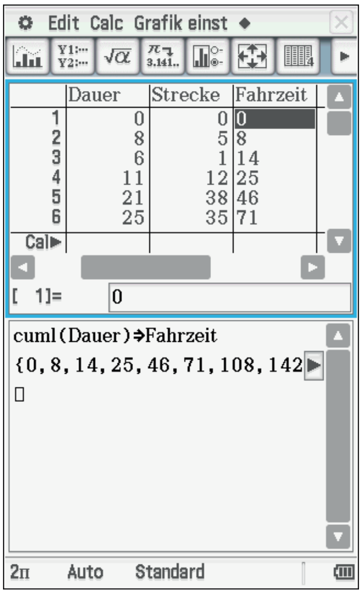


Abb. 37: Die Fahrzeit ohne Wartezeiten zusammengefasst als Fahrzeit

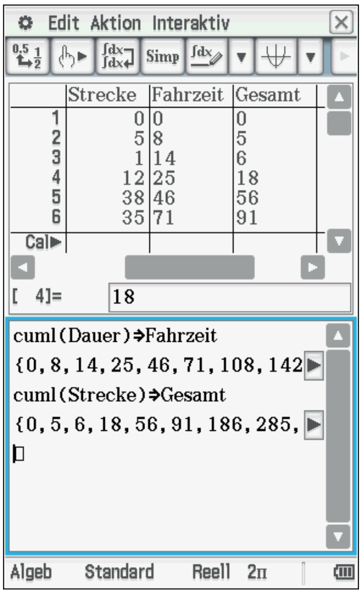


Abb. 38: Alle Listen der Daten

In Abbildung 39 sind die Einstellungen dargestellt, die vorgenommen werden müssen, um die Strecke über der Fahrzeit aufzutragen (s. Abb. 40).

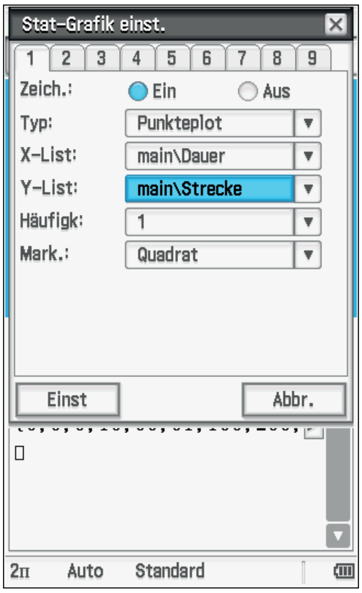


Abb. 39: Die Einstellungen für die Punktewolke Dauer und Strecke

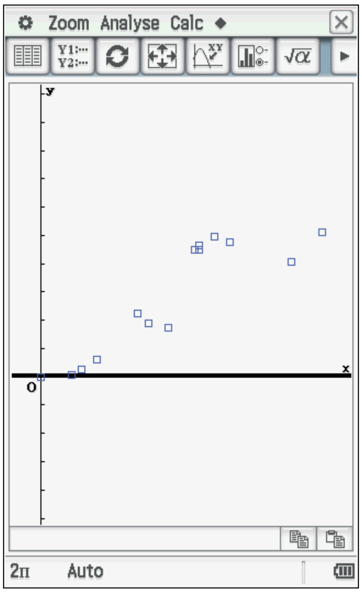


Abb. 40: Die Punktewolke Dauer/ Strecke

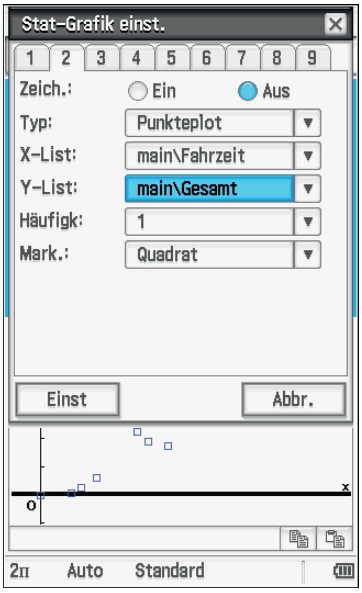


Abb. 41: Die Einstellung von Graph 2

Die Einstellungen für die Graphik der Gesamtstrecke und Fahrzeit sind in Abbildung 41 zu finden. In Abbildung 42 wird die Auswahl des zweiten Graphen gezeigt. Die zugehörige Darstellung der Punktewolke Fahrzeit über Gesamtstrecke zeigt Abbildung 43.

Die beiden Graphen zeigen deutlich, dass eine lineare Schätzfunktion einen Sinn ergibt (s. Abb. 40, 43). Der Proportionalitätsfaktor ist dann die Durchschnittsgeschwindigkeit des ICE.

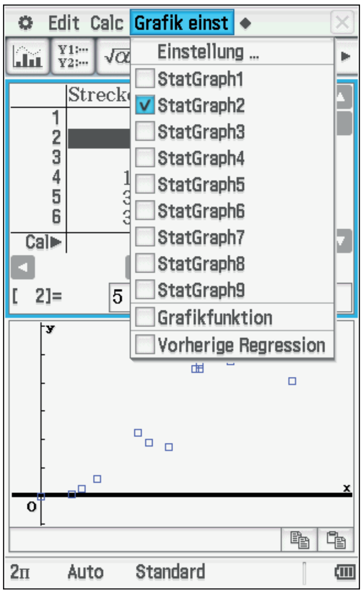


Abb. 42: Auswahl des Graphen 2

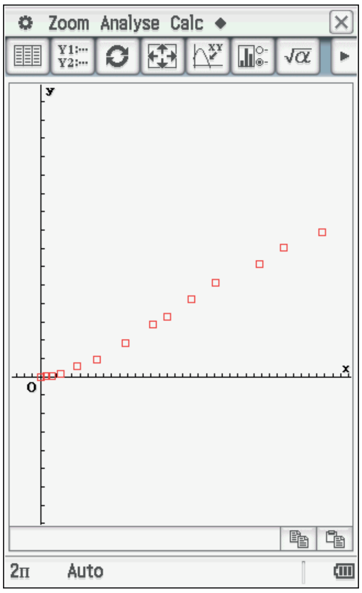


Abb. 43: Die Punktewolke Fahrzeit über Gesamtstrecke

Alle anderen Aufgaben werden analog zu den Aufgaben 1 und 2 bearbeitet.

Anhang:

Theoretische Betrachtung der linearen Regression anhand des Einstiegsbeispiels:
„Für ein Modegeschäft wird in einem Zeitraum die Zahl x der vor dem Schaufenster stehenden Personen und die Zahl y der anschließend das Geschäft betretenden Kunden beobachtet.“

Zahl x der die Auslagen ansehenden Personen	5	7	6	4	5	9
Zahl y der den Laden betretenden Personen	3	5	4	2	4	6

Die gesuchte Gerade hat die Gleichung $y = a + bx$. Die Gerade geht durch den Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, den beiden Mittelwerten der eindimensionalen Datenreihen. Die Daten seien (x_i, y_i).

Dann ist der Flächeninhalt $A_1 = (y_1 - y)^2 = \left(y_1 - (a + bx_1)\right)^2$;

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a + bx_i)\right)^2.$$

Das definiert eine Funktion in zwei Variablen a und b:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a + bx_i)\right)^2.$$

Die Summe aller Flächeninhalte ist dann zu minimieren:

Das Minimum wird ermittelt über die beiden partiellen Ableitungen nach a und nach b.

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \big(y_i - (a + bx_i)\big) \cdot (-1),$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \big(y_i - (a + bx_i)\big) \cdot (-x_i).$$

Beide partielle Ableitungen werden Null gesetzt, das Gleichungssystem wird gelöst und liefert den stationären Punkt, der ein Minimum sein sollte.

$$\left\{\begin{matrix} \sum\limits_{i=1}^{n} 2 \cdot \big(y_i - (a + bx_i)\big) \cdot (-1) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2 \cdot \big(y_i - (a + bx_i)\big) \cdot (-x_i) = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = a \cdot n + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = a + b \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{matrix}\right\}$$

Das führt zur Lösung für b

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_1^2 - \left(\sum_i^n x_i\right)^2} = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Der Zähler ist bis auf einen Faktor die Kovarianz, der Nenner bis auf einen Faktor die Varianz von x.

Der y-Achsenabschnitt wird über die Geradengleichung mit einem bekannten Punkt gefunden.

$$\bar{y} = a + b \cdot \bar{x}$$

führt zu

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}.$$

Die Bedingung für ein Minimum kann man über die bekannte Beziehung der zweiten partiellen Ableitungen durch Einsetzen überprüfen. Damit hat man für die Schätzfunktion eine vollständige Lösung, die Steigung und den y-Achsenabschnitt.

Für beide Berechnungen verwendet man häufig praktische Tabellen als Arbeitshilfe.

Zurück zur Aufgabe:

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i)^2$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
5	3	1	1	1	25	15	1
7	5	-1	-1	1	49	35	1
6	4	0	0	0	36	24	0
4	2	2	2	4	16	8	4
5	4	1	0	1	25	20	0
9	6	-3	-2	9	81	54	6
36	24			16	232	156	12
$\sum x_i$	$\sum y_i$			$\sum(x_i - \bar{x})^2$	$\sum (x_i)^2$	$\sum x_i \cdot y_i$	$\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$

Zur Berechnung von b benötigt man bei der ersten Darstellung die Summen der Spalten 7, 1, 2, 6, das Quadrat der Spaltensumme 1 sowie die Anzahl der Paare n.

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_1^2 - (\sum_i^n x_i)^2};$$

$$b = \frac{6 \cdot 156 - 36 \cdot 24}{6 \cdot 232 - 36^2} = \frac{3}{4}.$$

Für die zweite Darstellung verwenden wir hingegen nur Spaltenwerte aus Spalte 8 und Spalte 5

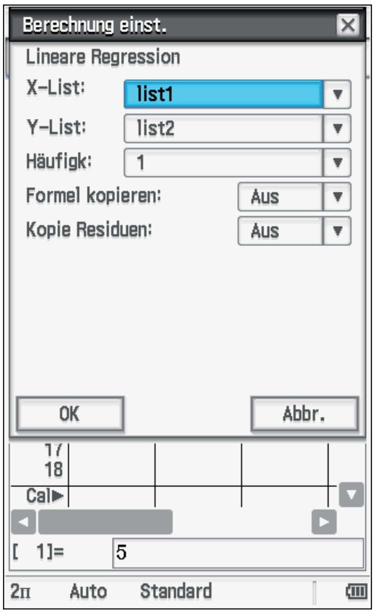
$$b = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

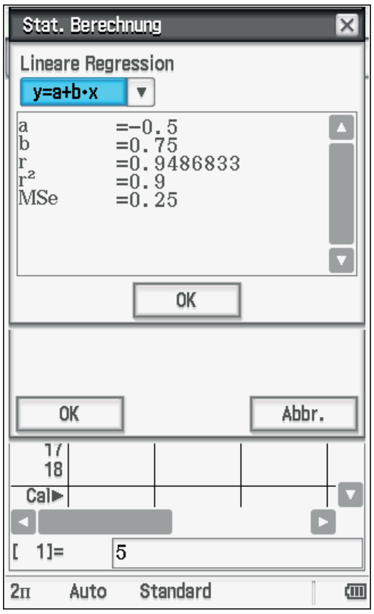
$$b = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

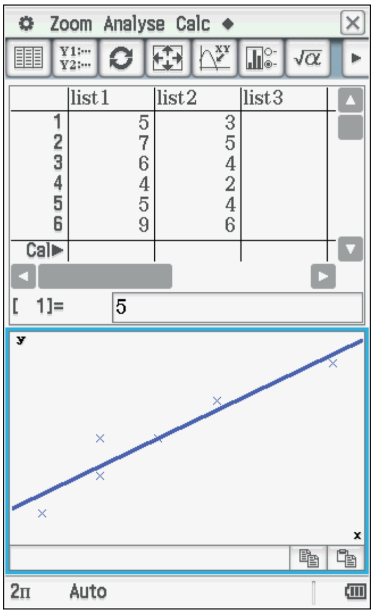
Der y-Achsenabschnitt ist $a = -\frac{1}{2}$ und damit lautet die Gleichung der Schätzfunktion: $y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x$.

Damit ist mit einem Beispiel die Methode der linearen Regression beschrieben. Hier lässt sich zumindest der Steigungsfaktor $\frac{3}{4}$ inhaltlich interpretieren: Wenn vier Personen vor dem Schaufenster stehen, so kamen drei davon in den Laden.

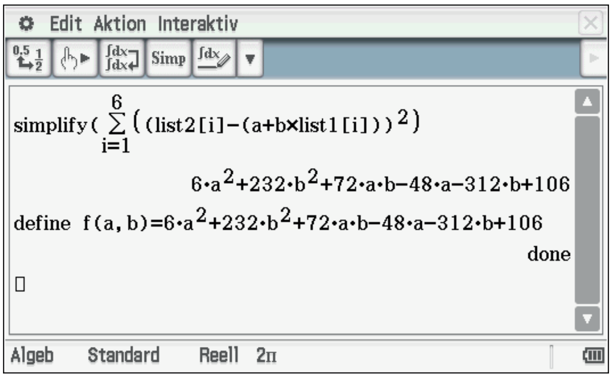
Das Erzeugen der Darstellung erfolgt mit dem ClassPad auf die folgende Weise:

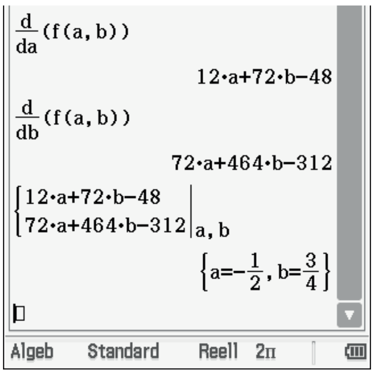






Die Herleitung mit partiellen Ableitungen kann man im konkreten Fall mit dem ClassPad durchführen.





Literatur:

Winter, H. (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 37–46.

Simulation des Ziegenproblems

Jürgen Appel

Kurzfassung des Inhalts:
Es wird beschrieben, wie man mit dem Ziegenproblem in das Thema „Wahrscheinlichkeit“ einsteigen kann. Dabei wird das Ziegenproblem zunächst wie beim Quiz real nachgespielt und dann mit Hilfe des GTR simuliert. Die Daten werden dann mit dem GTR ausgewertet und die Ergebnisse der Simulation mit den anfänglichen Vermutungen der Schülerinnen und Schüler verglichen.

Klassenstufe(n):
Klasse 7 bis 10

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen ...
- erkennen, dass man mit Hilfe von Simulationen Probleme lösen kann;
- lernen, wie man mit Hilfe des GTR Zufallsexperimente simulieren und auswerten kann.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Die Schülerinnen und Schüler hatten noch keine Vorkenntnisse. Sie erwarben sich jedoch bei dieser Simulation folgende Kenntnisse:
- Erzeugung von ganzzahligen Zufallszahlen
- Erzeugung einer Liste im *STAT*-Menü
- Vergleich zweier Listen
- Bildung der Summe von Listeneinträgen
- Erzeugung eines Histogramms
- „Tracen“ auf einem Histogramm, um die Werte ablesen zu können

Zeitbedarf:
Zwei Unterrichtsstunden (jeweils 45 Minuten)

Sonstige Materialien:
- Zwei Ziegen aus Kunststoff und ein Spielzeugauto, um das Spiel, das zum Ziegenproblem führte, vorführen zu können.
- Einige 5-Cent-Münzen und 10-Cent-Münzen, sowie einige kleine Schachteln, damit die Schülerinnen und Schüler in Gruppen das Spiel (ohne GTR) simulieren können.

Begleittext

Das Ziegenproblem erhielt im Jahr 1990 weltweit, und nicht nur unter Mathematikern, große Aufmerksamkeit. Fast in allen Medien wurde über dieses Problem und dessen Lösung kontrovers diskutiert. Dies lag vor allem auch daran, dass die Aufgabenstellung zwar schnell verständlich ist, die Aufgabe aber oft intuitiv falsch gelöst wird.

In der Unterrichtseinheit wird beschrieben, wie man mit dem Ziegenproblem in das Thema „Wahrscheinlichkeit" einsteigen könnte. Zum einen ist die Aufgabenstellung von den Schülerinnen und Schülern schnell zu erfassen, und zum anderen ist die Lösung für viele Schülerinnen und Schüler überraschend. Es besteht Raum zum Aufstellen von Vermutungen und Einfordern von Begründungen. Insbesondere ist es eine Lösungsstrategie das Quiz nachzuspielen bzw. zu simulieren. Man wird am Anfang das Quiz zunächst real nachspielen, damit die Schülerinnen und Schüler die Situation besser durchdringen können. Um eine genügend große Anzahl von Spielen zu erhalten, bietet sich dann eine Simulation mit dem GTR an. Dies müssen die Schülerinnen und Schüler natürlich zuerst lernen, aber da bei dieser Aufgabenstellung die Motivation im Allgemeinen sehr hoch ist, lassen sich die Schülerinnen und Schüler gerne darauf ein.

Aufgabenstellung

Bei einer Quiz-Show kann man ein Auto gewinnen. Die Spielregeln für das Quiz sind folgende:

- Es gibt drei verschlossene Tore. Hinter zwei Toren befindet sich jeweils eine Ziege und hinter einem Tor ein Auto.
- Der Quizmaster weiß, hinter welchem Tor sich das Auto befindet.
- Der Kandidat muss sich für ein Tor entscheiden (das jedoch nicht sofort geöffnet wird).
- Nachdem sich der Kandidat für ein Tor entschieden hat, öffnet der Quizmaster eines der beiden Tore, die der Kandidat nicht ausgewählt hat und hinter dem sich eine Ziege befindet.
- Anschließend fragt er den Kandidaten: Bleiben Sie bei Ihrer Wahl, oder wollen Sie das Tor wechseln?
- Befindet sich hinter dem geöffneten Tor das Auto, so gehört es ihm.

Wie soll sich der Kandidat entscheiden, damit seine Gewinnchancen steigen?
Soll er bei seiner ersten Wahl bleiben oder soll er das Tor wechseln?
Oder ist es gleichgültig, ob er wechselt oder nicht?

Bezug zu den KMK-Standards

In der Leitidee L5 „Daten und Zufall" findet man:

- Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.
- Außerdem werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K2) „Probleme mathematisch lösen", (K3) „Mathematisch modellieren" und (K5) „Mathematische Werkzeuge sinnvoll einsetzen" durch die vorliegende Simulation angesprochen.

Methodische Hinweise

Zum Einstieg in das Thema Wahrscheinlichkeit wurde mit dem Ziegenproblem bewusst ein Beispiel gewählt, bei dem die Lösung intuitiv – zunächst – schwer zu verstehen ist. Die üblichen Einstiegsbeispiele wie z. B. Würfeln mit einem Würfel sind für die Schülerinnen und Schüler nicht wirklich motivierend, da die Lösung quasi auf der Hand liegt.

Beim Ziegenproblem ist zum einen die Aufgabenstellung von den Schülerinnen und Schüler schnell zu erfassen, zum anderen ist kaum einer Schülerin bzw. einem Schüler die Antwort intuitiv einsichtig. Das Beispiel regt somit zum Nachdenken und Diskutieren an und soll für den weiteren Unterrichtsgang (Festlegung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“ usw.) motivieren.

Es ist auch von Vorteil, wenn man das Spiel konkret vorführt oder real durchspielen lässt. Dazu kann man z. B. zwei Ziegen aus Plastik und ein Spielzeugauto unter drei Schachteln (Toren) verstecken. Nachdem die Aufgabenstellung verstanden ist, sollte man den Schülerinnen und Schülern zunächst genügend Zeit geben, um eine Entscheidung zu treffen.

Um anschließend das Stimmungsbild innerhalb der Klasse zu erfassen, lässt man die Schülerinnen und Schüler entweder abstimmen oder man wählt z. B. (im Sinne von „bewegter Schule“) die Methode 1, 2 oder 3. Bei dieser Methode begeben sich die Schülerinnen und Schüler, je nachdem für welche der drei Antwortmöglichkeiten sie sich entscheiden, in eine von drei Ecken des Klassenzimmers. Die Schülerinnen und Schüler stimmen sozusagen mit den Füßen ab. Wenn sich alle in der von ihnen gewählten Ecke befinden, werden einzelne Schülerinnen und Schüler gefragt, warum sie sich für diese Ecke entschieden haben.

Bevor man das Ziegenproblem mit Hilfe des GTR simulieren kann, sollte man auch die Schülerinnen und Schüler das Spiel z. B. in Dreiergruppen eine Zeit lang spielen lassen. Wenn man die Gruppen entsprechend instruiert, kann man hier auch schon eine gewisse „Simulation von Hand“ durchführen lassen. So erhalten die Schülerinnen und Schüler einen ersten Hinweis zur Lösung des Problems.

Außerdem wird den Schülerinnen und Schülern dadurch die prinzipielle Vorgangsweise für die folgende Simulation mit dem GTR verständlicher. Nach dieser Simulation in Gruppen sollte man noch kurz darauf eingehen, dass man auf Basis der doch recht wenigen Simulationen noch keine relativ sichere Aussage machen kann.

Da die Schülerinnen und Schüler zum ersten Mal mit dem GTR simulieren, muss man hier im Plenum sowohl die mathematischen Aspekte der Simulation, als auch die Syntax für den GTR erläutern.

Voraussetzungen bezüglich des GTR

Die Klasse hatte den GTR erst seit wenigen Wochen und konnte bisher lediglich im *RUN*-Menü Berechnungen durchführen. Durch die Simulation des Ziegenproblems lernten die Schülerinnen und Schüler das *STAT*-Menü und den Zufallsgenerator kennen.

Zeitbedarf

Das Ziegenproblem wurde in zwei Unterrichtsstunden (Einzelstunden) behandelt.

Zur Rolle des GTR

Der GTR wurde hier sowohl zum „Beschleunigen“ des Unterrichts als auch zum Erzeugen und Auswerten von Datensätzen verwendet (man erhält in kurzer Zeit eine große Anzahl von Simulationsergebnissen). Zudem kommt hier der GTR als Experimentiergerät zum Einsatz.

Ohne GTR-Einsatz wäre diese Aufgabe mit dem bisherigen Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler nicht lösbar. Die Idee durch hinreichend viele Simulationsergebnisse der Wahrscheinlichkeit in den drei Fällen schon recht nahe zu kommen, ist bereits ein Schritt zum Verständnis des „Gesetzes der großen Zahlen“.

Durchführung

In der ersten der beiden Unterrichtsstunden wurde zunächst das Ziegenproblem mit Hilfe zweier Ziegen aus Plastik und einem Spielzeugauto vom Lehrer handlungsorientiert eingeführt. Dabei spielte eine Schülerin die Kandidatin.

Anschließend wurde den Schülerinnen und Schülern das Schülerblatt ausgeteilt und sie bekamen fünf Minuten Zeit alleine oder zu zweit eine Entscheidung zu treffen.

Danach wurden die Abstimmungsergebnisse mit Hilfe der Methode 1,2 oder 3 erfasst. 15 der 18 Schülerinnen und Schüler gingen in die dritte Ecke („Es ist egal, wie er sich entscheidet“) die restlichen drei Schülerinnen bzw. Schüler gingen in die erste Ecke („Bei seiner Wahl bleiben“). Keine Schülerin bzw. kein Schüler ging in die zweite Ecke.

Bei der Befragung zweier Schülerinnen bzw. Schüler aus der dritten Ecke kam sofort das Argument, dass hinter einer der beiden noch geschlossenen Türen ja das Auto stehen muss und daher die Chance 50:50 wäre. Diese Schülerinnen und Schüler haben also, ohne die Regel von Laplace explizit zu kennen, intuitiv eine Wahrscheinlichkeitsaussage (50 %) getroffen, die auf der Regel von Laplace beruht (diese Regel ist bei den Schülerinnen und Schülern intuitiv angelegt). Aus der ersten Ecke wurden ebenfalls zwei Schülerinnen bzw. Schüler befragt. Sie gaben lediglich an, dass sie es vorziehen ihrer Wahl „treu“ zu bleiben. Eine mathematische Begründung wurde nicht geliefert, sondern eher eine Art „Bauchgefühl“ genannt.

Dann wurde die Klasse in sechs Dreiergruppen eingeteilt, um das Spiel zu spielen. Damit man auch gleichzeitig schon real simuliert, bekamen die Gruppen folgende Aufträge:

- Gruppe 1 und Gruppe 2: Der Kandidat muss immer bei seiner Wahl bleiben (Fall 1).
- Gruppe 3 und Gruppe 4: Der Kandidat muss immer das Tor wechseln (Fall 2).
- Gruppe 5 und Gruppe 6: Der Kandidat entscheidet durch einen Münzwurf, ob er wechselt oder nicht (Fall 3).

In jeder Gruppe sollte das Spiel zehnmal gespielt werden. Dabei war eine Schülerin bzw. ein Schüler der Quizmaster, eine Schülerin bzw. Schüler der Kandidat und eine Schülerin oder ein Schüler hielt die Ergebnisse (Kandidat gewinnt oder verliert) auf einem Blatt

Papier fest. Die Schülerinnen und Schüler spielten das Spiel mit zwei 5 Cent-Münzen (Ziegen) und einer 10 Cent-Münze (Auto). Jeder Gruppe wurden drei kleine Schachteln zum Verdecken der Münzen ausgeteilt.

Am Ende der Unterrichtsstunde wurden noch die Ergebnisse der drei Fälle zusammengefasst und aufgeschrieben.

Folgende Ergebnisse wurden erzielt:
- Fall 1: Der Kandidat hat 8 Spiele gewonnen und 12 Mal verloren.
- Fall 2: Der Kandidat hat 13 Spiele gewonnen und 7 Mal verloren.
- Fall 3: Der Kandidat hat 11 Spiele gewonnen und 9 Mal verloren.

Diese Ergebnisse hatten die Schülerinnen und Schüler erstaunt und sie waren schon gespannt, welche Ergebnisse wir wohl am nächsten Tag bei der Simulation mit dem GTR erhalten würden.

Zu Beginn der zweiten Unterrichtsstunde wurden kurz nochmals die Ergebnisse vom Vortag in Erinnerung gerufen. Danach zeigte die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern im *RUN*-Menü wie man ganzzahlige Zufallszahlen erzeugt. Dabei wurde ein Bild des Displays des GTR mittels Beamer an die Wand projiziert, damit die Schülerinnen und Schüler die Vorgehensweise besser nachvollziehen konnten.

Dann wurde den Schülerinnen und Schülern gezeigt wie man im *STAT*-Menü eine Liste mit 250 ganzzahligen Zufallszahlen (1, 2 bzw. 3) erzeugt. Nachdem jede Schülerin bzw. jeder Schüler zwei solche Listen mit dem GTR erzeugt hatte, wurde festgelegt, dass in der ersten Liste jeweils die Tornummer steht, hinter der sich das Auto befindet. In der zweiten Liste steht die Tornummer, auf die der Kandidat gesetzt hatte.

Anschließend wurde in einem kurzen Unterrichtsgespräch die Auswertung der Simulation besprochen. Dazu wurden die jeweiligen Listeneinträge verglichen und das Ergebnis dieses Vergleichs in einer dritten Liste festgehalten. In dieser Liste stand eine Eins, falls die beiden Listeneinträge übereinstimmten, anderenfalls eine Null. Um die Häufigkeit der Einträge dieser dritten Liste schnell zu erhalten, wurde den Schülerinnen und Schülern erläutert, wie man ein Histogramm dieser Liste erzeugt (s. Lösungsvorschlag).

Die Schülerinnen und Schüler haben schnell erkannt, dass der Kandidat zwei Möglichkeiten hat zu gewinnen: Wenn er bei seiner Wahl bleibt (Fall 1), gewinnt er genau dann, wenn eine Eins in der dritten Liste steht. Wenn er das Tor wechselt (Fall 2), gewinnt er genau dann, wenn in der dritten Liste eine Null steht. Man kann also die Fälle 1 und 2 gemeinsam auswerten.

Nachdem alle Schülerinnen und Schüler die Zahlen ihrem Histogramm entnommen hatten, wurden alle Ergebnisse der Klasse zusammengefasst. Somit wurde das Spiel insgesamt 4 500 Mal simuliert.

Schülerin/Schüler	Im Fall 1	Im Fall 2
1	82	168
2	86	164
3	77	173
4	83	167
5	87	163
6	85	165
7	77	173
8	81	169
9	93	157
Summe	751	1499

Schülerin/Schüler	Im Fall 1	Im Fall 2
10	79	171
11	75	175
12	81	169
13	85	165
14	79	171
15	97	153
16	81	169
17	88	162
18	76	174
Summe	741	1509

Gesamtergebnis:

Gewonnen im Fall 1: 1 492 **Gewonnen im Fall 2: 3 008**

Theoretischer Erwartungswert bei 4 500 Simulationen:

Gewonnen im Fall 1: 1 500 **Gewonnen im Fall 2: 3 000**

Die Schülerinnen und Schüler waren erstaunt, was für einen Unterschied es macht, ob man das Tor wechselt oder nicht.

Danach wurde noch der Fall 3 simuliert. Dazu musste eine vierte Liste, in der der Münzwurf simuliert wird, erzeugt werden. In dieser Liste stand eine Null für „der Kandidat bleibt bei seiner Wahl“ und eine Eins für „der Kandidat wechselt das Tor“. Jetzt mussten nur noch die Einträge aus der dritten und der vierten Liste jeweils miteinander verglichen werden. Genau dann, wenn beide Einträge übereinstimmen hat der Kandidat gewonnen. Das Ergebnis des Vergleichs wurde erneut in einer fünften Liste festgehalten.

Schülerin/Schüler	gewonnen	verloren
1	125	125
2	120	130
3	131	119
4	125	125
5	119	131
6	128	122
7	126	124
8	134	116
Summe	1013	987

Schülerin/Schüler	gewonnen	verloren
9	130	120
10	114	136
11	125	125
12	120	130
13	134	116
14	125	125
15	127	123
16	114	136
Summe	989	1011

Die Schülerinnen und Schüler erzeugten ein Histogramm (s. Lösungsvorschlag) von dieser fünften Liste und konnten so ablesen, wie oft der Kandidat gewonnen bzw. verloren hatte. Die Ergebnisse dieser 4 000 Simulationen wurden wieder im Plenum zusammengefasst.

Gesamtergebnis im Fall 3:

Gewonnen: 2 002 **Verloren: 1 998**

Theoretischer Erwartungswert bei 4 000 Simulationen im Fall 3:

Gewonnen: 2 000 **Verloren: 2 000**

Die Schülerinnen und Schüler hatten am Ende der Stunde erkannt,

- dass sich ein Torwechsel beim Ziegenproblem lohnt;
- dass die einzelnen Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler teilweise erheblich voneinander abwichen;
- dass man nur bei einer großen Anzahl von Simulationen verlässliche Aussagen erhält.

Abschließend bleibt anzumerken, dass man später, nachdem die Regel von Laplace bekannt ist, die Fälle 1 und 2 auch ohne Simulation nachvollziehen kann. Um im Fall 3 die Wahrscheinlichkeit berechnen zu können, muss man warten, bis man die Pfadregel zur Verfügung hat.

Mathematematik Klasse 7 (AP)

Das Ziegenproblem

Bei einer Quiz-Show kann man ein Auto gewinnen. Die Spielregeln für das Quiz sind folgende:

Es gibt drei verschlossene Tore. Hinter zwei der Tore befindet sich jeweils eine Ziege und hinter einem der Tore ein Auto. Zum Beispiel wie abgebildet:

Tor 1 **Tor 2** **Tor 3**

- Der Quizmaster weiß, hinter welchem Tor sich das Auto befindet.
- Der Kandidat muss sich für ein Tor entscheiden (das jedoch nicht sofort geöffnet wird).
- Nachdem sich der Kandidat für ein Tor entschieden hat, öffnet der Quizmaster eines der beiden Tore, die der Kandidat nicht ausgewählt hat und hinter dem sich eine Ziege befindet. (Ein solches Tor gibt es immer!)
- Anschließend fragt er den Kandidaten: Bleiben Sie bei Ihrer Wahl, oder wollen Sie das Tor wechseln?
- Befindet sich hinter dem geöffneten Tor das Auto, so gehört es ihm.

Wie soll sich der Kandidat entscheiden, damit seine Gewinnchancen steigen?

Soll er …

☐ **bei seiner alten Wahl bleiben?**

☐ **das Tor wechseln?**

☐ **Es ist egal, wie er sich entscheidet.**

Versuche deine Entscheidung zu begründen!

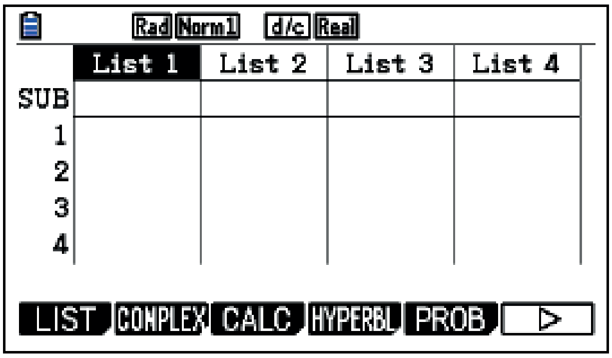
Lösungsvorschlag: Simulation im Statistik-Menü

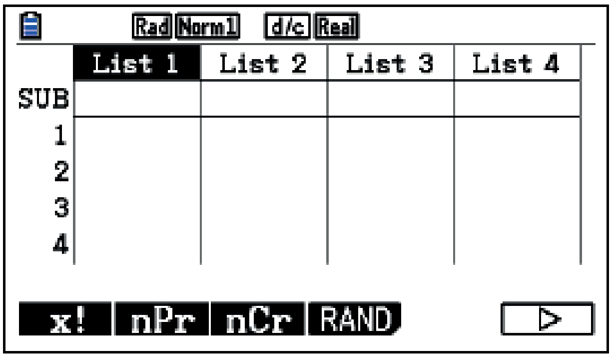
Fall 1 und Fall 2

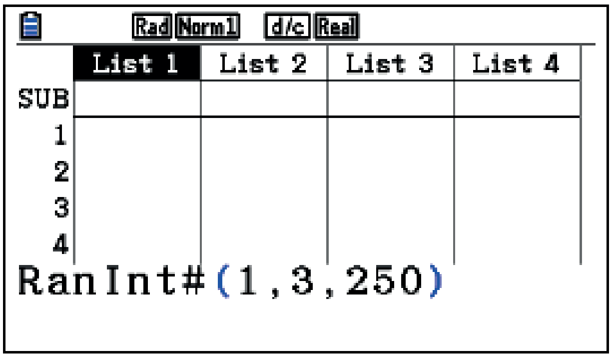
1) Im *STAT*-Menü wird eine Liste mit Hilfe des *Ranint#*-Befehls erzeugt. Dadurch entsteht eine Liste 1 mit den Zufallsziffern 1, 2 oder 3. Diese Liste umfasst 250 Werte.

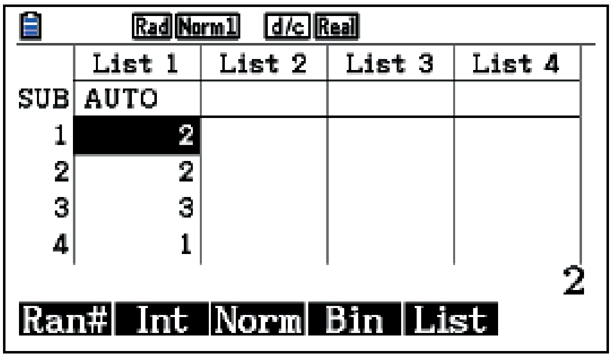
   Syntax: iy(PROB)r(RAND)w(Int)

   Liste 1 zeigt an: „Hinter welchem Tor steht das Auto?“



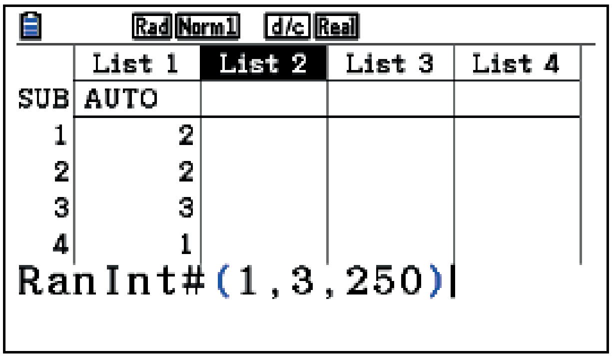


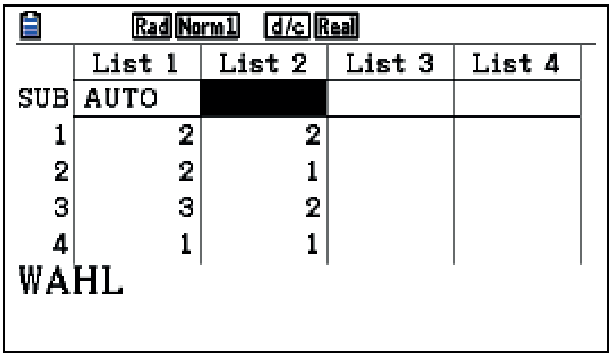




2) Danach legt man analog eine zweite solche Liste an.

   Liste 2 zeigt an: „Welches Tor wählt der Kandidat zunächst aus?“

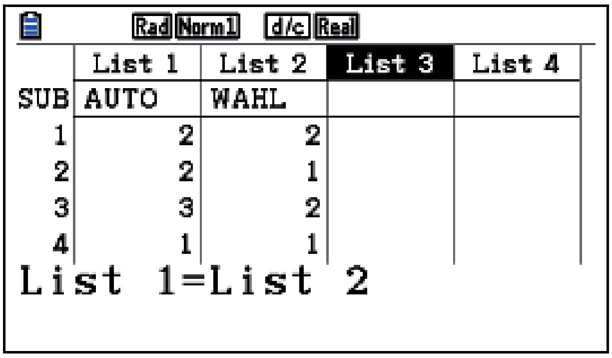


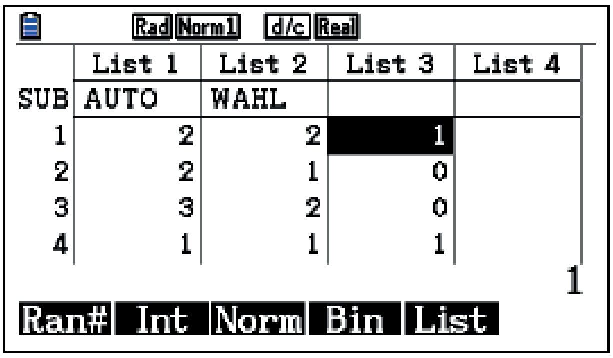


Tipp: Damit man sich leichter merken kann in welcher Liste was steht, kann man die Listen z. B. mit Hilfe der „subtitle“ AUTO und WAHL kennzeichnen.

3) Dann werden die beiden Listen 1 und 2 miteinander verglichen, indem man in die Liste 3 eingibt: *List 1 = List 2*

   In der Liste 3 steht genau dann eine 1, falls in der Liste 1 der gleiche Eintrag wie in Liste 2 steht. Ansonsten steht in Liste 3 eine 0.

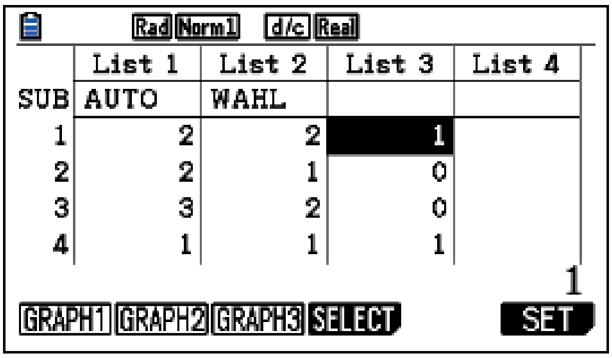


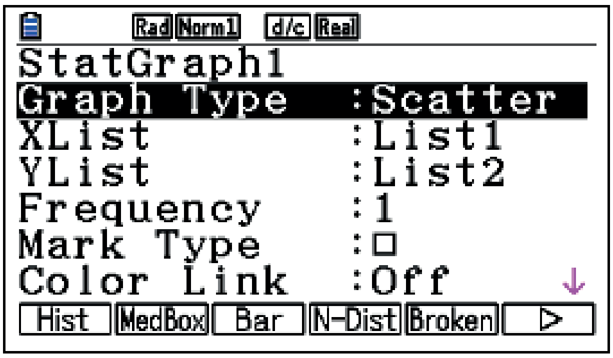


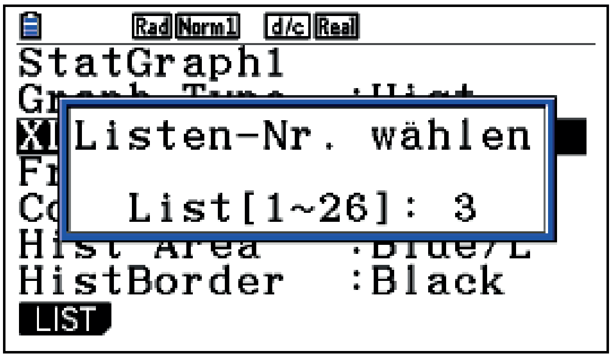
4) Demnach bedeutet nur der Eintrag 1, dass der Kandidat zu Beginn das richtige Tor ausgewählt hat.
   - ➢ Wenn der Kandidat also bei seiner Wahl bleibt (Fall 1), gewinnt er nur, falls eine 1 in der Liste 3 steht.
   - ➢ Wenn der Kandidat also das Tor wechselt (Fall 2), gewinnt er, falls in der Liste 3 eine 0 steht.

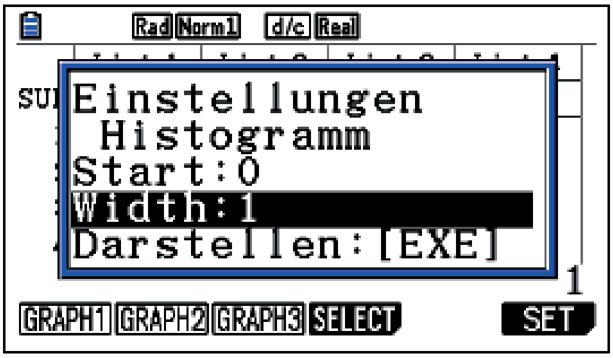
5) Um die Anzahl der verschiedenen Einträge zu bestimmen wird entweder die Summe der Listeneinträge von Liste 3 gebildet oder ein Histogramm erzeugt. Denn die Summe ergibt genau die Anzahl der Einser in Liste 3.

   Den *Graphiktyp Histogramm* kann man im *Graphik Set* einstellen. Man gelangt mit der Tastenkombination **q(GRPH)u(SET)** zum *Graphik Set*. Dort wählt man dann mit **u(▷)q(Hist)** den *Graphiktyp Histogramm* aus.



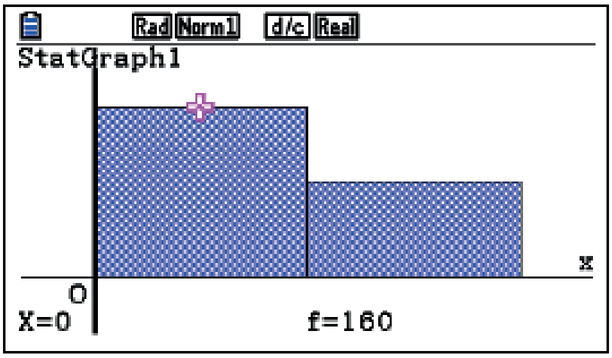


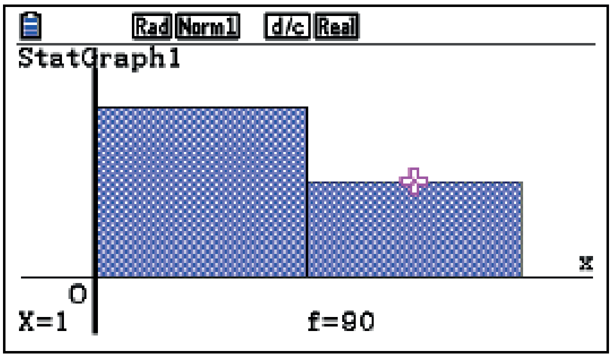




Tipp: Damit das *Histogramm* in Einerschritten durchlaufen werden kann, gibt man bei *Width* den Wert 1 ein.

Die Anzahlen kann man durch „Tracen“ **(Lq)** auf dem Histogramm leicht ablesen.



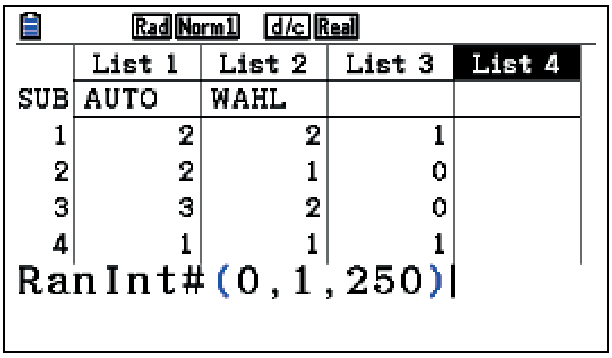


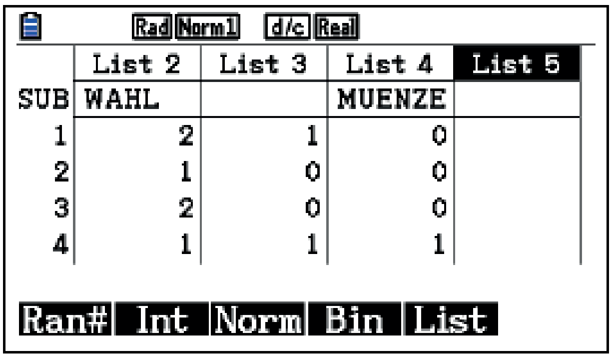
Fall 3

1) Analog wie in den Fällen 1 und 2 werden zunächst die beiden Listen 1 (AUTO) und 2 (WAHL) mit Zufallszahlen gebildet.

2) Danach werden die Listeneinträge der Listen 1 und 2 miteinander verglichen. Die Ergebnisse stehen in Liste 3 (siehe Fall 1 und 2).

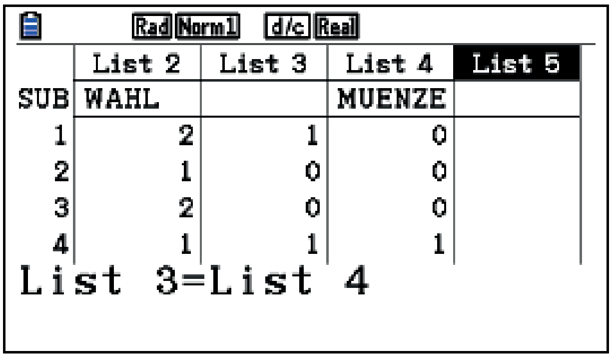
3) Anschließend wird eine weitere Liste mit Zufallszahlen erzeugt, um den Münzwurf zu simulieren, mit dessen Hilfe der Kandidat entscheidet, ob er bei seiner Wahl bleibt oder wechselt.

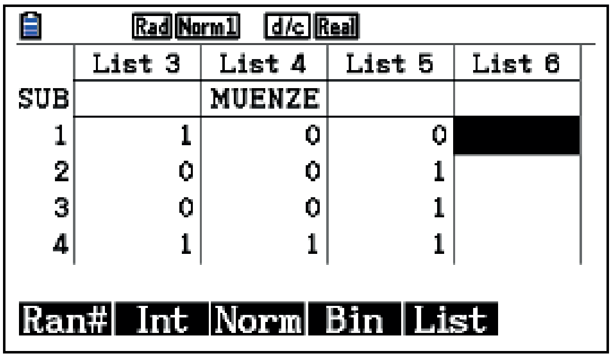




Die Liste 4 enthält 250 Zufallszahlen, wobei 1 bedeutet der Kandidat bleibt bei seiner Wahl und 0 bedeutet, dass er wechselt.

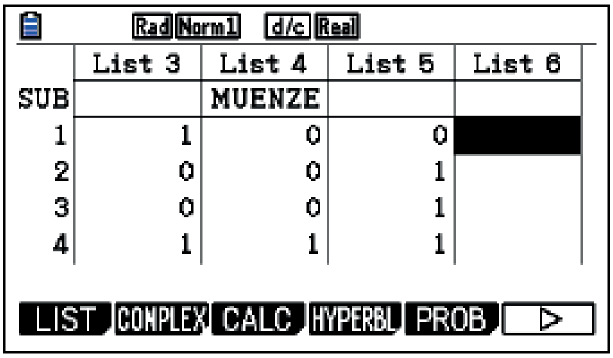
4) In Liste 5 vergleicht man dann die Einträge der Listen 3 und 4. Sind die beiden Einträge gleich, dann gewinnt der Kandidat das Auto. Anderenfalls verliert er. Somit gewinnt der Kandidat genau dann, wenn in der Liste 5 eine 1 steht.

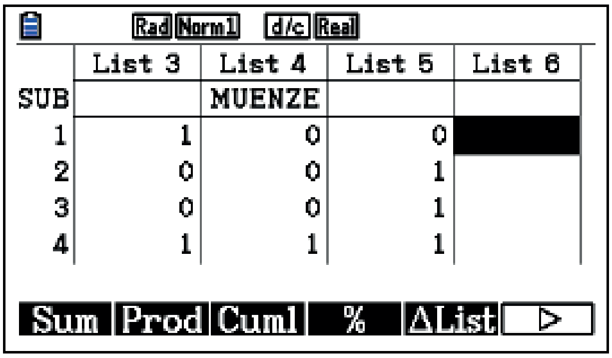


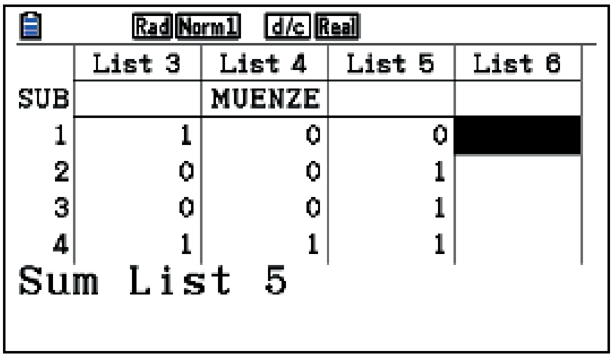


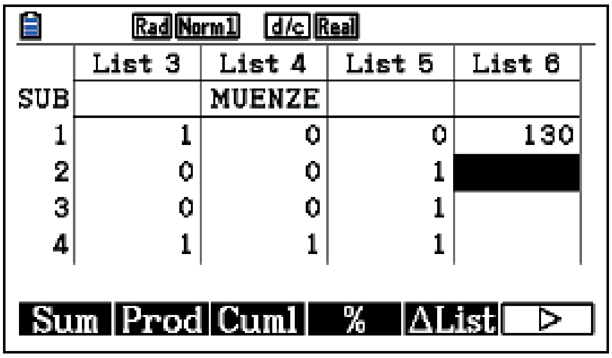
5) Um die Anzahl der verschiedenen Einträge zu bestimmen wird entweder die Summe der Listeneinträge von Liste 5 gebildet oder ein *Histogramm* erzeugt. Denn die Summe ergibt genau die Anzahl der Einser in Liste 5.

Syntax für die Summe der Listeneinträge: iq(LIST)u(▷)u(▷)q(Sum)

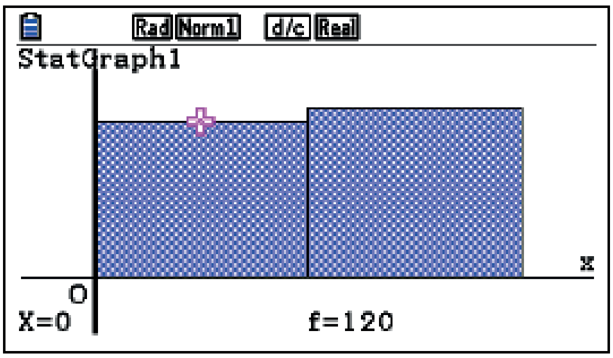


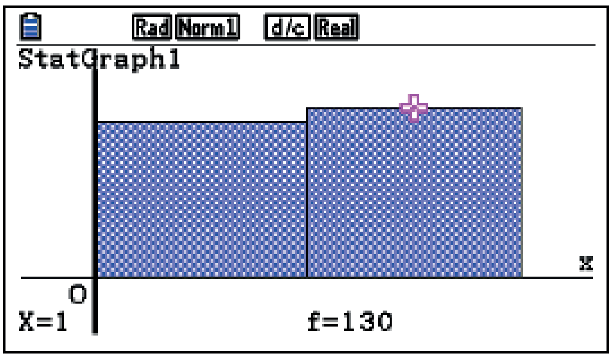






Variante mit Histogramm: Die Anzahlen kann man durch „Tracen" auf dem Histogramm leicht ablesen.





Simulation der Augensumme zweier Würfel

Jürgen Appel

Kurzfassung des Inhalts:

Bei dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler zuerst die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augensumme beim Werfen zweier Würfel berechnen. Anschließend wird dann mit dem GTR der Wurf mit zwei Würfeln simuliert, dann werden die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Augensummen berechnet. Dadurch können die Schülerinnen und Schüler ihre Berechnungen kontrollieren.

Klassenstufe(n):

Klasse 7 bzw. 8

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler sollen ...

- durch die Simulation mit dem GTR erkennen, ob sie bei ihrer Berechnung der Wahrscheinlichkeiten einen Fehler gemacht haben;
- durch diese Aufgabe auf die Voraussetzung für die Anwendung der Regel von Laplace, nämlich die Gleichverteilung, erneut hingewiesen werden;
- den Einsatz des GTR als Simulationsgerät weiter vertiefen.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

- Erzeugung einer Liste von ganzzahligen Zufallszahlen im *STAT*-Menü;
- Addition zweier Listen;
- Erzeugung eines Histogramms;
- „Tracen" auf einem Histogramm, um die Werte ablesen zu können.

Zeitbedarf:

Eine Doppelstunde (90 Minuten)

Sonstige Materialien:

Keine

Begleittext

Die Schülerinnen und Schüler kennen in der Regel Würfelspiele, bei denen man zwei Würfel gleichzeitig werfen muss. Z. B. würfelt man beim Spiel „Die Siedler von Catan“ mit zwei Würfeln und berechnet dann die Augensumme der beiden Würfel. Den meisten Schülerinnen und Schülern ist im Allgemeinen dieses Spiel bekannt, bei dem die Felder mit der Augensumme 6 und 8 besonders begehrt sind. Hier soll der Frage nachgegangen werden, warum das wohl so ist.

Die Aufgabe soll die Schülerinnen und Schüler auf die Voraussetzung für die Anwendung der Regel von Laplace, nämlich die Gleichverteilung, hinweisen. Häufig gehen sie bei diesem Problem, ohne Unterscheidung der Würfel, von einer Gleichverteilung aus und erhalten dann falsche Ergebnisse in Hinblick auf die vermuteten Häufigkeiten der auftretenden Augensumme.

Die Simulation mit dem GTR dient dabei primär der Kontrolle der eigenen Rechnung (die Schülerinnen und Schüler erkennen ihren Fehler). Es werden dadurch aber auch neue Fragen aufgeworfen.

Aufgabenstellung

Die Schülerinnen und Schüler sollten in Partnerarbeit folgende Aufgabe bearbeiten:

a) Versuche mit der Regel von Laplace die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Augensummen 2 bis 12 beim Wurf zweier Würfel zu berechnen.
b) Simuliere den Wurf mit zwei Würfeln 900-mal mit deinem GTR. Berechne die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Augensummen.
c) Vergleiche die Ergebnisse deiner Simulation mit deinen Ergebnissen aus a).

Bezug zu den KMK-Standards

In der Leitidee L5 „Daten und Zufall“ findet man:

- Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.
- Außerdem werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K2) „Probleme mathematisch lösen”, (K3) „Mathematisch modellieren“ und (K5) „Mathematische Werkzeuge sinnvoll einsetzen“ durch die vorliegende Simulation angesprochen.

Voraussetzungen bezüglich des GTR

Die Klasse hatte den GTR seit wenigen Monaten und bereits gelernt, wie man den Wurf mit einem Würfel mit dem GTR im *STAT*-Menü simulieren kann. Dabei hatten die Schülerinnen und Schüler auch gelernt, wie man für eine schnelle Auswertung der Simulation mit dem GTR ein Histogramm erstellt.

Methodische Hinweise

Die Aufgabe wurde in der Mathematikstunde als Partnerarbeit durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler hatten in der vorangegangenen Unterrichtsstunde die Regel von Laplace zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei einem Laplace-Experiment kennengelernt.

Die Schülerinnen und Schüler sollen bei der Teilaufgabe a) zuerst versuchen die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und dabei zunächst durchaus den typischen Fehler der Nichtberücksichtigung der Gleichverteilung erleben dürfen, um dann durch die Simulation zu erkennen, dass ihre Ergebnisse in Teilaufgabe a) wohl nicht stimmen können. Die Methode, einen typischen Fehler bewusst zu provozieren, hat bei vielen Schülerinnen und Schülern den Effekt, dass sie den Fehler selbst erkennen können und der Lernprozess dadurch nachhaltiger ist. Häufig gehen viele Schülerinnen und Schüler von 21 möglichen Würfelergebnissen aus, die sie als gleich wahrscheinlich ansehen. Dass jedoch, ohne Unterscheidung der beiden Würfel, die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch nur halb so groß ist wie für die anderen Konstellationen, übersehen sie häufig. Somit erfahren sie bei der Besprechung dieser Aufgabe, dass man, um die Regel von Laplace anwenden zu können, gelegentlich eine „künstliche“ Unterscheidung von Fällen vornehmen muss.

Die Simulation mit dem GTR ist relativ einfach durchzuführen. Jedoch streuen die Ergebnisse selbst bei *n=900* noch recht stark, so dass die relativen Häufigkeiten teilweise eine große Abweichung von den theoretischen Werten aufweisen. Deshalb sollte man die Simulationsergebnisse der ganzen Klasse im Plenum zusammenfassen. Dies kann entweder zu Beginn der Besprechung, als schlagkräftiges Argument gegen falsche Schülerlösungen bei Teilaufgabe a), oder am Ende der Besprechung zur Bestätigung der theoretischen Werte geschehen.

Zeitbedarf

Für die Aufgabe „Augensumme zweier Würfel“ hatten die Schülerinnen und Schüler 45 Minuten Bearbeitungszeit. Die Besprechung inklusive einer ausführlichen Diskussion über die Gleichverteilung durch die „künstliche“ Unterscheidung der beiden Würfel und das gemeinsame Zusammenfassen aller Simulationsergebnisse dauerte ebenfalls nochmals 45 Minuten. Somit ist eine Doppelstunde für diese Aufgabe anzusetzen.

Zur Rolle des GTR

Bei der Teilaufgabe a) spielt der GTR keine große Rolle, da die Schülerinnen und Schüler bei der Verwendung der Regel von Laplace die gesuchten Wahrscheinlichkeiten meist in Bruchschreibweise darstellen. Erst bei dem Vergleichen in Teilaufgabe c) werden die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeiten aus a) mit dem GTR in eine Dezimalzahl umrechnen (die Simulation in b) liefert ja die relativen Häufigkeiten als Dezimalzahlen). Hier dient der GTR also als Rechenhilfe (arithmetischer Einsatz). Für die Simulation in Teilaufgabe b) spielt der GTR dann die zentrale Rolle, da ohne GTR-Einsatz eine Simulation von 900 Würfen jeden üblichen zeitlichen Rahmen sprengen würde.

Durchführung

Die Aufgabe wurde der Klasse gleich zu Beginn der Unterrichtsstunde ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler durften sich einen Partner suchen, mit dem sie gemeinsam die Aufgabe lösen sollten. Der Zeitrahmen von 45 Minuten wurde ebenfalls zu Beginn mitgeteilt. Bei einer praktischen Erprobung machten bis auf zwei Schülerteams (insgesamt gab es 12 Zweierteams) alle Teams den „klassischen Fehler“, indem sie die beiden Würfel nicht unterschieden und trotzdem von einer Gleichverteilung ausgingen. Die beiden Teams, bei denen dieser Fehler nicht auftrat, unterschieden die Würfel jedoch nicht bewusst, sondern schrieben die 36 Möglichkeiten, wegen der besseren Übersicht in einem quadratischen Schema auf. Die meisten Teams merkten zwar anhand ihrer Simulation, dass ihre Ergebnisse aus Teil a) nicht stimmen konnten, sie konnten aber die Ursache dafür nicht erkennen. Die Schülerinnen und Schüler führten die Simulation weitgehend eigenständig durch. Allerdings benötigten einige Hilfe von ihrem Partner bzw. vom Lehrer. Dabei wussten manche auch nicht mehr genau, wie man ein Histogramm mit dem GTR erzeugt. Das Erzeugen zweier Listen mit natürlichen Zufallszahlen von 1 bis 6 bereitete keine Schwierigkeiten. Auch die Berechnung der Augensumme in einer dritten Liste gelang den meisten Zweierteams eigenständig. Nur ein Team berechnete die relativen Häufigkeiten im $STAT$-Menü mithilfe einer vierten und fünften Liste. Alle anderen Teams berechneten die relativen Häufigkeiten einzeln im RUN-Menü.

Bei der Besprechung der Aufgabe im Plenum ergab sich, dass die Simulationsergebnisse für die einzelnen Augensummen von Schüler zu Schüler teilweise erheblich voneinander abwichen. Auch gaben einige Schülerinnen und Schüler an, dass bei ihrer Simulation z. B. die Augensumme 10 häufiger als die Augensumme 9 vorkam. Um mehr Aussagekraft zu erhalten, wurden die Simulationsergebnisse aller 24 Schülerinnen und Schüler zusammengeführt. Im Durchschnitt aller Simulationen ($n = 21\,600$) ergaben sich Werte, die sehr nahe an den Werten lagen, die von den beiden Teams mit 36 Möglichkeiten berechnet worden waren.

In der anschließenden Diskussion im Plenum akzeptierten die Schülerinnen und Schüler zwar schnell, dass die Variante mit den 36 Möglichkeiten im Gegensatz zur Variante mit nur 21 Möglichkeiten wohl die richtigen Ergebnisse liefern würde, aber keine Schülerin bzw. kein Schüler konnte den Unterschied erklären. Erst durch gezielte Tipps (wir werfen einen Würfel zweimal) seitens des Lehrers wurde der Unterschied mit der Reihenfolge der Würfe begründet. Dennoch machte es vielen Schülerinnen und Schülern nach wie vor Probleme, sich vom tatsächlichen Würfelvorgang beim Spiel (gleichzeitiges Werfen zweier gleicher Würfel) loszulösen. Auch nachdem im Plenum die richtigen Werte für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten berechnet wurden, gab es noch einige Schülerinnen und Schüler, die nicht verstanden, dass erst die „künstliche“ Unterscheidbarkeit der beiden Würfel die von der Laplace-Regel geforderte Gleichverteilung liefert. Die letzten Zweifel wurden erst dadurch ausgeräumt, dass die Schülerinnen und Schüler die absoluten Häufigkeiten für die Augensumme 2 (1er Pasch) und die Augensumme 3 miteinander verglichen. Erst jetzt sahen sie ein, dass ohne die Unterscheidbarkeit, ein Pasch nur halb so wahrscheinlich ist, wie die Konstellation eine 1 und eine 2. Somit war dann klar, dass bei 21 Möglichkeiten keine Gleichverteilung vorliegt.

Mathematik Klasse 7 (AP)

Augensumme zweier Würfel

Bei vielen Würfelspielen, wie z. B. beim Spiel „Die Siedler von Catan“, würfelt man mit zwei Würfeln und berechnet dann die Augensumme der beiden Würfel.

Beim Spiel „Die Siedler von Catan“ sind die Felder mit der Augensumme 6 und 8 besonders begehrt. Warum ist das wohl so?

(Bemerkung: Bei der Augensumme 7 erhält man keine Rohstoffe, sondern der Räuber kommt zum Einsatz.)

a) Versuche mit der Regel von Laplace die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Augensummen 2 bis 12 zu berechnen.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit											

b) Simuliere den Wurf mit zwei Würfeln 900-mal mit deinem GTR. Berechne die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Augensummen.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
absolute Häufigkeit											
relative Häufigkeit											

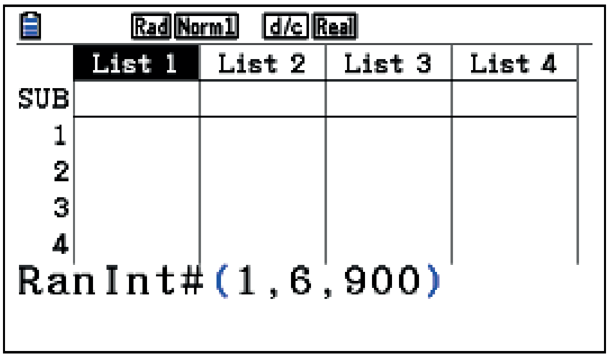
c) Vergleiche die Ergebnisse deiner Simulation mit deinen Ergebnissen aus a).

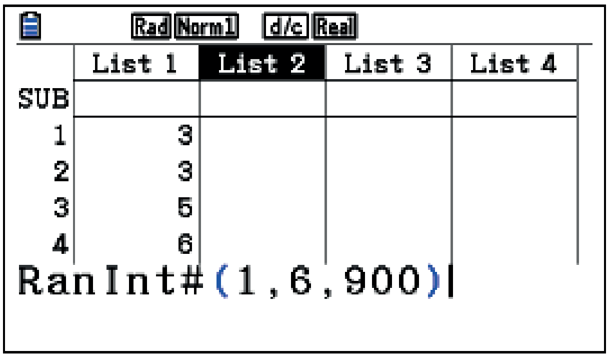
Lösungsvorschlag: Simulation der Augensumme zweier Würfel

Simulationsidee im *STAT*-Menü

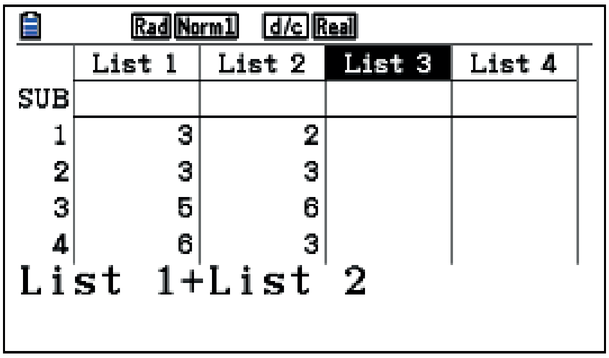
Zunächst müssen (mit Hilfe des *Ranint#*-Befehls) zwei Listen (für jeden Würfel eine) mit den Zufallsziffern 1 bis 6 angelegt werden.

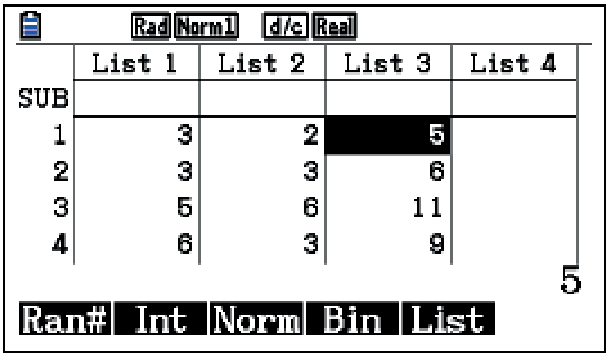
Syntax: iy(PROB)r(RAND)w(Int)





Anschließend wird in Liste 3 die Summe der Listen 1 und 2 gebildet.

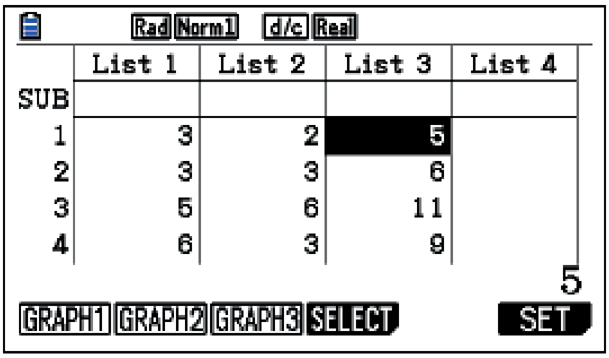


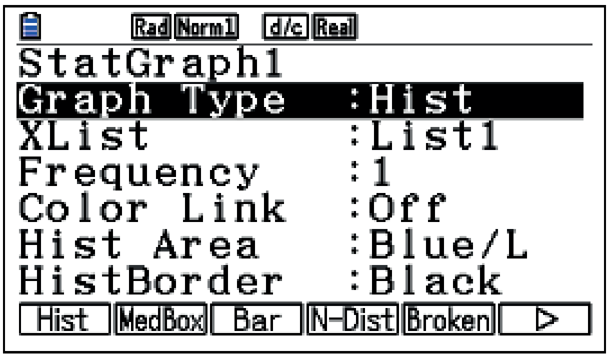


Auswertung:

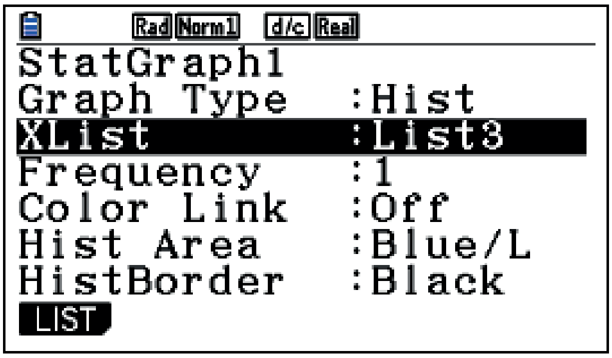
Um die Anzahl der verschiedenen Einträge 2 bis 12 zu bestimmen, wird von Liste 3 ein *Histogramm* erzeugt.

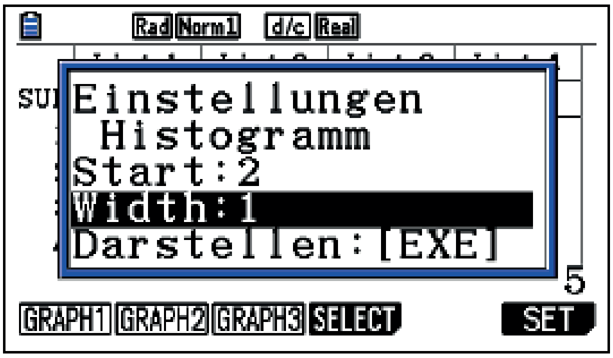
Um ein *Histogramm* zu erzeugen, muss man den *Graphiktyp* im *SET* umstellen. (Voreingestellt ist der *Graphiktyp „Scatter"*.)



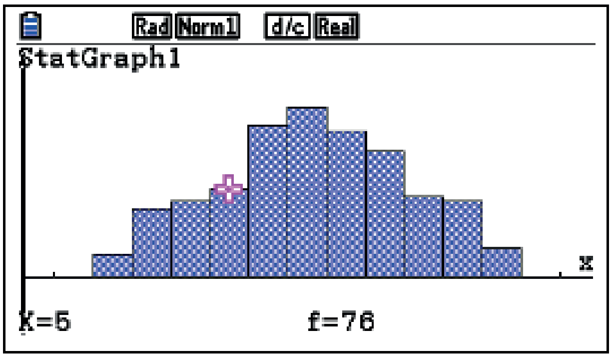


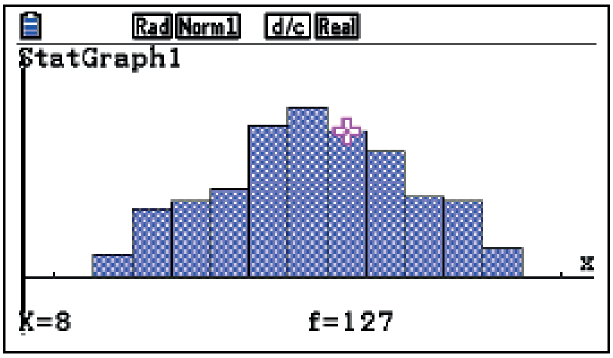
Tipp: Damit das *Histogramm* in Einerschritten durchlaufen werden kann, gibt man bei *Width* den Wert 1 ein.





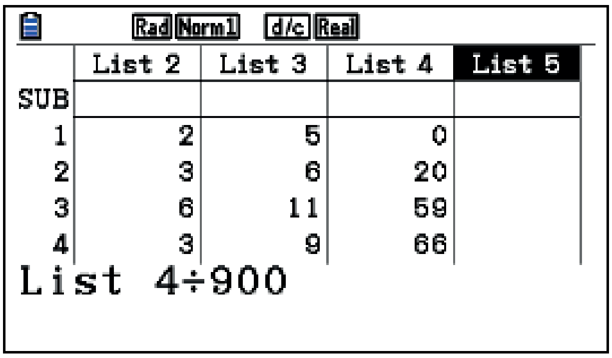
Die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Augensummen kann man durch „Tracen“ auf dem *Histogramm* leicht ablesen. **(Lq)**

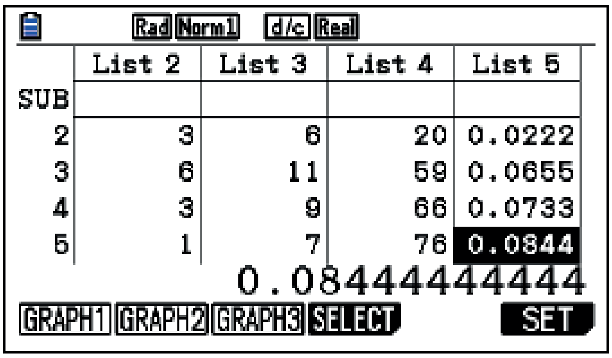




Die relativen Häufigkeiten berechnet man dann entweder einzeln im *RUN*-Menü oder man gibt die absoluten Häufigkeiten (von Hand) in eine Liste 4 ein und berechnet in der Liste 5 die gesuchten relativen Häufigkeiten (*List* 4: 900).

Dabei ist es vorteilhaft, wenn man in die erste Zelle der Liste 4 eine Null eingibt. Dann entspricht nämlich die Zellennummer ganz links der Augensumme und man kann die berechneten relativen Häufigkeiten besser ablesen.





Theoretisch berechnete Werte:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Simulation eines Geburtstagsproblems

Jürgen Appel

Kurzfassung des Inhalts:
Bei der Aufgabe handelt es sich um eine einfache Variante eines Geburtstagsproblems mit drei Personen. Die Wahrscheinlichkeit wird zuerst näherungsweise mit Hilfe einer Simulation mit dem GTR bestimmt. Zudem wird die exakte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Pfadregel berechnet und mit dem zuvor erhaltenen Näherungswert verglichen.

Klassenstufe(n):
Klasse 8 bzw. 9

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen ...
- die Pfadregeln wiederholen und anwenden;
- erkennen, dass je größer der Stichprobenumfang ist, desto genauer ist der Näherungswert, den man mit Hilfe einer Simulation erhält;
- den Einsatz des GTR als Simulationsgerät weiter vertiefen.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
- Erzeugung einer Liste von ganzzahligen Zufallszahlen im *STAT*-Menü;
- Vergleich mehrerer Listen auch mit Hilfe der logischen Operatoren *and* und *or*;
- Bildung der Summe von Listeneinträgen.

Zeitbedarf:
Eine Unterrichtsstunde (45 Minuten)

Sonstige Materialien:
Keine

Begleittext

Geburtstagsprobleme gibt es in verschiedenen Varianten. Je nach Altersstufe kann man deren Schwierigkeitsgrad einfach variieren. Zudem sind die meisten Schülerinnen und Schüler sehr überrascht, wenn sie die Lösung mit ihren zuvor gemachten Schätzungen vergleichen. Für die Klassenstufe 8 wurde ein einfaches Problem mit drei Personen gewählt. Dieses Problem lässt sich relativ einfach simulieren und anschließend mit Hilfe der Pfadregel auch theoretisch erklären. Später kann man auch zu komplexeren Problemen übergehen, bei denen nach der Mindestanzahl der Personen gefragt wird, um eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit zu überschreiten.

Die Simulationsmöglichkeiten sind größer, wenn man den Schülerinnen und Schülern zuvor gezeigt hat, wie man einen Vergleich von Listen mit Hilfe von logischen Operatoren durchführt.

Aufgabenstellung

Antje, Benjamin und Clara treffen sich auf dem Schulhof. Antje behauptet:
„Ich wette, dass mindestens zwei von uns am selben **Wochentag** Geburtstag haben."
Würdest du dagegen wetten?

a) Führe eine Simulation ($n = 500$) mit dem GTR durch.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der drei Schülerinnen und Schüler am selben Wochentag Geburtstag haben.
c) Vergleiche deine Simulation mit deinem Ergebnis aus b).

Bezug zu den KMK-Standards

In der Leitidee L5 „Daten und Zufall" findet man:

- Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten;
- Außerdem werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K2) „Probleme mathematisch lösen", (K3) „Mathematisch modellieren" und (K5) „Mathematische Werkzeuge sinnvoll einsetzen" durch die vorliegende Simulation angesprochen.

Voraussetzungen bezüglich des GTR

Die Klasse hatte den GTR bereits seit einem Jahr und schon mehrfach Simulationen im *STAT*-Menü durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler wussten bereits, wie man mit Hilfe der logischen Operatoren *and* bzw. *or* Listen vergleichen kann.

Methodische Hinweise

Die Aufgabe wurde den Schülerinnen und Schülern in der Mathematikstunde als Partnerarbeit gestellt.

Die Teilaufgabe b) ist eine typische Anwendung der Pfadregel, bei der die Schülerinnen und Schüler über das Gegenereignis argumentieren müssen.

Bei der Simulation in der Teilaufgabe a) gehen die Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen nicht über das Gegenereignis, sondern suchen einen direkten Weg, um zum Ziel zu kommen.

Zum einen liefert die Simulation die richtige Größenordnung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Zum anderen können bei $n = 500$ die unterschiedlichen Simulationen doch deutlich voneinander abweichen. Dies zeigt den Schülerinnen und Schülern nochmals, dass für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, die man mittels einer Simulation bestimmen will, die Anzahl n groß sein sollte.

Damit die Schülerinnen und Schüler mehr Variationsmöglichkeiten für ihre Simulation haben, sollten sie zuvor zumindest einmal einen Listenvergleich von mehreren Listen mithilfe der logischen Operatoren *and* bzw. *or* durchgeführt haben.

Im Anschluss an diese Aufgabe bietet sich, ohne Simulation, die Erweiterung zum klassischen Geburtstagsproblem an, etwa in der Form: „Wie viele Personen muss man mindestens befragen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?"

Dabei kann man entweder im *RUN*-Menü die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis durch sukzessives Multiplizieren erhalten oder man verwendet hier die Tabellenkalkulation (*S-SHEET*).

Zeitbedarf

Für die Aufgabe „Das Geburtstagsproblem" hatten die Schülerinnen und Schüler 20 Minuten Bearbeitungszeit. Die Besprechung inklusive einer kurzen Diskussion über die Streuung der Simulationsergebnisse dauert ca. 15 Minuten.

Zur Rolle des GTR

Für das Ergebnis der Teilaufgabe b) spielt der GTR keine große Rolle, da die Aufgabe ja mittels der Pfadregel relativ einfach zu bewältigen ist. Lediglich das Berechnen der Wahrscheinlichkeit (Multiplikation von Brüchen im *RUN*-Menü) wird erleichtert.

Bei der Teilaufgabe a) kann die Simulation auf unterschiedliche Arten erfolgen, da der GTR hier mehrere Möglichkeiten zulässt (s. Lösungsvorschlag).

Für die Simulation spielt der GTR natürlich die zentrale Rolle, da ohne GTR-Einsatz eine Simulation mit $n = 500$ jeden üblichen zeitlichen Rahmen sprengen würde.

Durchführung

Die Aufgabe wurde der Klasse gleich zu Beginn der Unterrichtsstunde ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler durften sich einen Partner suchen, mit dem sie gemeinsam die Aufgabe lösen sollten. Der Zeitrahmen von 20 Minuten wurde ebenfalls zu Beginn mitgeteilt.

Alle führten die Simulation im *STAT*-Menü durch. Dabei benötigten einige Schülerinnen und Schüler Hilfe von ihrem Partner bzw. vom Lehrer. Insbesondere waren einige nicht mehr mit dem logischen *or* vertraut. Das Erzeugen dreier Listen mit natürlichen Zufallszahlen von 1 bis 7 bereitete keinerlei Schwierigkeiten. Auch die Berechnung der relativen Häufigkeiten gelang den meisten Zweierteams eigenständig.

Bei der Besprechung der Aufgabe im Plenum ergab sich, dass die Simulationsergebnisse zwischen 0,35 und 0,416 schwankten. Der Durchschnitt aller 25 Simulationen ($n = 12\,500$) ergab einen Wert von ca. 0,384 für die relative Häufigkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Wochentag Geburtstag haben.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis mit Hilfe der Pfadregel gelang zunächst nicht allen Schülerinnen und Schülern. Dies lag zumeist daran, dass sie die Baumdiagramme zu umfangreich zeichneten (bzw. ansetzten). Die Idee, den ersten Schüler, der ja an irgendeinem beliebigen Wochentag Geburtstag haben kann, im Prinzip wegzulassen ($p = \frac{7}{7} = 1$) hatten nicht alle Teams. Daher wurde den Teams, auf deren Nachfrage, vom Lehrer der Tipp gegeben, zunächst das Gegenereignis zu betrachten bzw. den ersten Schüler bei der Betrachtung wegzulassen.

Die letzten zehn Minuten der Unterrichtsstunde wurde noch das klassische Geburtstagsproblem angesprochen. Dabei lagen die Schülerinnen und Schüler mit ihren Schätzungen, wie erwartet, deutlich daneben. Sie waren sehr erstaunt, dass schon bei einer Gruppe von 23 Personen die Wahrscheinlichkeit über 50 % liegt. Tatsächlich hatten auch zwei Schüler in dieser Klasse am selben Tag (17.10.) Geburtstag.

Mathematik Klasse 8 (AP)

Das Geburtstagsproblem

Antje, Benjamin und Clara treffen sich auf dem Schulhof.

Antje behauptet:

„Ich wette, dass mindestens zwei von uns am selben **Wochentag** Geburtstag haben.“

Würdest du dagegen wetten?

a) Führe eine Simulation ($n = 500$) mit dem GTR durch.

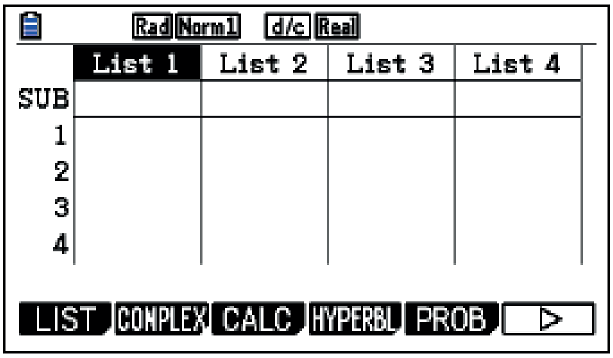
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der drei Schülerinnen und Schüler am selben Wochentag Geburtstag haben.

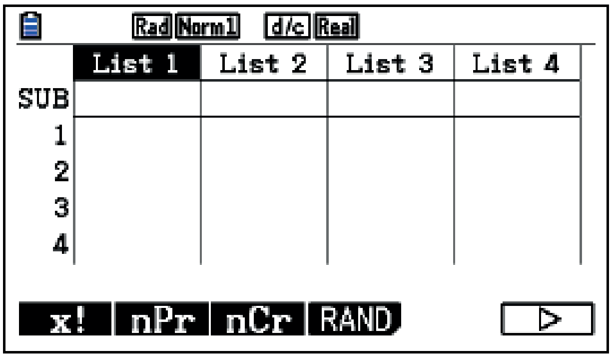
c) Vergleiche deine Simulation mit deinem Ergebnis aus b).

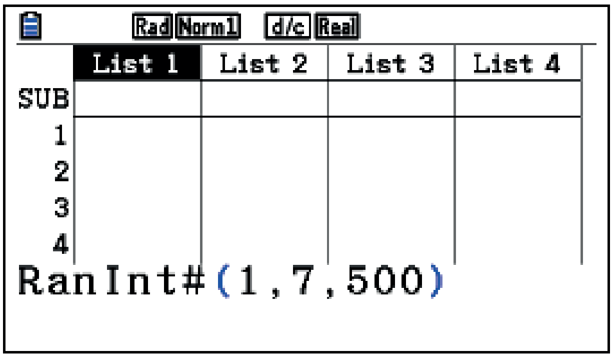
Lösungsvorschlag: Simulation im Statistik-Menü

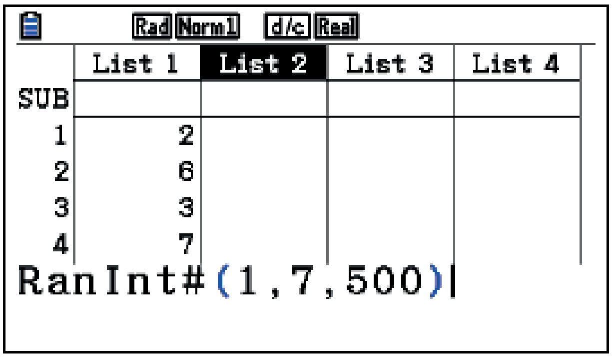
Zunächst müssen (mit Hilfe des *Ranint#*-Befehls) drei Listen (für jedes Kind eine) mit den Zufallsziffern 1 bis 7 (sieben Wochentage) angelegt werden.

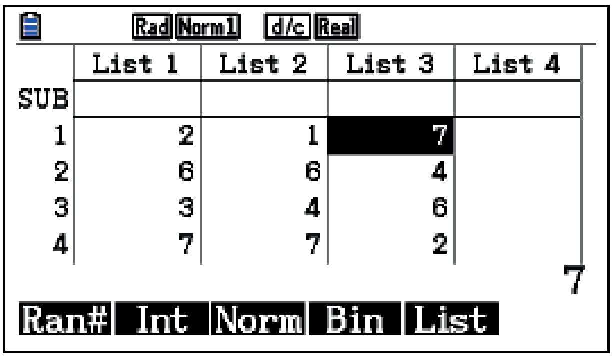
Syntax: iy(PROB)r(RAND)w(Int)

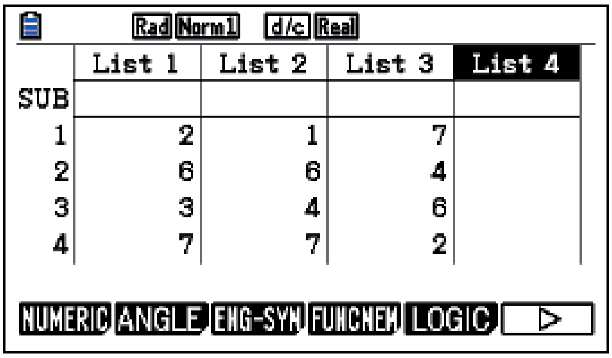










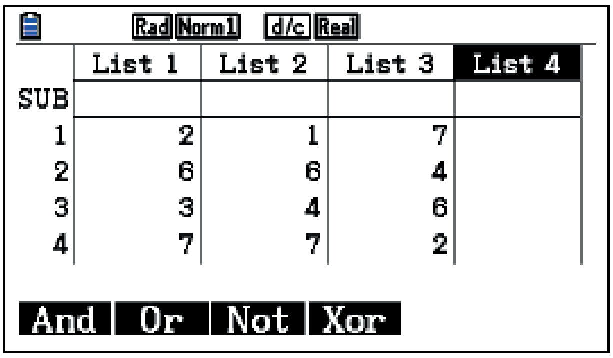


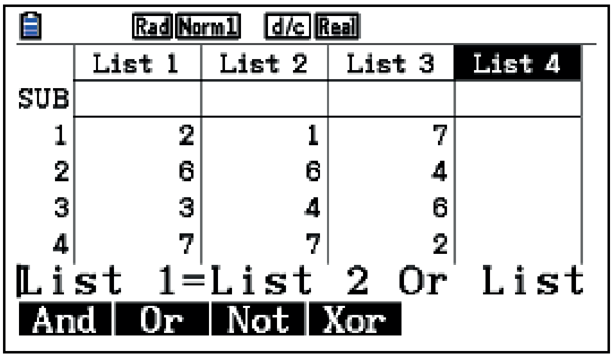
Anschließend vergleicht man jeweils zwei dieser drei Listen miteinander. Falls mindestens einer dieser drei Vergleiche eine Übereinstimmung ergibt, dann haben mindestens zwei der drei Kinder am gleichen Wochentag Geburtstag. Für die Auswertung bietet sich das logische „**oder**" an.

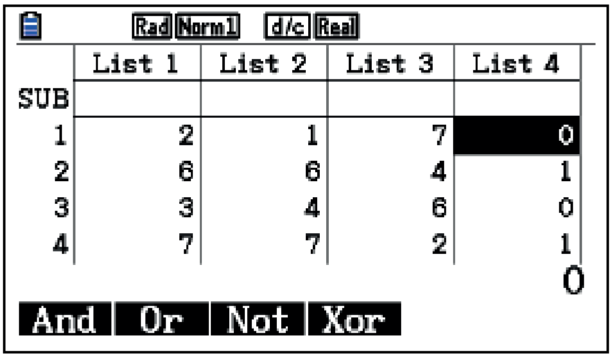
Syntax: iu(▷)y(LOGIC)w(Or)

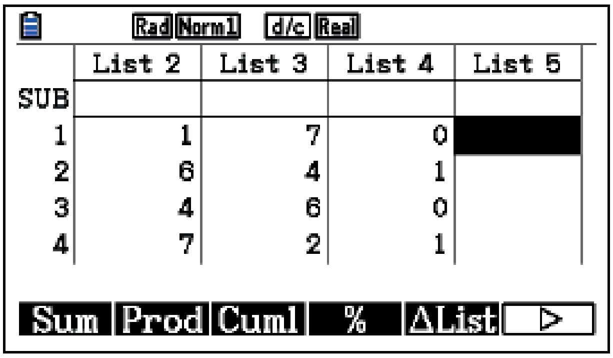
Man gibt in die Liste 4 Folgendes ein: **List 1 = List 2 Or List 1 = List 3 Or List 2 = List 3**

Falls einer der drei Vergleiche übereinstimmt, steht in Liste 4 der Eintrag **1**, anderenfalls der Eintrag **0**.

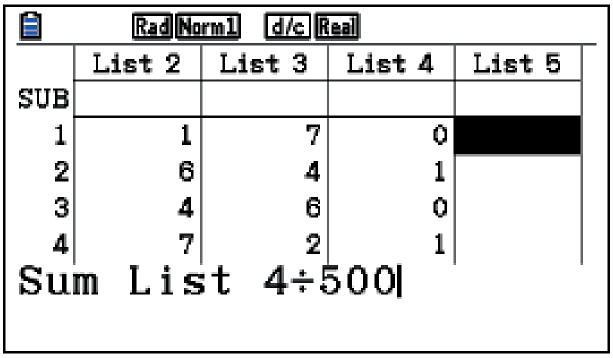


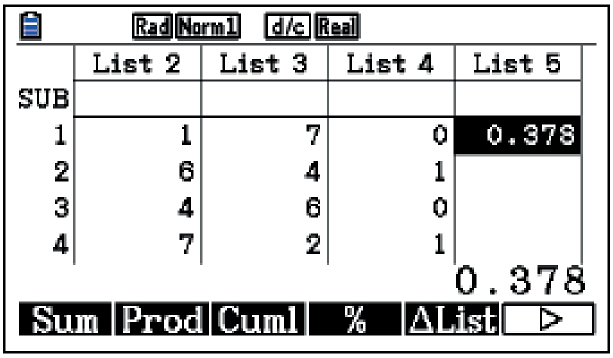






Um die absolute und die relative Häufigkeit der Einsen zu bestimmen, bildet man die Summe der Einträge der Liste 4 und dividiert diese Summe durch die Anzahl n (z. B. 500) der Simulationen.





Variante:

Simuliert man das Problem mit Hilfe der Tabellenkalkulation (*S-SHEET*), dann hat man den Vorteil, dass man sehr schnell einen neuen Wert für die relative Häufigkeit erhält, indem man die Simulation neu startet. Aber dabei sollte man Folgendes beachten: Wenn man $n = 500$ wählt, dann kommt die Fehlermeldung „**Speicherfehler**“. Bei $n = 250$ liefert der GTR jedoch die gewünschte Simulation. Daher bietet es sich an, zweimal mit $n = 250$ zu arbeiten.

Theoretischer Wert mit Hilfe der Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Schülerinnen und Schüler an einem anderen Wochentag Geburtstag haben beträgt: $p^* = \frac{7}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{49}$. Demnach beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am gleichen Wochentag Geburtstag haben $p = 1 - p^* = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49} \approx 0{,}388 = 38{,}8\ \%$.

Simulation eines Multiple-Choice-Tests

Jürgen Appel

Kurzfassung des Inhalts:
Bei dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeit für mindestens vier richtige Antworten bei einem Multiple-Choice-Test berechnen, falls man zufällig ankreuzt. Da die Schülerinnen und Schüler die Formel von Bernoulli noch nicht kennen, erhalten sie das Ergebnis näherungsweise durch Simulation mit dem GTR.

Klassenstufe(n):
Klasse 8 bzw. 9

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen ...
- durch die Simulation mit dem GTR einen Näherungswert für eine Wahrscheinlichkeit bestimmen, die sie noch nicht exakt berechnen können;
- lernen eine Simulation mit Hilfe einer Tabellenkalkulation auch auf dem GTR zu erstellen.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
- Die Klasse kann mit dem GTR Simulationen im *STAT*-Menü durchführen.
- Vorkenntnisse im Umgang mit einer Tabellenkalkulation sind hilfreich.

Zeitbedarf:
Eine Doppelstunde (90 Minuten)

Sonstige Materialien:
- Fragebogen mit acht fiktiven Fragen mit jeweils vier fiktiven Antwortmöglichkeiten, um im Vorfeld eine Simulation ohne GTR durchführen zu können.
- Lösungsfolie für den Fragebogen

Begleittext

Multiple-Choice-Tests begegnen Schülerinnen und Schülern in der Schule, etwa bei Vergleichsarbeiten (z. B. Vera oder DVA), aber auch im späteren Leben, z. B. bei der theoretischen Führerscheinprüfung. Weiterhin kennen die Schülerinnen und Schüler dieses Format auch aus Quizsendungen (Wer wird Millionär? usw.), bei denen auch schon der ein oder andere Kandidat durch Glück mit Raten gewinnen konnte. Die Frage, wie groß denn die Wahrscheinlichkeit sei, bei einem Multiple-Choice-Test durch Raten zu bestehen ist also sicherlich altersgemäß für Schülerinnen und Schüler der Klasse 8.

Beim Bestimmen dieser Wahrscheinlichkeit stoßen die Schülerinnen und Schüler sehr schnell an ihre Wissensgrenzen, denn in der Regel verfügen sie nicht über die Hilfsmittel aus der Kombinatorik. Die Schülerinnen und Schüler können jedoch bei der Simulation des Tests mit dem GTR erfahren, dass man mit technischen Hilfsmitteln zumindest gute Näherungswerte für Wahrscheinlichkeiten erhalten kann. Die Simulation wurde mit Hilfe der Tabellenkalkulation des GTR durchgeführt.

Aufgabenstellung

Aufgabe (Lambacher Schweizer 4, Baden-Württemberg / S. 167 / Aufgabe 2):

Bei einem Test gibt es acht Fragen mit jeweils vier Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Eine Versuchsperson kreuzt bei jeder Frage rein zufällig eine Antwort an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie trotzdem mindestens vier richtige Antworten?

HINWEIS:
Die Aufgabe wurde in der Klassestufe 8, nach der Behandlung der Pfadregel gestellt.

Bezug zu den KMK-Standards

In der Leitidee L5 „Daten und Zufall“ findet man:

- Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.
- Außerdem werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K2) „Probleme mathematisch lösen”, (K3) „Mathematisch modellieren“ und (K5) „Mathematische Werkzeuge sinnvoll einsetzen“ durch die vorliegende Simulation eingeübt.

Voraussetzungen bezüglich des GTR

Die Klasse arbeitete bereits seit einem Jahr mit dem GTR und hatte schon mehrfach Simulationen im *STAT*-Menü durchgeführt.

Die Klasse hatte im ITG-Unterricht der Klasse 7 den Umgang mit einer Tabellenkalkulation (Excel) am PC gelernt. Mit dem GTR hatten die Schülerinnen und Schüler noch nicht mit der Tabellenkalkulation gearbeitet. Somit lernten sie anhand dieser Aufgabe mit dem GTR die Tabellenkalkulation zu nutzen.

Methodische Hinweise

Die Aufgabe sollte in der Mathematikstunde gestellt werden, für eine Hausaufgabe ist sie weniger geeignet.

Die Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe aufgrund fehlender Kenntnisse aus der Kombinatorik in der Klassenstufe 8 nicht rechnerisch lösen. Mit Hilfe einer geeigneten Simulation und deren Auswertung im Klassenverband (um eine genügend große Anzahl an Simulationswerten zu erhalten) ist es jedoch möglich einen guten Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit anzugeben.

Eine Simulation mit Hilfe von Listen im *STAT*-Menü ist zwar prinzipiell möglich, aber wegen deren sehr komplizierten Auswertung nicht zu empfehlen. Da im Menü *S-Sheet* (Tabellenkalkulation) eine gewichtete Simulation zur Verfügung steht, ist die Tabellenkalkulation hier wesentlich besser geeignet. Da jedoch der Speicherplatz begrenzt und die Bildung von vielen Teilsummen (der Test besteht ja aus acht Fragen) sehr aufwendig ist, sollten sie den Test nur ca. 50-mal simulieren. Um dennoch einen guten Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, kumuliert man im Plenum alle Simulationsergebnisse der Schülerinnen und Schüler. Nachdem ein Näherungswert im Plenum bestimmt wurde, kann der Lehrer den Schülerinnen und Schüler den theoretisch berechneten Wert mitteilen, um die Güte des gemeinschaftlich erzielten Näherungswertes einschätzen zu können.

Auch wenn die Schülerinnen und Schüler schon über Grundkenntnisse bezüglich einer Tabellenkalkulation (z. B. aus ITG) verfügen, muss das Erstellen einer Tabellenkalkulation mit dem GTR erklärt werden. Bevor man mit der Simulation beginnt, bietet es sich hier an, die Schülerinnen und Schüler zunächst eine Prognose für die gesuchte Wahrscheinlichkeit abgeben zu lassen. So kann man der Klasse aufzeigen, wie weit man bei solch einer Schätzung danebenliegen kann. Zudem ist es von Vorteil, wenn man jede Schülerin bzw. jeden Schüler, bevor die eigentliche Simulation mit dem GTR durchgeführt wird, einen solchen Test mit acht Fragen selbst ausfüllen lässt. Damit kein eventuelles Vorwissen einzelner Schülerinnen und Schüler eine Rolle spielt (Wer kreuzt in der Realität bei einen Multiple-Choice-Test komplett zufällig die Antworten an?) sollte es keine echten Fragen und Antworten, sondern nur Kästchen zum Ankreuzen geben. Man kann das Ankreuzen entweder mithilfe eines realen Tetraeders (vier Antwortmöglichkeiten) „auswürfeln“ lassen, oder man verwendet dazu den GTR (*RUN*-Menü). Anschließend legt der Lehrer die „Musterlösung“ (die er zuvor per Zufall bestimmt hat) als Folie auf den OHP. Die Schülerinnen und Schüler stellen dann selbst fest, wie viele Fragen sie richtig beantwortet haben.

HINWEIS:
Man kann dieselbe Aufgabe auch in der Klassenstufe 10 einsetzen, wenn man die Binomialverteilung behandelt. Dann kann zudem die Fragestellung gezielt erweitert werden, indem man z. B. die Verteilung für alle möglichen Anzahlen der zufällig richtig angekreuzten Antworten untersuchen lässt, oder umgekehrt fragt, ab wie vielen richtigen

Antworten man die Note „ausreichend“ erteilen sollte. Zudem können die Schülerinnen und Schüler dann die theoretischen Werte selbst berechnen.

Zeitbedarf

Für dieses Unterrichtsprojekt sollte man eine Doppelstunde einplanen. Der benötigte Zeitbedarf hängt nämlich stark davon ab, wie gut und schnell die Schülerinnen und Schüler mit der Tabellenkalkulation zurechtkommen.

Zur Rolle des GTR

Für die Simulation spielt der GTR natürlich die zentrale Rolle, da ohne GTR-Einsatz selbst eine Simulation mit $n = 50$ sehr zeitaufwendig wäre. Zudem kann der GTR den Einsatz eines realen Tetraeders ersetzen, wenn die Schülerinnen und Schüler einen solchen Test eigenhändig per Zufall ankreuzen.

Durchführung

Die Aufgabe wurde den Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Unterrichtsstunde vorgestellt. Zuerst wurden sie aufgefordert die gesuchte Wahrscheinlichkeit spontan zu schätzen. Daraufhin nannten die Klasse Werte zwischen 5 % und 50 %.

Anschließend wurde im Unterrichtsgespräch das eigentliche Problem der Aufgabenstellung herausgearbeitet. Die Schülerinnen und Schüler erkannten schnell, dass ein Weg über ein konkretes Baumdiagramm praktisch nicht umsetzbar sei. Einige konnten zwar die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad mit genau vier richtigen Antworten angeben, aber bei der Frage nach der Anzahl der möglichen Pfade waren sie ratlos.

Um einen ersten Eindruck von der Größenordnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit zu erhalten, wurde den Schülerinnen und Schülern ein Multiple-Choice-Test mit acht „Fragen“ und je vier „Antwortmöglichkeiten“ ausgeteilt. Sie waren zunächst erstaunt und fanden es teilweise recht witzig, dass es gar keine echten Fragen und Antworten gab. Sie sahen aber rasch ein, dass echte Fragen nicht zufällig beantwortet werden. Die Schülerinnen und Schüler erzeugten im *RUN*-Menü natürliche Zufallszahlen (1, 2, 3 bzw. 4) und kreuzten gemäß der Anweisung auf dem Schülerblatt die Antworten an.

Nachdem der Lehrer die Musterlösung (Folie) mithilfe eines OHP an die Wand projiziert hatte, korrigierten die Schülerinnen und Schüler ihren Test. Anschließend wurde im Plenum festgestellt wie viele Schülerinnen und Schüler es mit keiner, einer, zwei, … usw. richtigen Antworten gab. Die Werte wurden in einer Tabelle an der Tafel zusammengefasst:

Anzahl der richtigen Antworten	0	1	2	3	4	5
Anzahl der Schülerinnen und Schüler	4	7	5	4	3	1

Somit ergab sich als erster grober Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit von mindestens vier richtigen Antworten: $p = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$.

Danach wurde das Problem mit dem GTR (Tabellenkalkulation) simuliert. Der Lehrer führte mithilfe des „Managers" (Computer-Simulation des GTR) vor, wie man dieses Problem geschickt mit einer Tabellenkalkulation simulieren kann.

Jede Schülerin bzw. jeder Schüler simulierte den Test 50-mal und hielt die Ergebnisse (Anzahl der richtigen Antworten) mit Hilfe einer Strichliste fest. Anschließend wurden die Ergebnisse aller Schülerinnen und Schüler im Plenum in eine gemeinsame Strichliste übertragen. Der Test wurde somit insgesamt 1200-mal (24 Schülerinnen und Schüler) simuliert. Dabei ergab sich als neuer Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{140}{1200} = \frac{7}{60} \approx 11{,}7\ \%$.

Einige benötigten trotz der ausführlichen Anleitung bei der Simulation den Rat von Mitschülern bzw. vom Lehrer.

Am Ende der Doppelstunde teilte der Lehrer den Schülerinnen und Schülern noch den theoretischen Wert ($p \approx 11{,}4\ \%$) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit, um die Güte der Simulation besser würdigen zu können.

Hinweis zur Berechnung des theoretischen Werts (für die 10. Klasse):
Es liegt eine Binomialverteilung $B_{8;0,25}$ vor. Wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der richtigen Antworten ist, dann ist Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$ gesucht.

Mit Hilfe des GTR berechnet man den Wert wie folgt:

CASIO 9860: $1 - Bcd(3{,}8{,}0.25) \approx 0{,}1138$;

CASIO CG50: $Bcd(4{,}8{,}8{,}0.25) \approx 0{,}1138$.

(Man muss mit dem CG50 nicht über das Gegenereignis gehen.)

Mathematik Klasse 8 (AP)

„Beantworte" die folgenden acht Fragen mit Hilfe von Zufallszahlen deines GTR wie folgt:

Kommt eine 1, dann kreuze Antwort a) an.

Kommt eine 2, dann kreuze Antwort b) an.

Kommt eine 3, dann kreuze Antwort c) an.

Kommt eine 4, dann kreuze Antwort d) an.

Frage 1 **a)** ☐ **b)** ☐ **c)** ☐ **d)** ☐

Frage 2 **a)** ☐ **b)** ☐ **c)** ☐ **d)** ☐

Frage 3 **a)** ☐ **b)** ☐ **c)** ☐ **d)** ☐

Frage 4 **a)** ☐ **b)** ☐ **c)** ☐ **d)** ☐

Frage 5 **a)** ☐ **b)** ☐ **c)** ☐ **d)** ☐

Frage 6 **a)** ☐ **b)** ☐ **c)** ☐ **d)** ☐

Frage 7 **a)** ☐ **b)** ☐ **c)** ☐ **d)** ☐

Frage 8 **a)** ☐ **b)** ☐ **c)** ☐ **d)** ☐

Vergleiche deine „Antworten" mit der Musterlösung und stelle fest, wie viele richtige „Antworten" du hast.

Anzahl der richtigen „Antworten": __________

Mathematik Klasse 8 (AP)

Lösungen: Multiple-Choice-Test

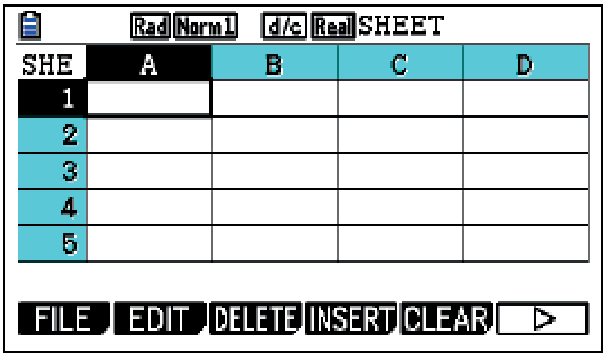
	a)	b)	c)	d)
Frage 1	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☐	☐	☒
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐

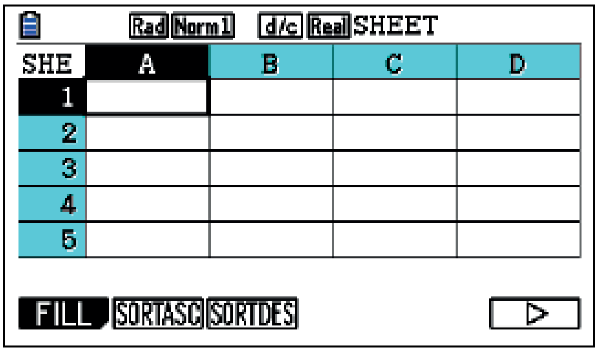
Lösungsvorschlag: Simulation mit Hilfe der Tabellenkalkulation

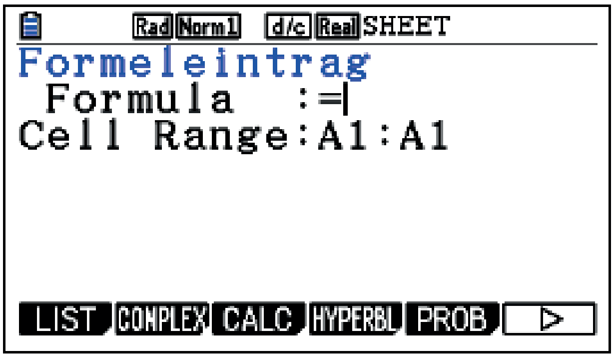
1) Zuerst wird über **w(EDIT)** und **u(▷)** der Befehl **q(FILL)** aktiviert und dann die Formel zur Erzeugung der Zufallszahlen **mit dem Gleichheitszeichen** eingegeben.

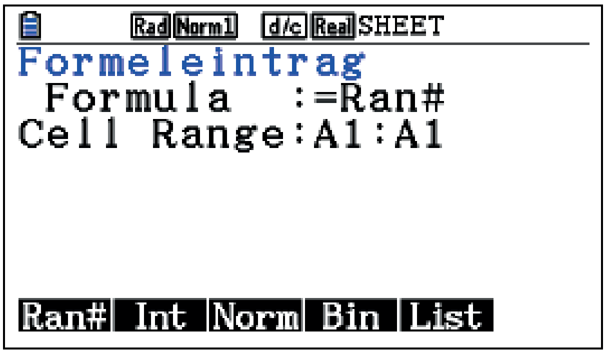
   Die Zufallszahlen werden in Spalte A wie folgt erzeugt: Man verwendet den Befehl $Ran\#\leq p$. Dieser Befehl erzeugt:
   - Eine 0, falls $Ran\# > p$ ist. (0 bedeutet: Antwort ist falsch)
   - Eine 1, falls $Ran\#\leq p$ ist. (1 bedeutet: Antwort ist richtig)

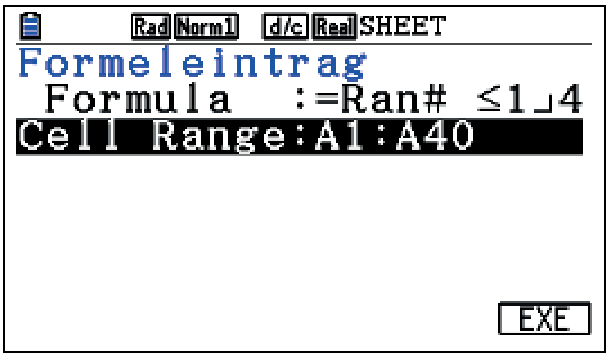
   Für diese Simulation wählt man $p = 0{,}25$.
   q(Ran#) findet man unter: **iy(PROB) r(RAND)**
   Das Zeichen ≤ findet man im Untermenü **y(REL),**
   Den *Cell-Range* stellt man auf $A1{:}\,A40$ ein, um fünf Achterblöcke auf einmal simulieren zu können.

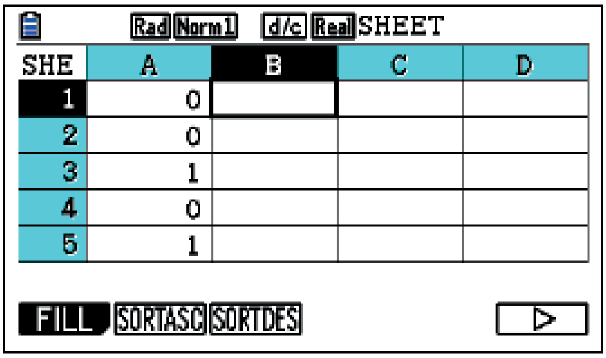




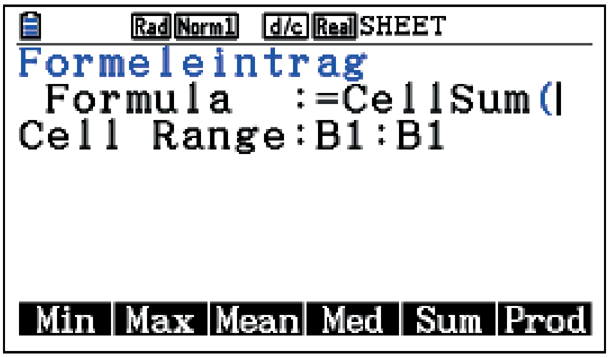


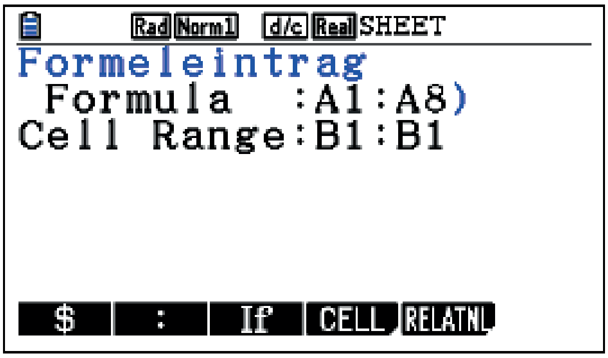


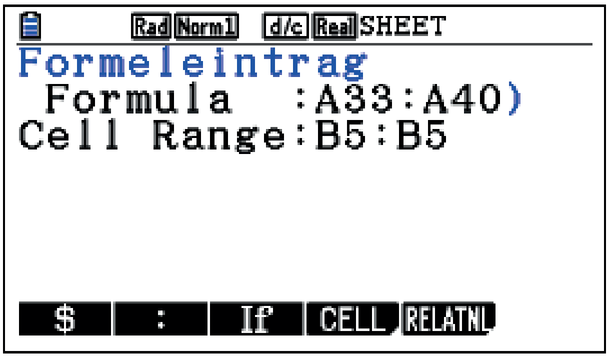


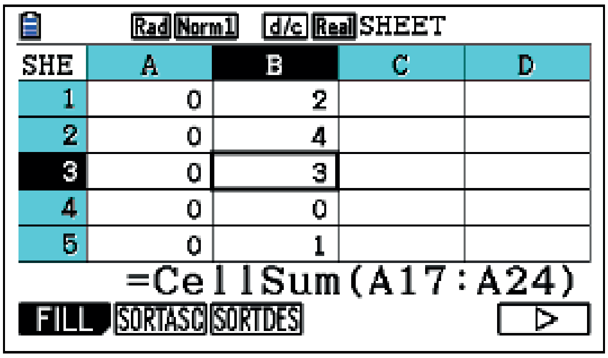


2) Um die Anzahl der Einser in den Achterblöcken bestimmen zu können, verwendet man den Befehl *Cellsum*, den man wie folgt findet: **r(CEL) y(Sum)**
   - In der Zelle B1 wird die Teilsumme der Zellen A1 bis A8 berechnet.
   - In der Zelle B2 wird die Teilsumme der Zellen A9 bis A16 berechnet usw.
   - In den Zellen B1 bis B5 steht also die Anzahl der richtigen Antworten von fünf Simulationen. (Man wählt diese Fünferblocks um unnötiges Scrollen zu vermeiden.)

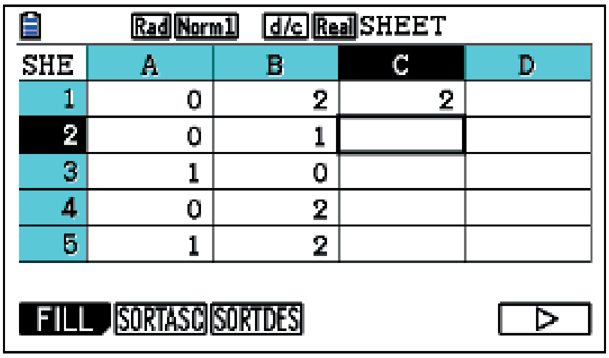


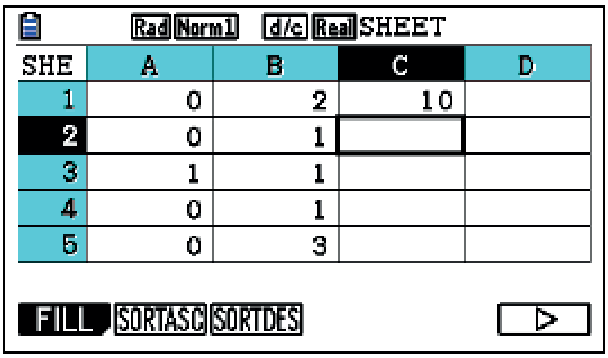






3) Jetzt kann man sehr schnell immer fünf neue Werte erhalten, indem man die Simulation erneut startet, z. B. dadurch, dass man in eine freie Zelle eine Zahl eintippt. Es bietet sich an jeweils die Nummer des aktuellen Fünferblocks einzutippen, dann weiß man wie oft man die Simulation schon wiederholt hat. Man beginnt also mit der Zahl 2 und endet mit der Zahl 10. Dann hat man zehn Fünferblöcke, also 50 Werte.





Jede Schülerin und jeder Schüler simuliert den Test 50-mal und hält die Ergebnisse (Anzahl der richtigen Antworten) mit Hilfe einer Strichliste fest. Anschließend wurden die Ergebnisse der Klasse im Plenum in eine gemeinsame Strichliste übertragen. Der Test wurde somit 1200-mal (24 Schülerinnen und Schüler) simuliert.

Eine Zeichnung als Ausgangspunkt für variierende Aufgabenstellungen

Ramona Behrens

Kurzfassung des Inhalts:

Die Schülerinnen und Schüler sollen ausgehend von einer Zeichnung, bei dem eine Gerade mit den Koordinatenachsen ein Rechteck einschließt, selbstständig mathematische Fragestellungen finden und versuchen diese zu beantworten.

Klassenstufe(n):

Die Unterrichtssequenz ist für die 10. Jahrgangsstufe konzipiert. Einige Teile der Aufgaben können aber schon früher, sobald der Umgang mit linearen Funktionen bekannt ist, behandelt werden.

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- entwickeln selbstständig Fragestellungen zu einer gegebenen Zeichnung;
- formulieren neue Problem- und Fragestellungen bei der Dynamisierung der Zeichnung;
- bearbeiten und lösen ihre selbstständig entwickelten Fragestellungen mithilfe des ClassPad auf verschiedene Weisen;
- lösen Extremwertaufgaben auf unterschiedlichen Ebenen (numerisch, graphisch, symbolisch).

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- Zeichnungen und Animationen mithilfe des ClassPad erstellen;
- die, während einer Animation, gemessenen Werte tabellarisch sowie graphisch darstellen;
- mittels ClassPad Gleichungssysteme lösen;
- Positionen von Objekten in einer Zeichnung verändern.

Zeitbedarf:

2 Doppelstunden

Sonstige Materialien:

Eventuell Schreibmaterial, auf dem die Schülerinnen und Schüler ihre Fragestellungen notieren sollen (Folien, Kärtchen o. Ä.).

1. Inhalt der Unterrichtssequenz

Bei dieser Unterrichtssequenz werden Geometrie und Algebra miteinander vernetzt. Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand einer Zeichnung selbstständig mathematische Fragestellungen finden und versuchen diese zu beantworten. Die Sequenz zielt dabei unter anderem auf die Lösung eines Extremwertproblems ab, wobei den Schülerinnen und Schülern die Differentialrechnung noch nicht bekannt ist. Dadurch stellt die Bestimmung des Extremwertes ein Problem dar, für das sie keine algorithmische Lösung kennen. In der Unterrichtssequenz wird deshalb insbesondere die Entwicklung heuristischer Strategien geschult. Der Einsatz des ClassPad, als Hilfsmittel, bietet den Schülerinnen und Schülern verschiedene Möglichkeiten zur numerischen, graphischen und symbolischen Bestimmung des Extremwertes.

2. Methodische und didaktische Vorüberlegungen

Die Unterrichtssequenz ist offen bezüglich des Einbeziehens von Fragestellungen der Schülerinnen und Schüler. Gruppenarbeit dient dazu, dass sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig bei der Problemlösung unterstützen und verschiedene Problemlösevarianten einbezogen werden können. Zudem sollen Vermutungen und Planungen vor und für andere Gruppenmitglieder begründet werden. Durch das Bearbeiten verschiedener Fragestellungen ist eine innere Differenzierung möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollen insbesondere dazu hingeführt werden, gegebene Zeichnungen auch dynamisch zu betrachten und neue Fragestellungen zu generieren.

3. Hinweise/ Mehrwert des ClassPad-Einsatzes

Mithilfe des ClassPad können Zeichnungen durch Erstellen von Animationen dynamisiert werden. Zudem können Werte, die sich beim Ablaufen der Animation verändern, automatisch gemessen, in einer Tabelle angezeigt und graphisch dargestellt werden. Durch die Verwendung des ClassPad erweitern sich die Lösungsmöglichkeiten für Problemstellungen.

4. Unterrichtsorganisation

Die Schülerinnen und Schüler erhalten ein Arbeitsblatt mit folgender Darstellung (Abb. 1). Der Arbeitsauftrag dazu lautet: Welche Fragestellungen fallen dir zu dieser Zeichnung ein?

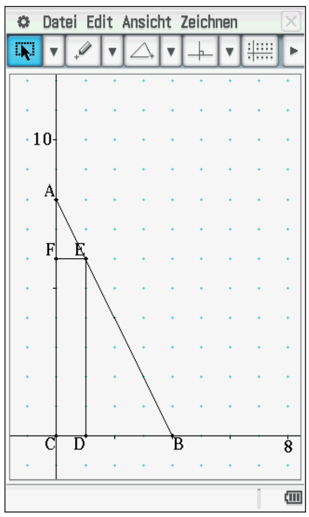


Abbildung 1

Alternativ kann die Situation auch als eActivity auf die ClassPads der Schülerinnen und Schüler geladen werden. Die Lehrperson könnte dem Plenum zum Einstieg auch bereits eine Animation zeigen, bei der sich der Punkt E entlang der Strecke $\overline{AB}$ bewegt. Im Unterricht lässt sich der Einstieg etwa so gestalten, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Fragestellungen zu der vorgelegten Zeichnung auf Kärtchen notieren. Diese werden dann geordnet und passende Kategorien gebildet. In Gruppenarbeit können dann verschiedene Fragestellungen bearbeitet werden. Die Gruppen sollen dazu angeregt werden, eine

Lösung und möglichst auch alternative Lösungswege zu finden. Zudem sollen sie sich auch weiterführende Fragen zu der Zeichnung überlegen.

Einige Beispiele für Fragestellungen, die von Schülerinnen und Schülern formuliert wurden, sind in der folgenden Übersicht dargestellt.

Zeichnung **statisch** betrachtet

Aufgaben zur Berechnung von Geradengleichungen

- Welche Funktionsgleichung hat die Gerade, auf der die Strecke $\overline{AB}$ liegt?

Aufgaben zur Berechnung von Flächeninhalten und Verhältnissen

- Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck $CDEF$?
- Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck CBA?
- Welchen Anteil haben die Flächeninhalte der Dreiecke DBE und FEA (einzeln bzw. zusammen) am Flächeninhalt des großen Dreiecks CBA)?

Aufgaben zu Winkelberechnungen

- Wie groß sind die Winkel $\angle FEA$, $\angle EAF$, $\angle DBE$ und $\angle BED$?
- Wie groß sind die Winkel $\angle AFE$, $\angle EDB$, $\angle FCD$, $\angle DEF$?

Aufgaben zu Verhältnisberechnungen

- Können durch Anwendung der Strahlensätze Aussagen über Verhältnisse von bestimmten Strecken zueinander begründet werden?

Zeichnung **dynamisch** betrachtet (z. B. könnten sich die Punkte A, B und E bewegen, wobei $CDEF$ weiterhin als Rechteck betrachtet wird)

Aufgaben zur Extremwertberechnung

- Für welche Koordinaten von E ist der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten und welchen Wert hat der größte Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$?

Aufgaben zur Berechnung von Flächeninhalten und Verhältnissen

- Welches Rechteck hat einen bestimmten vorgegebenen Flächeninhalt?
- Für welche Koordinaten von E sind die Flächeninhalte der kleinen Dreiecke DBE und DCA gleich groß?
- Welche Flächeninhalte haben das Rechteck $CDEF$ und das Dreieck CBA in Abhängigkeit von der Position des Punktes E?
- Welche Koordinaten hat der Punkt E, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks DBE doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks FEA ist?
- Können die Flächeninhalte des Dreiecks DBE und des Rechtecks $CDEF$ gleich groß werden?
- Für welche Koordinaten von E ist der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CBA?

Aufgaben zur Ähnlichkeit von Dreiecken

- Wie ist die Beziehung zwischen den Dreiecken CBA, DBE und FEA (Ähnlichkeit)?

5. Lösungshinweise

5.1 Zu Aufgaben zur Extremwertberechnung

Der Punkt E bewegt sich auf der Strecke $\overline{AB}$: Für welche Koordinaten von E ist der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten und welchen Wert hat der größte Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$?

5.1.1 Numerische Lösung

Durch Erstellen der Zeichnung im Geometrie-Menü können bei der manuellen Verschiebung des Punktes E auf der Strecke $\overline{AB}$ die Koordinaten von E und die jeweiligen Flächeninhalte vom Rechteck $CDEF$ gemessen werden. Dadurch kann der Wert für den größten Flächeninhalt (Maximum) des Rechtecks näherungsweise gefunden werden.

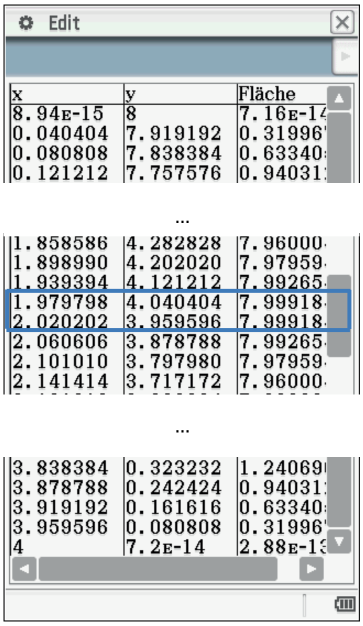


Abbildung 2

Die Erstellung und Verwendung einer Animation, bei der sich der Punkt E auf der Strecke $\overline{AB}$ bewegt, erleichtert die systematische Messung mehrerer Werte, und es ergibt sich dadurch ein guter Näherungswert für den größten Flächeninhalt des Rechtecks. Dabei wird davon ausgegangen, dass bei der Verschiebung des Punktes E auf der Strecke $\overline{AB}$ $CDEF$ stets ein Rechteck bleibt.

Während der Animation können die Koordinaten von E an der jeweiligen Position sowie der zugehörige Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ automatisch erfasst werden. In Abbildung 2 sind Ausschnitte aus den Messungen dargestellt, die durch Auswählen des jeweils zu messenden Objektes und Verwenden der ▤-Taste angezeigt werden: In der ersten (x-Wert) und zweiten (y-Wert) Spalte werden die jeweiligen Koordinaten des Punktes E angezeigt, während dieser auf der Strecke $\overline{AB}$ wandert. Die dritte Spalte gibt den jeweils zu der Position des Punktes E zugehörigen Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ wieder.

Die Näherungswerte für den größten Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ sowie die zugehörigen Koordinaten von E sind hervorgehoben. Je mehr Animationsschritte (bis 100) eingestellt werden, desto besser wird die Näherung.

5.1.2 Graphische Lösung

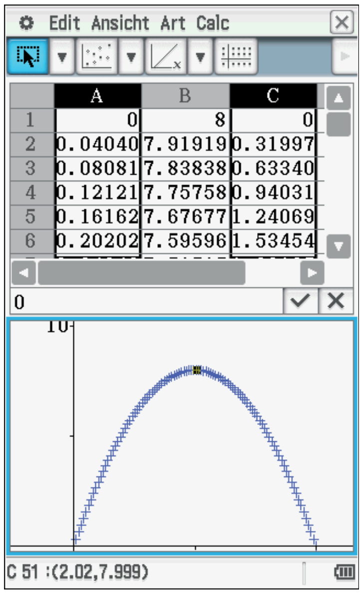


Abbildung 3

Die gemessenen Werte, hier die x-Werte des Punktes E und die zugehörigen Flächeninhalte des Rechtecks $CDEF$, werden in das Tabellenkalkulationsprogramm des ClassPad kopiert, und es wird eine Streuungsgraphik aus diesen Werten erzeugt (Abb. 3). Es ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel. Ein Näherungswert für den größten Flächeninhalt und der zugehörige x-Wert des Punktes E können angezeigt werden, indem im Graphikfenster der Scheitelpunkt des Graphen ausgewählt wird.

5.1.3 Symbolische Lösung

Der größte Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ (Extremwert) kann auch symbolisch berechnet werden. Dafür werden die Gleichung für die Gerade, auf der die Strecke $\overline{AB}$ liegt: $g(x) = -2 \cdot x + 8$ (Abb. 4) und die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Rechtecks $CDEF$ aufgestellt. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist das Produkt des jeweiligen x-Wertes von D bzw. E (entspricht der Länge der Strecke $|\overline{CD}|$ bzw. $|\overline{FE}|$) und dem jeweiligen y-Wert von F bzw. E (entspricht Länge der Strecke $|\overline{CF}|$ bzw. $|\overline{DE}|$). Also ist der Flächeninhalt des Rechtecks: $A(x) = x \cdot y$. Für y kann $g(x) = -2 \cdot x + 8$ eingesetzt werden:

$$A(x) = x \cdot (-2 \cdot x + 8) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x.$$

Unter Verwendung dieser Gleichung gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Koordinaten vom Punkt E zu ermitteln, für die das Rechteck $CDEF$ den größten Flächeninhalt hat (a bis d).

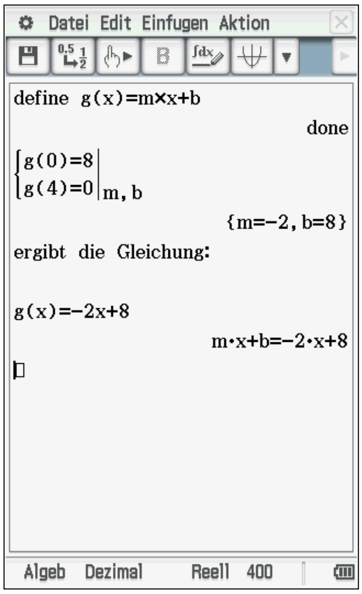


Abbildung 4

a) Berechnung des Scheitelpunktes mithilfe der Nullstellen

Die Nullstellen der Parabel mit der Gleichung $A(x) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ können berechnet werden. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes muss in der Mitte zwischen den Nullstellen der Parabel liegen, daher wird der Mittelwert der Nullstellen berechnet (Abb. 5). Eine weitere Möglichkeit ist die Bestimmung der Nullstellen mittels Graphikmenü (Abb. 6).

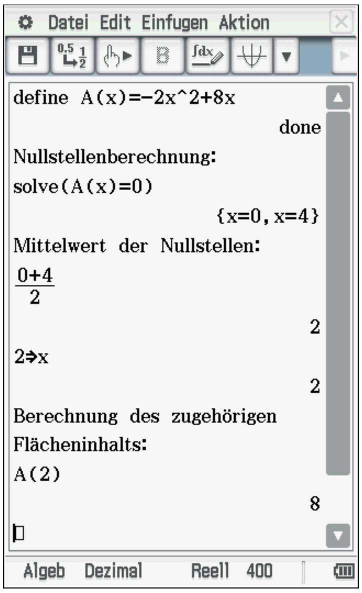


Abbildung 5

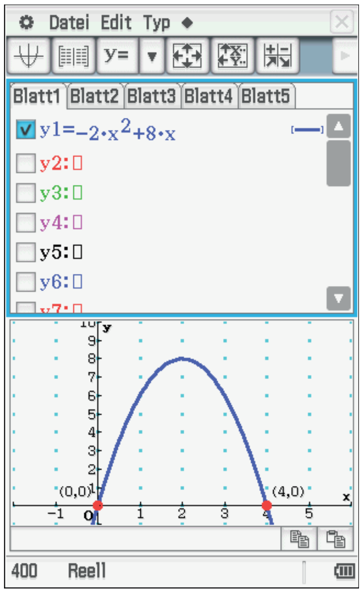


Abbildung 6

Dann muss der zugehörige y-Wert zu $x = 2$ berechnet werden: $g(2) = -2 \cdot x + 8 = 4$.

b) Berechnung des Scheitelpunktes

Der Scheitelpunkt der Parabel mit der Gleichung $A(x) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ kann mittels der quadratischen Ergänzung berechnet werden:

$$-2 \cdot (x^2 - 4 \cdot x) \;\Big|\; + \left(-\tfrac{4}{2}\right)^2 \;\Big|- \left(-\tfrac{4}{2}\right)^2$$

$$-2 \cdot (x^2 - 4 \cdot x + \left(-\tfrac{4}{2}\right)^2 - (-2) \cdot \left(-\tfrac{4}{2}\right)^2 = -2 \cdot (x-2)^2 + (-2) \cdot 4 = -2 \cdot (x-2)^2 + 8.$$

Scheitelpunktform; Scheitelpunkt: $S(2\,|\,8)$

Berechnung des y-Wertes zu $x = 2$: $g(2) = -2 \cdot x + 8 = 4$.

c) Kombination der symbolischen mit der graphischen Ermittlung des Maximums

Den Graphen mit der Gleichung $A(x) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ zeichnen und das Maximum anzeigen lassen (Abb. 7).

Dann den zugehörigen y-Wert zu $x = 2$ ermitteln: $g(2) = -2 \cdot x + 8 = 4$.

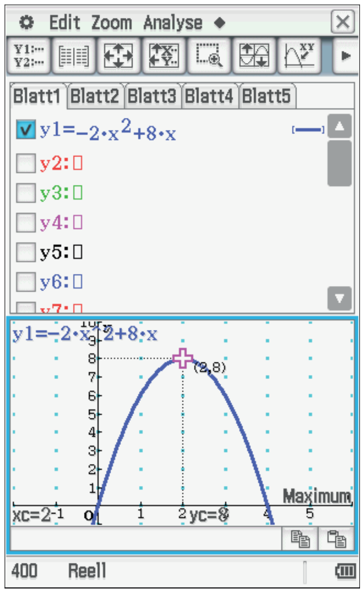


Abbildung 7

d) Extremwertberechnung mit Differentialrechnung

Diese Möglichkeit ist den Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung dieser Aufgabe in der 10. Klasse noch nicht bekannt.

Der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ ist am größten, wenn $E = (2|4)$ ist.

Das Rechteck $CDEF$ besitzt in diesem Fall den größten Flächeninhalt (Abb. 2 bis 7), wenn die Seite $\overline{CD}$ des Rechtecks $CDEF$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{CB}$ des Dreiecks ABC und die Seite $\overline{CF}$ des Rechtecks $CDEF$ halb so lang wie die Seite $\overline{CA}$ des Dreiecks ABC ist.

6. Variationen der Objekte und Fragestellungen

Die Schülerinnen und Schüler können nun überlegen, wie Objekte in der Zeichnung variiert werden und welche Fragestellungen sich daraus ergeben könnten. In Gruppen wird jeweils eine Fragestellung bearbeitet.

Beispiele zur Variation von Objekten in der Zeichnung sind im Folgenden aufgeführt. Die sich daraus ergebenden Fragestellungen lassen sich nach Kategorien für Variationsmöglichkeiten ordnen.

Zeichnung dynamisieren

- Was kann festgestellt werden, wenn sich der Punkt B entlang der x-Achse bewegt, wobei $CDEF$ weiterhin ein Rechteck bleibt? Wie verändert sich der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ in Bezug auf die Position des Punktes E?
- Was passiert, wenn sich mehrere Punkte gleichzeitig bewegen?

Objekte austauschen

- Was ändert sich, wenn anstatt einer Strecke (Geraden) z. B. ein Parabelstück verwendet wird, auf dem sich ein Eckpunkt eines Rechtecks entlang bewegt?
- Es könnte eine andere Figur (rechtwinkliges/ allgemeines Dreieck, Trapez, ...) eingeschlossen sein.

Werte und Positionen verändern

- Wie verändert sich der Flächeninhalt, wenn beispielsweise $B = (4|0)$ und $A = (0|4)$? Was kann bei Veränderung der Koordinaten der Punkte A und B beobachtet werden?
- Trifft die Beobachtung auch für andere Koordinaten der Punkte A und B zu, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten ist, wenn $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ sind?
- Das Dreieck CBA könnte an einer anderen Stelle im Koordinatensystem liegen, so dass die Koordinatenachsen keine Seiten des Dreiecks sind.

Verändern von Eigenschaften der vorgegebenen Objekte

- Was passiert, wenn $CDEF$ nicht mehr als Rechteck betrachtet wird, sondern als allgemeines Viereck? Wann ist dann das Dreieck DBE bzw. FEA ein gleichschenkliges/ spitzwinkliges/ stumpfwinkliges Dreieck? Wie sieht dann das andere Dreieck aus?

7. Lösungshinweise zu Aufgaben der Kategorie „Objekte austauschen“

7.1 Parabelstück statt Gerade als Begrenzung

Was ändert sich, wenn anstatt einer Strecke, z. B. ein Parabelstück mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 9$ mit $0 \leq x \leq 3$ (Abb. 8) verwendet wird, auf dem sich der Eckpunkt E eines Rechtecks entlang bewegt?

Zur Lösung dieser Aufgabe kann wie bei der Aufgabe mit der Geraden als Begrenzung des Rechtecks vorgegangen werden (numerisch durch Verwendung einer Animation, graphisch, symbolisch).

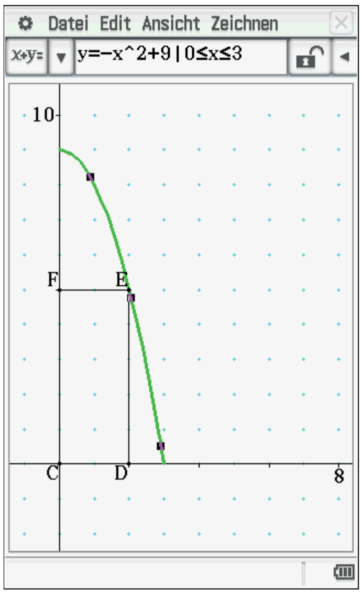


Abbildung 8

7.1.1 Numerische Lösung

Ein Näherungswert für den größten Flächeninhalt des Rechtecks ist 10,391 mit den folgenden Koordinaten von $E = (1{,}748|5{,}944)$ (Abb. 9).

7.1.2 Symbolische Vorgehensweise mit graphischer Vorgehensweise kombiniert

Die Parabelgleichung lautet: $f(x) = -x^2 + 9$. Die Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts ist: $A(x) = x \cdot y$. Einsetzen der Parabelgleichung für y ergibt:

$$A(x) = (-x^2 + 9) = -x^3 + 9 \cdot x.$$

Dann kann das Maximum des Graphen angezeigt werden (Abb. 10).

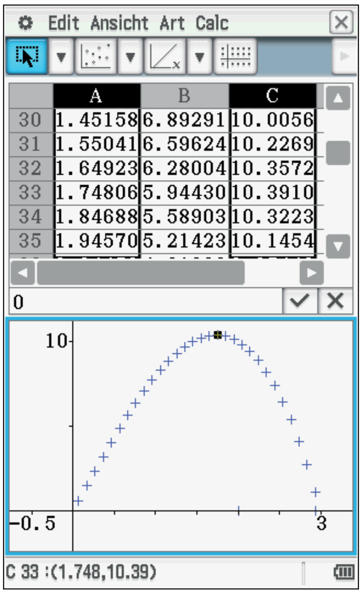


Abbildung 9

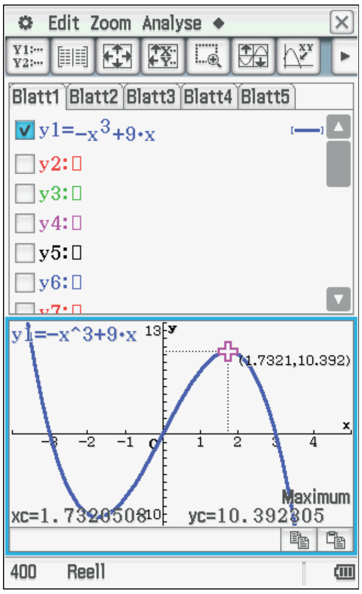


Abbildung 10

7.2 Eingeschlossenes rechtwinkliges Dreieck statt Rechteck

Ein rechtwinkliges Dreieck CDE ist eingeschlossen. Was passiert mit dem Dreieck CEA, wenn das Dreieck CDE denselben Flächeninhalt wie DBE besitzt?

7.2.1 Symbolische Lösung

Die Dreiecke CDE und DBE haben folgende Flächeninhalte: $A_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{ED}$ und $A_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{ED}$. Damit diese Dreiecke denselben Flächeninhalt haben, muss $\overline{CD} = \overline{DB}$ gelten. Der Flächeninhalt des Dreiecks CEA ist dann: $A_{CEA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{FE}$ wobei gilt, dass $\overline{FE} = \overline{CD}$, also $A_{CEA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD}$.

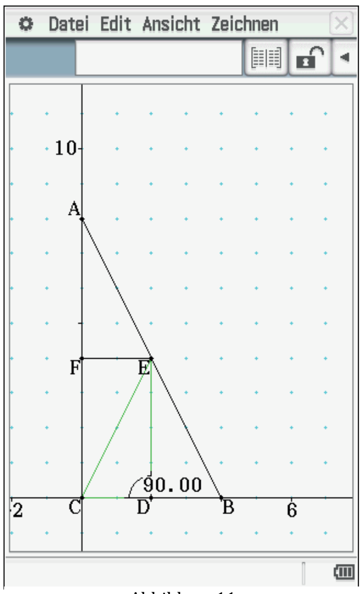


Abbildung 11

Die Dreiecke CDE und DBE sind kongruent zueinander, da sie in den Längen zweier entsprechender Seiten ($|\overline{CD}| = |\overline{DB}|$ und der gemeinsamen Seite $|\overline{DE}|$) und der Größe des von diesen Seiten jeweils eingeschlossenen Winkels übereinstimmen (90°-Winkel). Zudem sind die Dreiecke CDE

und CEF ebenfalls kongruent zueinander, da sie in den Längen von drei entsprechenden Seiten übereinstimmen ($|\overline{FE}| = |\overline{CD}|, |\overline{DE}| = |\overline{CF}|$, gemeinsame Seite $\overline{|CE|}$). Auch die Dreiecke DBE und FEA sind kongruent zueinander, da sie in der Länge von einer entsprechenden Seite ($|\overline{DB}| = |\overline{FE}|$) und in den Größen zweier entsprechender Winkel übereinstimmen ($\angle DEB = \angle FAE$ (Stufenwinkel), 90°-Winkel).

Es handelt sich insgesamt also um vier kongruente Dreiecke. Das Dreieck CEA ist gleichschenklig, da es aus zwei dieser kongruenten Dreiecke besteht. Daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks CEA doppelt so groß wie der des Dreiecks CDE bzw. DBE (Abb. 11).

8. Lösungshinweise zu Aufgaben „Werte und Positionen verändern“

8.1 Größter Flächeninhalt des Rechtecks, wenn $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$?

Trifft die Beobachtung, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten ist, wenn $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ sind, auch für andere Koordinaten von A und B zu?

Bei der Berechnung des größten Flächeninhalts des Rechtecks $CDEF$ in der ersten Aufgabe 5.1 (Abb. 2 bis 7) hat sich der größte Flächeninhalt ergeben als die Seite $\overline{CD}$ des Rechtecks $CDEF$ halb so lang wie die Seite $\overline{CB}$ und die Seite $\overline{CF}$ halb so lang wie die Seite $\overline{CA}$ war.

Nun könnte geprüft werden, ob diese Beobachtung, dass $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ sind, auch zutrifft, wenn die Punkte A und B andere Koordinaten besitzen. Dazu wird die Zeichnung in Abbildung 12 allgemein aufgefasst. Im Folgenden sind alternative Vorgehensweisen dargestellt.

8.1.1 Symbolische Lösung

Die Gleichung der Gerade, auf der die Punkte $A(0|a)$ und $B(b|0)$ liegen, wird aufgestellt: $h(x) = -\frac{a}{b} \cdot x + a$. Anschließend wird der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ allgemein berechnet:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{a}{b} \cdot x + a\right) = -\frac{a}{b} \cdot x^2 + x \cdot b.$$

Dann kann der Scheitelpunkt der Parabel als Mittelwert der Nullstellen ermittelt werden. Die Nullstellen liegen bei $x_0 = 0$ und $x_1 = b$.

Der Mittelwert der Nullstellen ist: $x = \frac{b}{2}$. Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich: $y = \frac{a}{2}$. Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S\left(\frac{b}{2}\middle|\frac{a}{2}\right)$. Das bedeutet, dass der Flächeninhalt

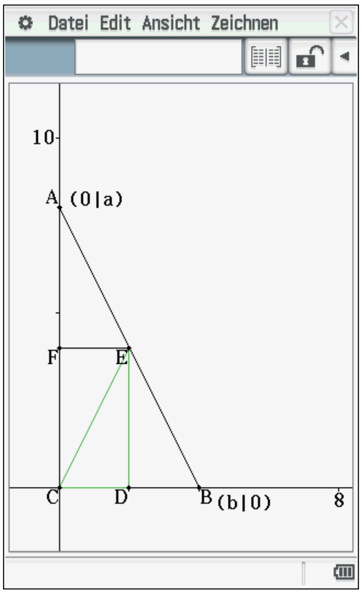


Abbildung 12

jedes Rechtecks $CDEF$ am größten ist, wenn die Seite $\overline{CD}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{CB}$ und die Seite $\overline{CF}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{CA}$.

8.1.2 Symbolische Lösung kombiniert mit graphischer Lösung

a) Verwendung der Strahlensätze und experimentelle Ermittlung der Scheitelpunkte

Der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ ist: $A = \overline{FE} \cdot \overline{FC}$. Um Beziehungen zwischen den Seiten des Rechtecks $CDEF$ und des Dreiecks ABC aufzustellen, wird der zweite Strahlensatz verwendet: $\frac{\overline{FE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AC} - \overline{FC}}{\overline{AC}}$ nach $\overline{FC}$ aufgelöst ergibt sich: $\overline{FC} = \overline{AC} - \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \overline{FE}$. Dann ist der Flächeninhalt: $A = \overline{FE} \cdot \left(\overline{AC} - \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \overline{FE}\right) = \overline{FE} \cdot \overline{AC} - \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \overline{FE}^2$.

Diese Gleichung kann in das Graphikmenü des ClassPad eingegeben werden, wobei $\overline{FE} = x$, $\overline{AC} = a$ und $\overline{CB} = b$ gesetzt werden: $A(x) = x \cdot a - \frac{a}{b} \cdot x^2$. Bei der experimentellen Vorgehensweise werden für a und b verschiedene Werte in: $A(x) = x \cdot a - \frac{a}{b} \cdot x^2$ eingesetzt und jeweils das Maximum bestimmt. Der x-Wert des Maximums gibt dabei jeweils die Länge der Strecke $|\overline{FE}| = x$ an und der y-Wert des Maximums zeigt den Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ in Abhängigkeit von den Seitenlängen $|\overline{AC}| = a$ und $|\overline{CB}| = b$ an. Die zugehörige Länge der Seite $|\overline{FC}|$ kann dann mithilfe der Gleichung $\overline{FC} = \frac{A}{\overline{FE}}$ berechnet werden, die durch Auflösen der Formel $A = \overline{FE} \cdot \overline{FC}$ nach $\overline{FC}$ entsteht.

Wenn nun jeweils verschiedene Werte für a und b eingesetzt werden (also verschiedene Seitenlängen für $|\overline{AC}|$ und $|\overline{CB}|$), so ergibt sich, dass die x-Werte der Maxima (entsprechende Längen der Seite $|\overline{FE}|$) jeweils halb so groß sind, wie die Werte von b (vgl. Abb. 13 bis 17). Bei der Berechnung der zugehörigen Längen der Seite $|\overline{FC}|$ mittels der Gleichung $\overline{FC} = \frac{A}{\overline{FE}}$ fällt auf, dass die Seite $\overline{FC}$ jeweils halb so lang ist wie die Seite $a = \overline{AC}$. Im Folgenden ist jeweils die Parabel bzw. Parallele zur y-Achse eingezeichnet, auf der die Maxima der dargestellten Parabeln liegen (Abb. 13 bis 17).

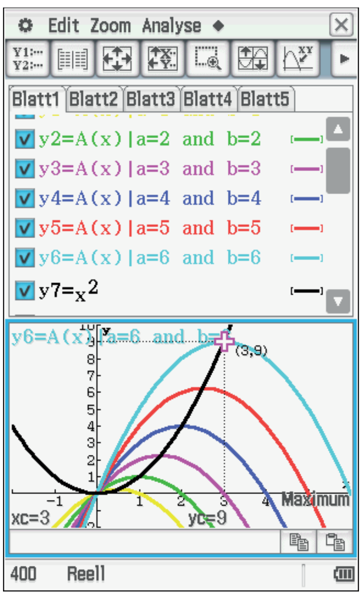


Abbildung 13

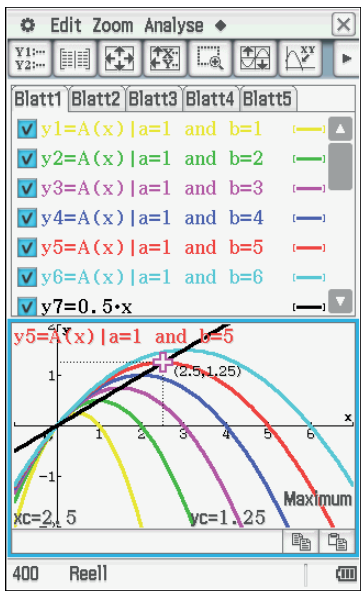


Abbildung 14

bei $a = 1$ und $b = 1$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 0{,}5$

$\overline{FC} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$

bei $a = 6$ und $b = 6$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 3$

$\overline{FC} = \frac{9}{3} = 3$

bei $a = 1$ und $b = 5$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 2{,}5$

$\overline{FC} = \frac{1{,}25}{2{,}5} = 0{,}5$

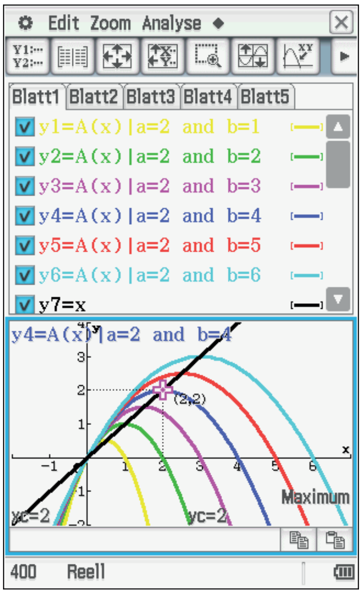


Abbildung 15

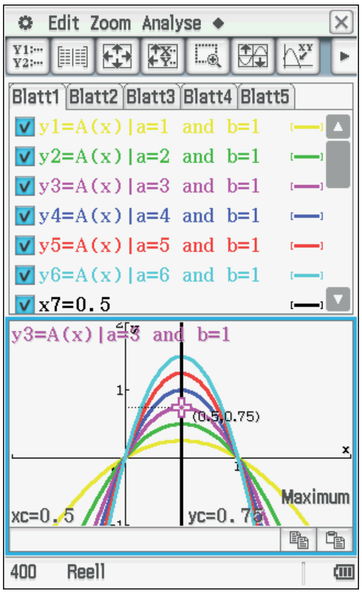


Abbildung 16

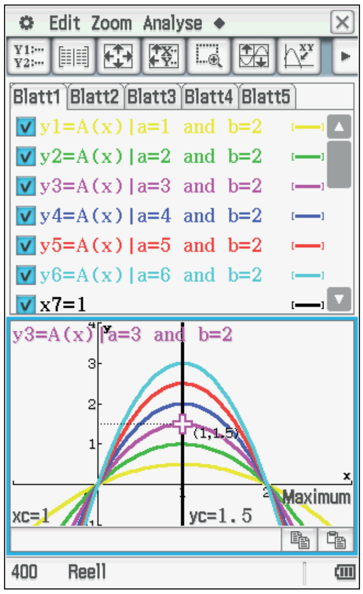


Abbildung 17

bei $a = 2$ und $b = 4$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 2$

$\overline{FC} = \frac{2}{2} = 1$

bei $a = 3$ und $b = 1$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 0{,}5$

$\overline{FC} = \frac{0{,}75}{0{,}5} = 1{,}5$

bei $a = 3$ und $b = 2$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 1$

$\overline{FC} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5$

Daraus lässt sich schließen, dass $\overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}b$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}a$.

b) Unterteilung des Rechtecks in Dreiecke

Die Unterteilung des Rechtecks $\boldsymbol{CDEF}$ in Dreiecke (siehe Abb. 11) ist eine weitere Möglichkeit zu zeigen, dass $\boldsymbol{\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}}$ und $\boldsymbol{\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}}$ ist.

9. Schlussbemerkung

Hier kann natürlich nur eine Auswahl an möglichen Fragestellungen und Variationsmöglichkeiten zu der gegebenen Zeichnung aufgeführt werden. Es kann bzw. wird so sein, dass Ihre Schülerinnen und Schüler ähnliche, aber auch ganz andere Fragestellungen entwickeln. Vor der Durchführung im Unterricht ist es hilfreich, sich selbst mögliche Fragestellungen und Variationsmöglichkeiten zu überlegen.

10. Literatur

Brown, S. I., Walter, M. I.: The art of problem posing. Philadelphia, Pa., Franklin Inst. Press 1983.

Griesel, G., Postel, H., Suhr, F.: Elemente der Mathematik 11. Einführung in die Analysis. 4. Auflage. Schroedel Verlag, Hannover 2005.

Götz, H. u. a.: Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien 11. 1. Auflage. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2009.

Schupp, H.: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim 2002.

Iterative Lösung von Bewegungsgleichungen

Andreas Schneider

Kurzfassung des Inhalts:
Der freie Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstands wird mit einem einfachen numerischen Verfahren untersucht. Die Umsetzung erfolgt mithilfe von Tabellenkalkulation. Insbesondere studiert man den Einfluss verschiedener Parameter (Masse, Querschnittsfläche, …) auf die Bewegung.

Klassenstufe(n):
Jahrgangsstufe 10 am bayerischen Gymnasium

Lernziele:
- Strukturieren eines Problems durch Iterationsformeln
- Umsetzung des Iterationsschemas in Tabellenkalkulation
- Den Einfluss der wesentlichen Parameter auf die Bewegung qualitativ beschreiben können

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Keine (Grundlagen der Tabellenkalkulation sind aber hilfreich.)

Zeitbedarf:
Ca. 5 Unterrichtsstunden

Sonstige Materialien:
Keine

Vorbemerkungen

Ein Thema aus der Physik

Obwohl es in dieser Handreichung in erster Linie um den Einsatz von CAS-Rechnern im Mathematikunterricht geht, wird hier eine Anwendung aus dem Physikunterricht der Jahrgangsstufe 10 thematisiert, da auch die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von CAS im naturwissenschaftlichen Unterricht gezeigt werden sollen. Vielleicht gelingt es auf diese Weise, Lehrkräfte anzusprechen, die bislang den Gebrauch von CAS eher kritisch sehen.

Die iterative Lösung von Bewegungsgleichungen ist im Physiklehrplan der zehnten Klasse fest verankert. Mathematisch gesehen handelt es sich hierbei um die **numerische Lösung von Differentialgleichungen**. Für den Mathematikunterricht der Oberstufe ergibt sich eine wertvolle **Propädeutik für die Integralrechnung**. Zudem werden die Schülerinnen und Schüler mit dem wichtigen Werkzeug der **Tabellenkalkulation** vertraut, das in alle zugelassenen CAS-Systeme integriert ist.

Inhalt der Unterrichtssequenz und didaktische Überlegungen

In der Unterrichtssequenz soll exemplarisch der freie Fall unter Einbeziehung des Luftwiderstandes mit realistischen Werten „durchgerechnet“ werden. Da mit zunehmender Fallgeschwindigkeit die Luftreibungskraft wächst, ist bei diesem Vorgang die *Beschleunigung nicht konstant*. Folglich kann die bekannte geschlossene Lösung für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung ($v(t) = at$ und $x(t) = \frac{a}{2}t^2$) nicht verwendet werden. Eine exakte mathematische Lösung des Problems würde die Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung erfordern, ist also somit für Schülerinnen und Schüler, die noch nicht einmal Grundlagen der Differentialrechnung kennen, nicht möglich.

Durch Zerlegung der Bewegung in kleine Zeitschritte ist es jedoch möglich, eine brauchbare numerische Lösung mit elementarer Mathematik zu erhalten. In einem *Iterationsschema* werden die Werte von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Ort für jeden Zeitschritt neu berechnet. Für diese Berechnung ist Tabellenkalkulation ein passendes, leicht zu bedienendes Werkzeug. Unter Anleitung des Lehrers entwickeln die Schülerinnen und Schüler das Iterationsschema und führen zunächst *einige Iterationsschritte von Hand* durch, um die Struktur der Rechnung nachvollziehen zu können. Erst dann wird die Iteration mithilfe der Tabellenkalkulation durchgeführt. Dabei werden die Einflussgrößen auf die Fallbewegung (Masse, Querschnittsfläche, …) zunächst konstant gehalten. In diesem Schritt erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass die Beschleunigung während der Fallbewegung immer weiter abnimmt, bis sich eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit einstellt.

Im nächsten Schritt sollen die Schülerinnen und Schüler untersuchen, wie sich *Variationen der Einflussgrößen* Masse und Querschnittsfläche auf den Verlauf der Bewegung und die Maximalgeschwindigkeit auswirken. Durch diese *dynamische Betrachtungsweise* können die Schülerinnen und Schüler schließlich die Frage klären, ob schwere Körper „in Wirklichkeit“ doch schneller fallen als leichte.

Mehrwert des TC-Einsatzes

Der Mehrwert bei Verwendung eines Taschencomputers besteht darin, dass jede Schülerin bzw. jeder Schüler die Iteration selbst durchführen kann. Bei der Variation der Einflussgrößen können die Schülerinnen und Schüler einzeln oder in Kleingruppen selbstständig arbeiten und eigenständig Hypothesen aufstellen und prüfen.

Die Einführung in Tabellenkalkulation ist schließlich ein nützlicher „spin off“.

Freier Fall mit Luftwiderstand

Aufgabenstellung

Betrachtet wird der freie Fall eines Fallschirmspringers während der ersten 15 Sekunden, bevor er seinen Schirm aufspannt. Zu bestimmen sind Ort und Geschwindigkeit des Springers in Abhängigkeit von der Zeit. Naheliegende konkrete Fragestellungen: Welche Maximalgeschwindigkeit erreicht der Springer? Welchen Einfluss haben Masse, Querschnittfläche und weitere relevante Größen?

Realistische Beispieldaten: (Vgl. Fokus Physik 10, S. 78 ff)

$m = 100\ kg$ (Masse des Springers samt Ausrüstung)

$A = 0{,}80\ m^2$ (maximale Querschnittsfläche in Fallrichtung)

$cw = 1{,}1$ (Widerstandsbeiwert bei maximaler Querschnittsfläche in Fallrichtung)

$\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ (Dichte der Luft)

Physikalische Analyse

Zunächst muss den Schülerinnen und Schülern die Formel zur Berechnung der Luftwiderstandskraft mitgeteilt und erläutert werden: $F_L = \frac{c_w A \rho}{2} v^2$.

Die Proportionalität des Luftwiderstands sowohl zur Querschnittsfläche des sich bewegenden Körpers als auch zur Dichte des umgebenden Mediums ist ohne Weiteres nachzuvollziehen. Dass ferner verschiedene Profilformen unterschiedlich windschnittig sind, ist ebenfalls unmittelbar einsichtig. Der Einfluss des Profils wird mit dem Widerstandsbeiwert bzw. c_w-Wert berücksichtigt. Dieser Begriff ist technisch interessierten Schülerinnen und Schülern aus folgendem Kontext bekannt: „Je geringer der c_w-Wert ist, desto windschnittiger ist ein Fahrzeug.“ Die für die folgenden Berechnungen entscheidende v^2-Abhängigkeit des Luftwiderstands ist allerdings nicht intuitiv verständlich, wenngleich Alltagserfahrungen zumindest für einen überproportionalen Einfluss der Geschwindigkeit sprechen. Entsprechende Experimente im Windkanal zur Bestätigung der Formel für F_L können in der Schule kaum mit vernünftigem Aufwand durchgeführt werden, sind aber einfach zu beschreiben.

Unter Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzes erhält man eine Formel für die Beschleunigung. Diese hängt von v ab und ist somit nicht konstant. Als Abkürzung verwenden wir im Folgenden: Bremsparameter $b = \frac{c_w A \rho}{2m}$.

Kraftgesetz:	$F = mg - F_L = mg - \frac{c_w A \rho}{2} v^2$
Beschleunigung:	$a = \frac{F}{m} = g - \frac{c_w A \rho}{2m} v^2 = g - bv^2 = 9{,}81 \frac{m}{s^2} - 5{,}72 \cdot 10^{-3} m^{-1} \cdot v^2$

Iterationsschema

Die Bewegung wird in so kleine Zeitschritte Δt zerlegt, dass man in guter Näherung Beschleunigung und Geschwindigkeit während des Zeitintervalls als konstant ansehen kann. Aus den aktuellen Werten von a_n und v_n wird der nächste Geschwindigkeitswert berechnet:

$$v_{n+1} = v_n + a_n \cdot \Delta t$$

Hieraus ergibt sich der nächste Wert für die Beschleunigung:

$$a_{n+1} = g - b \cdot v_{n+1}^2$$

Und damit hat man die Startwerte für den nächsten Iterationsschritt, usw.

Um den Schülerinnen und Schülern das Schema verständlich zu machen, sollten sie einige Zeilen „von Hand“ durchrechnen, also lediglich mithilfe eines gewöhnlichen arithmetischen Taschenrechners. Dazu ist ein Arbeitsblatt nach folgendem Schema hilfreich:

Arbeitsblatt

Ergänze die Tabelle nach dem vorgegebenen Iterationsschema!

Zeitschritt $\Delta t = 0{,}5\ s$

Bremsparameter $b = 0{,}00572\ m^{-1}$

Schritt	Zeit t in s	Geschwindigkeit v in ms^{-1}	Beschleunigung a in ms^{-2}
0 Startwerte	t_0 0	v_0 0	$a_0 = g$ 9,81
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$ 0,5	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$ 4,91	$a_1 = g - b{v_1}^2$ 9,67
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$a_2 = g - b{v_2}^2$
3			
4			
5			
6			
7			

usw.

Iteration mithilfe von Tabellenkalkulation

Nach der mühsamen Handrechnung sollten die Schülerinnen und Schüler jetzt hinreichend motiviert sein, die Berechnungen durch Verwendung von Tabellenkalkulation zu automatisieren.

Iterationsschema

t in s	v in m/s	a in m/s^2
$t_1 = 0$	$v_1 = 0$	$a_1 = g$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \cdot \Delta t$	$a_2 = g - b \cdot {v_2}^2$
$t_3 = t_2 + \Delta t$	$v_3 = v_2 + a_2 \cdot \Delta t$	$a_3 = g - b \cdot {v_3}^2$

usw.

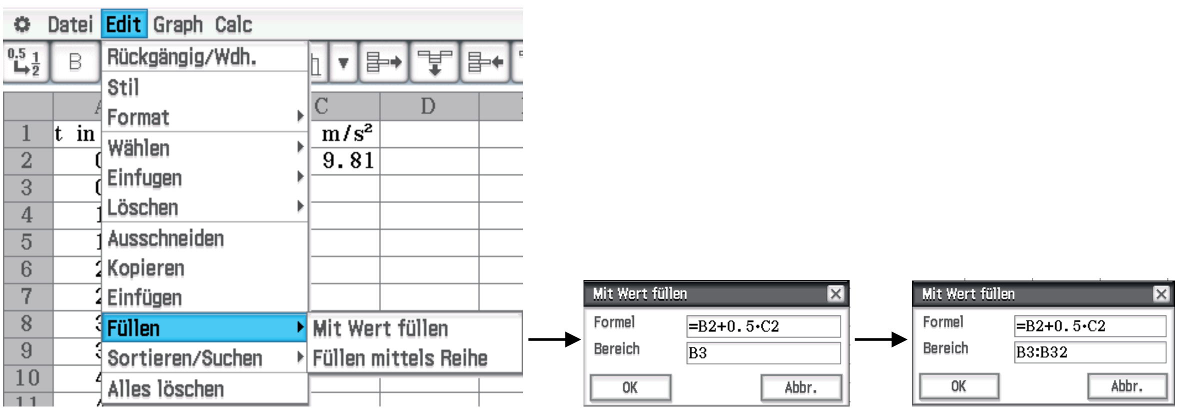
Ausfüllen der Tabelle

Die ersten beiden Zeilen müssen von Hand eingegeben werden. Die Tabellenkalkulation des ClassPad ist weitestgehend analog zu *MS Excel* bzw. *Open Office Calc* zu bedienen, insbesondere, was die *relativen Zellenbezüge* betrifft.

Wir wählen $\Delta t = 0.5$

	A	B	C
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2
2	0	0	9.81
3	$= A2 + 0.5$	$= B2 + C2 \cdot 0.5$	$= 9.81 - 0.00572 \cdot B3\text{^}2$

Um die folgenden Zeilen zu füllen, markiere man eine Zelle mit einer Formel z. B. B3 und wähle dann *Edit→ Füllen→ Mit Wert füllen*. Dann kann man den Spaltenbereich ändern, sodass die Iterationsformel z. B. für den Bereich B3:B32 angewendet wird, also für die ersten 15 Sekunden der Modellrechnung.

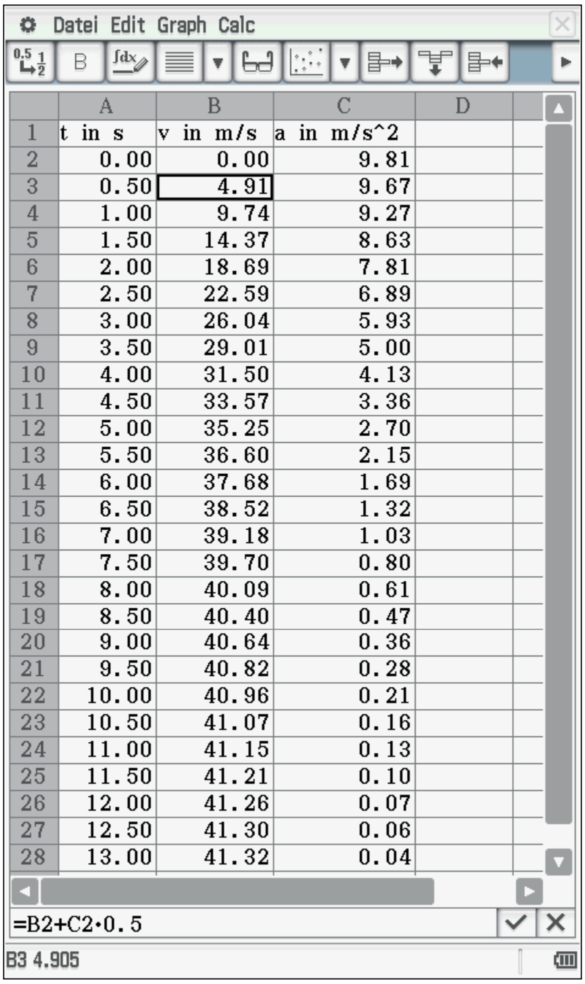


Außerdem sollte man für die Ausgabe eine feste Anzahl von Nachkommastellen einstellen, hier sind zwei Dezimalen sinnvoll:

⚙→ *Grundformat→ Zahlenformat→ Fest 2*

Numerische Ergebnistabelle

Jetzt ergibt sich „auf Knopfdruck" das vollständige Ergebnis der Iteration für den gewählten Zeitabschnitt:



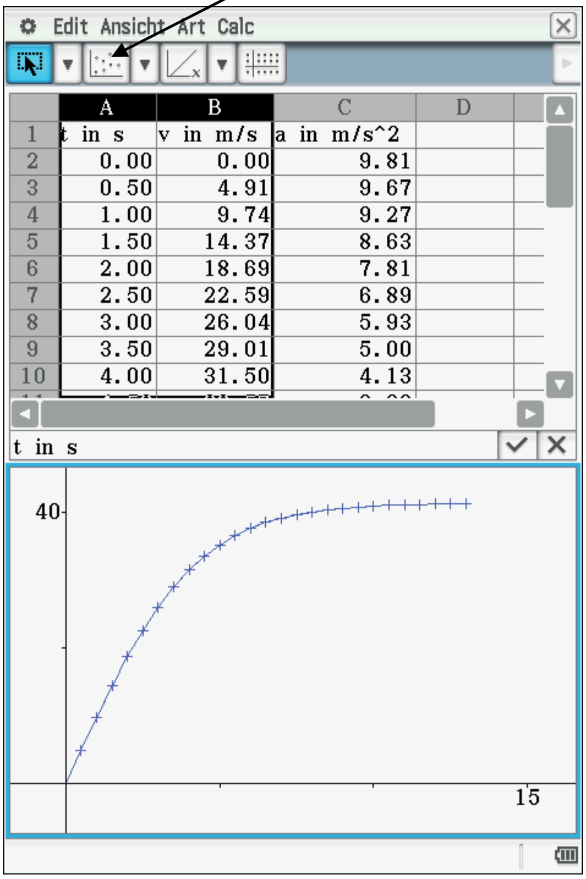
	A	B	C	D
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2	
2	0.00	0.00	9.81	
3	0.50	4.91	9.67	
4	1.00	9.74	9.27	
5	1.50	14.37	8.63	
6	2.00	18.69	7.81	
7	2.50	22.59	6.89	
8	3.00	26.04	5.93	
9	3.50	29.01	5.00	
10	4.00	31.50	4.13	
11	4.50	33.57	3.36	
12	5.00	35.25	2.70	
13	5.50	36.60	2.15	
14	6.00	37.68	1.69	
15	6.50	38.52	1.32	
16	7.00	39.18	1.03	
17	7.50	39.70	0.80	
18	8.00	40.09	0.61	
19	8.50	40.40	0.47	
20	9.00	40.64	0.36	
21	9.50	40.82	0.28	
22	10.00	40.96	0.21	
23	10.50	41.07	0.16	
24	11.00	41.15	0.13	
25	11.50	41.21	0.10	
26	12.00	41.26	0.07	
27	12.50	41.30	0.06	
28	13.00	41.32	0.04	

Natürlich ist eine rein numerische Darstellung der Ergebnisse unanschaulich und unbefriedigend, daher stellen wir das Ergebnis jetzt graphisch dar.

t-v-Diagramm

Um die Ergebnisse als t-v-Diagramm darzustellen, markiere man die Spalten A und B und wähle den Diagrammtyp *Punktdiagramm*. Im Diagrammfenster kann man mit *Ansicht*→ *Verbindungslinien* die einzelnen Punkte zu einem durchgehenden Graphen verbinden.

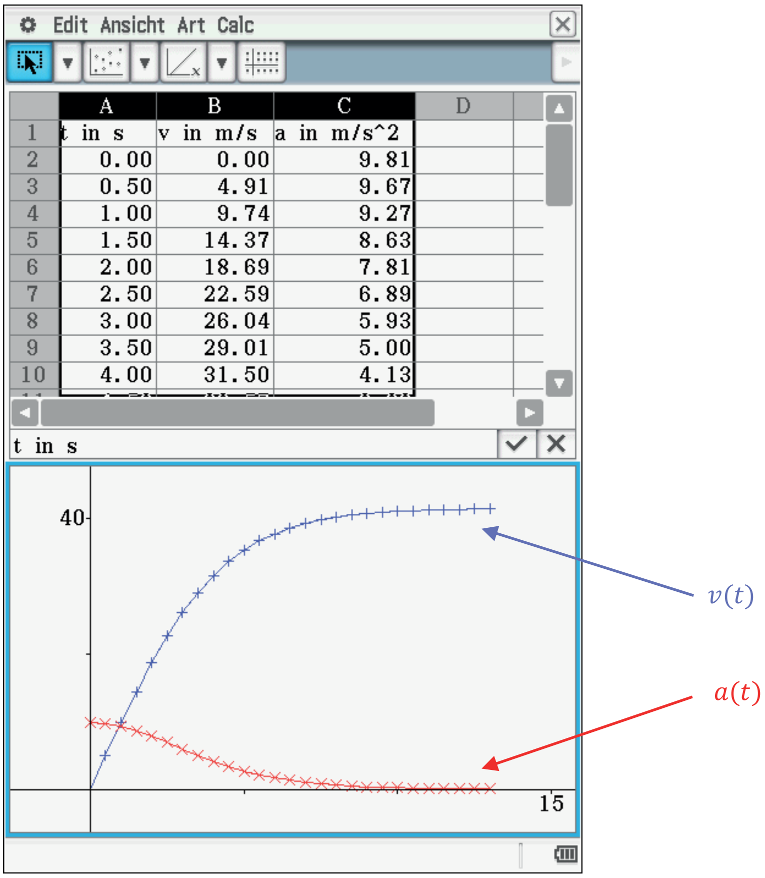
Werkzeug für das *Punktdiagramm*



Man erkennt jetzt deutlich das asymptotische Verhalten von $v(t)$, d. h., dass sich der Springer nach ca. zehn Sekunden mit näherungsweise konstanter Geschwindigkeit bewegt.

t-v-Diagramm und t-a-Diagramm

Möchte man zusätzlich das t-a-Diagramm darstellen, markiere man alle drei Spalten der Ergebnistabelle und wähle wieder den Diagrammtyp *Punktdiagramm*.



	A	B	C	D
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2	
2	0.00	0.00	9.81	
3	0.50	4.91	9.67	
4	1.00	9.74	9.27	
5	1.50	14.37	8.63	
6	2.00	18.69	7.81	
7	2.50	22.59	6.89	
8	3.00	26.04	5.93	
9	3.50	29.01	5.00	
10	4.00	31.50	4.13	

Der visualisierte Zusammenhang zwischen $v(t)$ und $a(t)$ kann auch als Propädeutik für den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung verstanden werden! Insbesondere erkennt man, dass eine näherungsweise konstante Geschwindigkeit mit einem Beschleunigungswert nahe bei null einhergeht.

Berechnung der Ortskoordinate $x(t)$

Bisher wurde die Frage ausgeklammert, welche Strecke der Springer nach einer bestimmten Zeit durchfallen hat. Bevor man in die Details geht, kann man die Fallhöhe nach 15 Sekunden zunächst grob abschätzen. Bei der Betrachtung des t-v-Diagramms erkennt man, dass die Bewegung in erster Näherung in zwei Phasen unterteilt werden kann: Während der ersten fünf Sekunden beschleunigt der Springer einigermaßen gleichmäßig von 0 auf 40 m/s, bewegt sich also mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von ca. 20 m/s. Für die restlichen 10 Sekunden geht man von einer konstanten Geschwindigkeit von 40 m/s aus. Daraus ergibt sich:

$$x(15\,s) \approx \frac{1}{2}\left(0\,\frac{m}{s} + 40\,\frac{m}{s}\right) \cdot 5s + 40\,\frac{m}{s} \cdot 10\,s = 100\,m + 400\,m = 500\,m$$

Der Trick mit der mittleren Geschwindigkeit, der für die Abschätzung der Fallstrecke während der ersten fünf Sekunden genutzt wurde, lässt sich auch für die kleinen Zeitabschnitte der Iteration verwenden: Wir ergänzen unser Schema um eine Spalte, in der die aktuelle Ortskoordinate des Springers nach folgender Iterationsformel berechnet wird:

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}5 \cdot (v_n + \ v_{n+1}) \cdot \Delta t.$$

Iterationsschema:

t in s	v in m/s	a in m/s^2	x in m
$t_1 = 0$	$v_1 = 0$	$a_1 = g$	$x_1 = 0$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \cdot \Delta t$	$a_2 = g - b \cdot {v_2}^2$	$x_2 = x_1 + 0.5 \cdot (v_1 + v_2) \cdot \Delta t$
$t_3 = t_2 + \Delta t$	$v_3 = v_2 + a_2 \cdot \Delta t$	$a_3 = g - b \cdot {v_3}^2$	$x_3 = x_2 + 0.5 \cdot (v_2 + v_3) \cdot \Delta t$

usw.

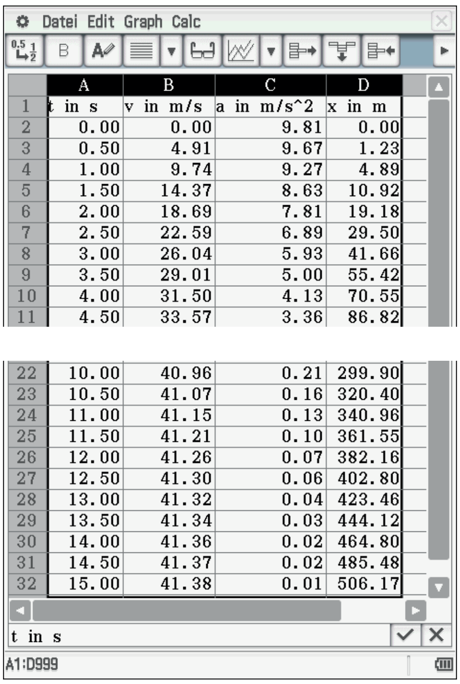
Mit dem Formalismus der Tabellenkalkulation sieht das dann mit $\Delta t = 0{,}5\ s$ folgendermaßen aus:

	A	B	C	D
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2	x in m
2	0	0	9.81	0
3	$= A2 + 0.5$	$= B2 + C2 \cdot 0.5$	$= 9.81 - 0.00572 \cdot B3\text{^}2$	$= D2 + 0.5 \cdot (B2 + B3) \cdot 0.5$

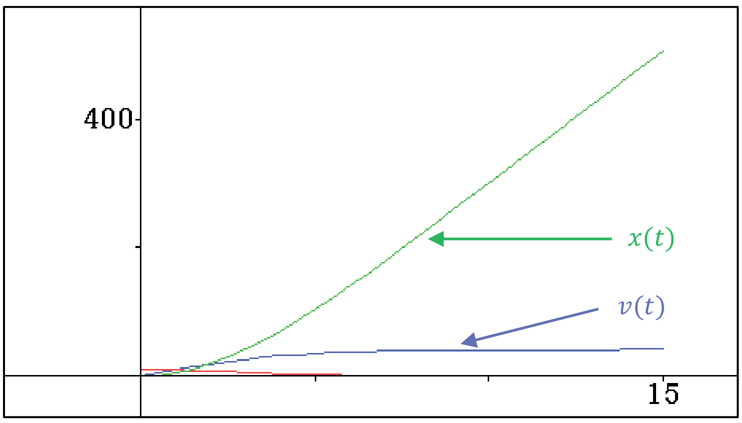
usw.

Die Durchführung der Iteration mit dem ClassPad ergibt folgendes Ergebnis, das wiederum numerisch und graphisch dargestellt wird.

Ort und Geschwindigkeit in einem Diagramm



	A	B	C	D
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2	x in m
2	0.00	0.00	9.81	0.00
3	0.50	4.91	9.67	1.23
4	1.00	9.74	9.27	4.89
5	1.50	14.37	8.63	10.92
6	2.00	18.69	7.81	19.18
7	2.50	22.59	6.89	29.50
8	3.00	26.04	5.93	41.66
9	3.50	29.01	5.00	55.42
10	4.00	31.50	4.13	70.55
11	4.50	33.57	3.36	86.82
22	10.00	40.96	0.21	299.90
23	10.50	41.07	0.16	320.40
24	11.00	41.15	0.13	340.96
25	11.50	41.21	0.10	361.55
26	12.00	41.26	0.07	382.16
27	12.50	41.30	0.06	402.80
28	13.00	41.32	0.04	423.46
29	13.50	41.34	0.03	444.12
30	14.00	41.36	0.02	464.80
31	14.50	41.37	0.02	485.48
32	15.00	41.38	0.01	506.17



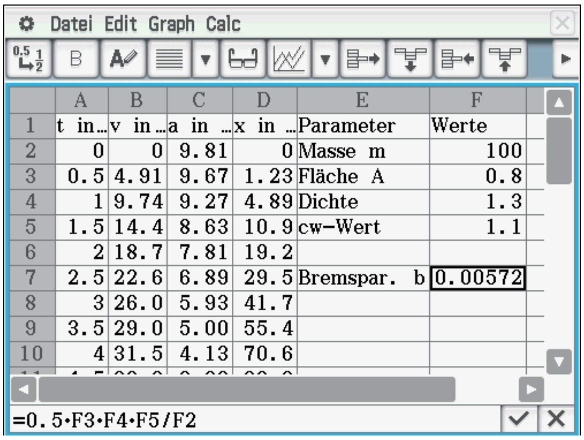
Die Beschleunigungskurve lässt sich bei dieser Skalierung kaum mehr erkennen. Dafür kann man deutlich sehen, dass der Schätzwert $x(15\,s) \approx 500\,m$ erstaunlich gut passt. Als Propädeutik für die Integralrechnung lässt sich ferner zeigen, dass die Stammfunktion einer (näherungsweise) konstanten Funktion eine (näherungsweise) affine Funktion ist.

Variation der Einflussgrößen (dynamische Komponente)

Automatische Berechnung des Bremsparameters

Um den Einfluss der Parameter m, cw, A und ρ auf die Fallbewegung zu untersuchen, bietet es sich an, die Werte dieser Parameter in jeweils eigenen Zellen zu speichern. Im folgenden Beispiel sind dies die Zellen F2 bis F5. Als nächstes wird aus diesen Werten der „Bremsparameter“ b berechnet, der in die Formel für die Beschleunigung eingeht.

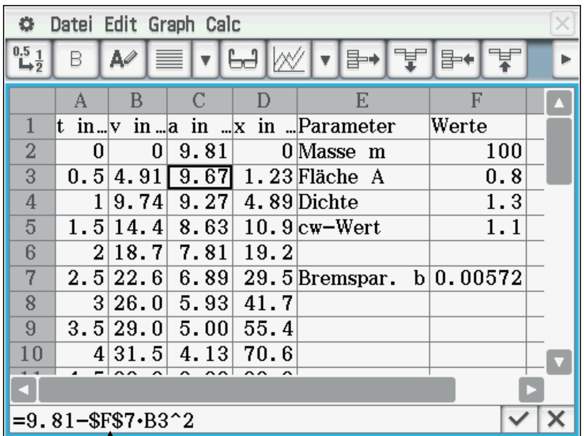
Es gilt: $b = \frac{c_W A \rho}{2m}$ und $a(v) = g - bv^2$. Der Wert von b wird im Feld F7 berechnet.



	A	B	C	D	E	F
1	t in…	v in…	a in …	x in …	Parameter	Werte
2	0	0	9.81	0	Masse m	100
3	0.5	4.91	9.67	1.23	Fläche A	0.8
4	1	9.74	9.27	4.89	Dichte	1.3
5	1.5	14.4	8.63	10.9	cw-Wert	1.1
6	2	18.7	7.81	19.2		
7	2.5	22.6	6.89	29.5	Bremspar. b	0.00572
8	3	26.0	5.93	41.7		
9	3.5	29.0	5.00	55.4		
10	4	31.5	4.13	70.6		

=0.5·F3·F4·F5/F2

Um jetzt diesen Wert in der Spalte für die Beschleunigung verwenden zu können, muss hier mit einem **absoluten Zellenbezug** gearbeitet werden. Der absolute Bezug auf die Zelle F7, in der der aktuelle Wert für b gespeichert ist, wird wie bei Excel mit **F7** geschrieben.



	A	B	C	D	E	F
1	t in…	v in…	a in …	x in …	Parameter	Werte
2	0	0	9.81	0	Masse m	100
3	0.5	4.91	9.67	1.23	Fläche A	0.8
4	1	9.74	9.27	4.89	Dichte	1.3
5	1.5	14.4	8.63	10.9	cw-Wert	1.1
6	2	18.7	7.81	19.2		
7	2.5	22.6	6.89	29.5	Bremspar. b	0.00572
8	3	26.0	5.93	41.7		
9	3.5	29.0	5.00	55.4		
10	4	31.5	4.13	70.6		

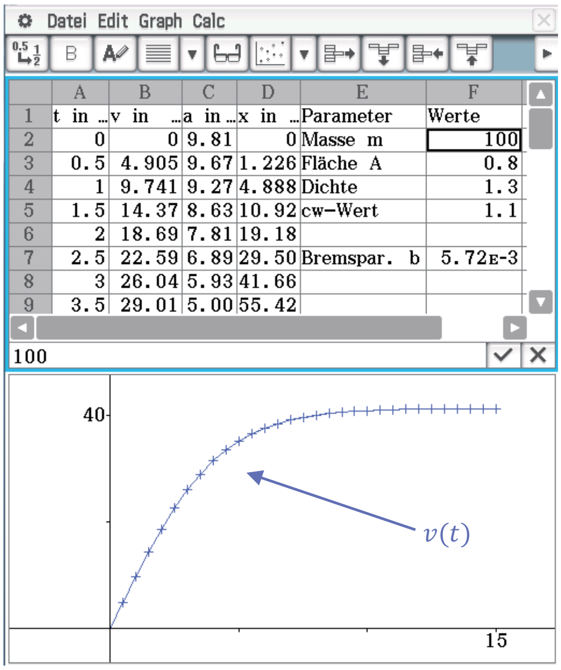
=9.81−F7·B3^2

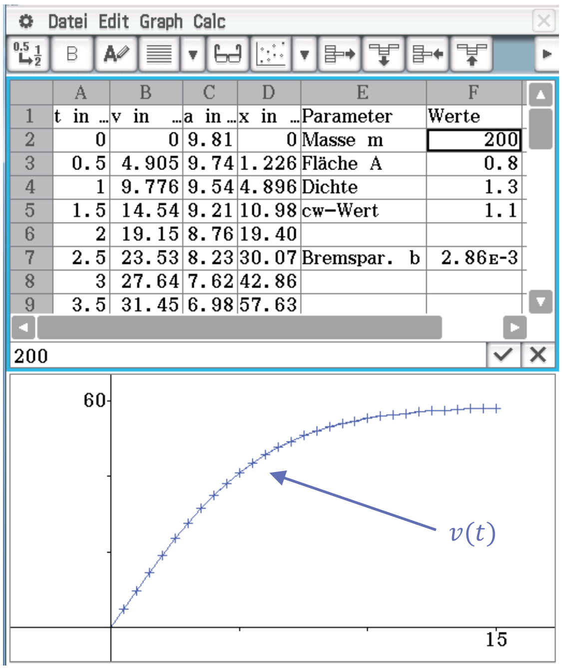
Absoluter Bezug auf die Zelle F7!

Einfluss der Masse

Jetzt kann man Parameter einzeln variieren und somit studieren, was sich verändert, wenn man z. B. die Masse verdoppelt und alle anderen Einflussgrößen konstant lässt.

In den folgenden Beispielen gilt: $m_1 = 100\ kg$ bzw. $m_2 = 200\ kg$.





Man erkennt, dass bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes die Masse sehr wohl Einfluss auf die Fallbewegung hat. Im obigen Beispiel bewirkt die Verdoppelung der Masse (bei Konstanz aller übrigen Einflussgrößen), dass die Endgeschwindigkeit von ca. $40\ m/s$ auf ca. $60\ m/s$ steigt. (Bei exakter Betrachtung ergibt sich hier eine Zunahme der Maximalgeschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{2}$.)

An dieser Stelle könnten der Klasse folgende Arbeitsaufträge gegeben werden:

- Variiere die einzelnen Parameter und studiere ihren Einfluss auf den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit und insbesondere auf die Maximalgeschwindigkeit.
- Nimm Stellung zu der Aussage: „Je schwerer ein Gegenstand ist, desto schneller fällt er zu Boden.“

Letztlich sollte sich bei der Variation der verschiedenen Parameter u. a. folgende zentrale Erkenntnis herauskristallisieren: Die **Maximalgeschwindigkeit** hängt von dem **Quotienten aus Masse und Querschnittsfläche** ab.

Letzteres kann man auch durch folgende Rechnung begründen:

$$0 = a = g - \frac{c_W A \rho}{2m} v_{max}^2 \Longrightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A \rho}}$$

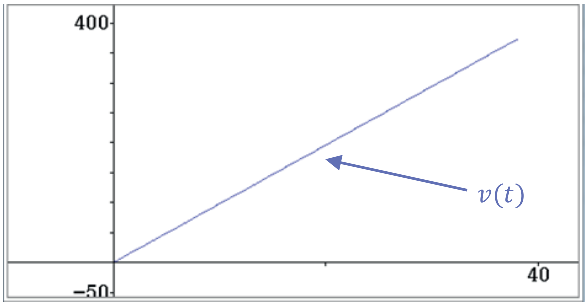
Allerdings wird so nur die asymptotische Geschwindigkeit bestimmt und nicht der zeitliche Verlauf von $v(t)$. Somit ist die Iteration ungleich aussagekräftiger.

Freier Fall im Vakuum

Als kleine Pointe zum Schluss: Den freien Fall im Vakuum kann man simulieren, indem man die Dichte auf den Wert null setzt. Es ergibt sich unabhängig von der Masse eine Bewegung mit der konstanten Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\ ms^{-2}$. Ein aktuelles motivierendes Beispiel für diesen Kontext liefert der Sprung von Felix Baumgartner aus einer Höhe von ca. 40 km im Jahr 2012. Hierbei ist während der Anfangsphase die Bedingung „Dichte = null“ hinreichend gut erfüllt, was dazu führt, dass nach ca. 34 s die Schallgeschwindigkeit 330 m/s erreicht wird.

Datei Edit Graph Calc

	A	B	C	D	E	F
1	t in s	v in …	a in …	x in …	Parameter	Werte
2	0	0	9.81	0	Masse m	100
3	0.5	4.905	9.81	1.23	Fläche A	0.8
4	1	9.81	9.81	4.91	Dichte	0
5	1.5	14.72	9.81	11.0	cw–Wert	1.1
6	2	19.62	9.81	19.6		
7	2.5	24.53	9.81	30.7	Bremspar. b	0
8	3	29.43	9.81	44.1		
9	3.5	34.34	9.81	60.1		
66	32	313.9	9.81	5023.		
67	32.5	318.8	9.81	5181.		
68	33	323.7	9.81	5342.		
69	33.5	328.6	9.81	5505.		
70	34	333.5	9.81	5670.		
71	34.5	338.4	9.81	5838.		
72	35	343.4	9.81	6009.		
73	35.5	348.3	9.81	6182.		
74	36	353.2	9.81	6357.		



Schlussbemerkung

Der freie Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstands stellt bei weitem nicht die einzige Anwendung des oben beschriebenen Iterationsverfahrens dar. Im Physikunterricht am Gymnasium stößt man auf eine Fülle von Problemstellungen, die bei umfassender Behandlung eigentlich vertiefte Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung erforderten, die weit über den Schulstoff hinausgehen. Beispiele hierfür sind ungedämpfte bzw. gedämpfte harmonische Schwingungen (Federpendel, Schwingkreis), Auf- und Entladevorgänge (Kondensator), Ein- und Ausschaltvorgänge (Spule), sowie Bewegungen im Gravitationsfeld (Bahnen von Planeten und Kometen). In allen genannten Fällen erfordern analytische Lösungen Kenntnisse über komplizierte Funktionen (e-Funktion, trigonometrische Funktionen, hyperbolische Funktionen, …), die im Mathematikunterricht entweder sehr spät oder gar nicht auftauchen. Außerdem müsste das Kalkül der Differentialgleichungen wenigstens in Grundzügen bekannt sein. Numerische Verfahren bieten somit einen befriedigenden Ausweg aus diesem Dilemma. Ferner gilt es zu bedenken, dass die meisten Probleme aus der angewandten Mathematik ohnehin nicht analytisch, sondern nur numerisch gelöst werden können.

Literaturverzeichnis

Fösel, Götz u. a.: Fokus Physik 10, Berlin 2008, S. 68 - 80 (Physik-Schulbuch für die 10. Jgst an bayerischen Gymnasien, Cornelsen-Verlag)

Feynman, Leighton, Sands: The Feynman Lectures on Physics, (Volume 1), Addison-Wesley publishing company, 1963, Kapitel 9-6 und 9-7

Hammer, Knauth, Kühnel: Physik 11, München 1996, S. 44 - 48 (Physik-Schulbuch für die 11. Jgst am früheren G9 in Bayern, Oldenbourg-Verlag)

Weigand, H.-G., Wie fliegt eigentlich der Ball durch die Luft? - Die Flugkurven von Basketball und Federball, Mathematiklehren, Heft 95 (1999), 53 - 57

Historische astronomische Daten und moderne CAS-Rechner: Der Komet von 1618

Thomas Krohn, Elvira Malitte, Karin Richter

Kurzfassung des Inhalts:
Die Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge ist oft mit einer typischen Aufgabe verbunden: Aus Messdaten soll ein analytischer Ausdruck abgeleitet werden, der den gegebenen Daten „gut angepasst“ ist. CAS-Rechner stellen hierfür ein leistungsfähiges Werkzeug dar. Der vorliegende Artikel greift diese Situation für ein historisches Problem der Astronomie auf: Die Problemstellung der Funktionsergänzung und -anpassung für originale historische Messwerte zur Bahn eines Himmelskörpers, hier: eines Kometen des 17. Jahrhunderts, steht im Mittelpunkt des Projekts. Anliegen ist es, an Hand dieser realen, gut überschaubaren Datensituation Notwendigkeit und Vorgehensweisen der Funktionsapproximation erleb- und nachvollziehbar werden zu lassen und dabei die Leistungsstärke des CAS-Rechners exemplarisch zu testen.

Klassenstufe(n):
11. Jahrgangsstufe

Lernziele:
- Umgang mit Roh-Daten
- Modellierung im Kontext sphärischer Trigonometrie
- Grafische Veranschaulichung des dreidimensionalen Realmodells Himmelskugel
- Statistische Datenaufbereitung
- Funktionsanpassung, -ergänzung, -auswertung
- Nutzung geeigneter Werkzeuge unter besonderer Heraushebung des ClassPad

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Der ClassPad bietet verschiedene Menüs, die gut geeignet sind, dieses Projekt zu bearbeiten. Mit wenigen einführenden Hinweisen und knappen Übungen zu den grundlegenden Arbeitstechniken wie Eingabe von Daten, Eingabe von Formeln, Anpassung von Funktionen und grafischen Darstellungen wahlweise in den Menüs Tabellenkalkulation, Statistik oder Geometrie können die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Lösungswege erarbeiten.

Zeitbedarf:
Das Projekt ist dreistufig aufgebaut, wobei auch eine arbeitsteilige parallele Bearbeitung durch Expertengruppen mit anschließendem Austausch der Expertengruppen denkbar und möglich ist. Je Problemkreis und Abschlussdiskussion werden ca. 45 Minuten benötigt.

Sonstige Materialien:
Geogebra-3D

Methodisch-didaktische Einordnung

Das Material wendet sich an Lehrerinnen und Lehrer sowie Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe. Die Beschäftigung mit der vorgestellten astronomisch-mathematischen Problemstellung wendet sich an Schülerinnen und Schüler der 11. Jahrgangsstufe. Das Material ist so aufbereitet, dass für die Arbeit der Schülerinnen und Schüler eine eigenständige Auseinandersetzung mit den Arbeitsblättern möglich ist. Der, den Arbeitsblättern in diesem Artikel vorangestellte, Textteil dient dem ausführlichen inhaltlichen Kennenlernen und Einarbeiten und wendet sich demgemäß in erster Linie an Sie, liebe Lehrerinnen und Lehrer. Durch diese zweifache Orientierung und Nutzbarkeit bedingt, kommt es zwischen dem grundlegenden Text und den Arbeitsblättern zu gewissen inhaltlichen Überschneidungen und Wiederholungen. Dies ist beabsichtigt. Je nachdem, ob ein ausführliches Einlesen in die betrachtete Thematik oder ein selbstentdeckendes Beschäftigen aus Schülersicht das konkrete Anliegen ist, ist das eine oder das andere (Teil-)Material zu nutzen. Der ausführliche Einführungstext ist darüber hinaus auch so gestaltet, dass er für die Schülerinnen und Schüler als die Arbeitsblätter vertiefender und ergänzender Lesestoff ebenfalls geeignet ist. Gerade unter diesem Aspekt kann die gewisse formale Überschneidung zwischen Arbeitsblättern und Einführungstext hilfreich zur schnellen und sicheren Orientierung sein.

Die Arbeitsblätter sind so gestaltet, dass sie unmittelbar als Kopiervorlage genutzt werden können.

In der Einheit von einführendem Text und Arbeitsblättern mit Lösungsdarstellungen möchten wir ein Material vorlegen, das sich sowohl an Schülerinnen und Schüler als auch an Lehrerinnen und Lehrer wendet und in dieser Komposition ein interessantes und erfolgreiches entdeckendes Auseinandersetzen mit historischen Daten unter Nutzung moderner CAS-Rechner ermöglicht.

Grundlegende Begriffe und Zusammenhänge der sphärischen Trigonometrie werden bereitgestellt, um eine mathematische Erschließung der astronomischen Originaldaten und ihrer Erfassung in einem geeigneten Kartenentwurf zu ermöglichen und das Problem der astronomisch-mathematisch angemessenen Ergänzung fehlender Daten zu thematisieren. Diese astronomisch-mathematische Verankerung des CAS-Projektes lässt eine Einordnung in den Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 11 als angemessen erscheinen.

Das Projekt ist dreistufig aufgebaut, wobei auch eine arbeitsteilige parallele Bearbeitung durch Expertengruppen mit anschließendem Austausch der Expertengruppen denkbar und möglich ist.

Problemkreis 1:	Kartenentwürfe zum Modell der Himmelskugel; (unter Einbeziehung einer eigenen 3D-(Geogebra-)Visualisierung); Zeitbedarf: ca. 45 min; arbeitsteiliges Bearbeiten ist möglich.

Problemkreis 2: Astronomische Beobachtungen als Datenquellen zur Beschreibung von Orten astronomischer Objekte: Der Große Komet von 1618.
Zeitbedarf: ca. 45 min.

Problemkreis 1 und 2 sollten bearbeitet und in der Lerngruppe reflektiert sein, bevor mit dem, auf die direkte Nutzung des CAS-Rechners gerichteten, Abschnitt des Projektes in Problemkreis 3 begonnen wird.

Problemkreis 3: Der Große Komet von 1618 – ein astronomisches CAS-Projekt.
Zentrales Anliegen ist die CAS-Funktionsanpassung für die gegebenen historischen Daten.

Drei Ansätze werden erprobt:

I. Verwendung der Tabellenkalkulation,

II. Verwendung des Statik-Menüs,

III. Verwendung des Geometrie-Menüs.

Zeitbedarf (einschließlich vergleichender und reflektierender Diskussion und themenbezogener Interpretation): ca. 90 min; arbeitsteiliges Bearbeiten ist möglich und bildet eine gute Grundlage für die erforderliche reflektierende und interpretierende Diskussion.

Die abschließende Diskussion und Interpretation zum *Gesamt*-Projekt, in der alle Expertengruppen zur Ergebnisformulierung, -fixierung und -einordnung gleichberechtigt beitragen, stellt einen unverzichtbaren Bestandteil des Projektes dar und sollte dementsprechend einen hohen Bedeutungsgrad und zeitlichen Umfang zugemessen bekommen.

Zeitbedarf: 45 min.

Als Abschluss und produktorientierte Ergebnisfixierung zum Projekt bietet sich die gemeinsame Erarbeitung eines Projektposters (mit eigenverantwortlichen Beiträgen der jeweiligen Expertengruppen) an.

Zeitbedarf: 45 min.

Auch die Führung von Lerntagebüchern durch die Schülerinnen und Schüler sowohl zu den informativen Gruppen-Arbeitsphasen als auch zu den eigenständigen Untersuchungen und der gemeinsamen abschließenden und zusammenfassenden Diskussion, Reflektion und Interpretation ist eine Möglichkeit, das Projekt und die daraus gewonnenen Einsichten und Erkenntnisse dauerhaft verfügbar zu machen.

Historische Daten auf modernen CAS-Rechnern? Ein Vorschlag

Die Aufgabe, reale funktionale Zusammenhänge zu modellieren, führt oft auf ein Standardproblem: Messdaten können gesammelt werden oder liegen vor und aus ihnen soll ein analytischer Ausdruck abgeleitet werden, der den gegebenen Daten „gut angepasst" entspricht. Für diese Aufgabe der Funktionsanpassung an gegebene Datenreihen sind moderne CAS-Rechner leistungsstarke Werkzeuge. Ohne ihre Unterstützung ist das Problem der Ergänzung weiterer Funktionswerte und das Finden und Prüfen geeigneter Funktionen zu ihrer Approximation oft ein schwieriges Unterfangen.

Insbesondere in der Astronomie ist die Frage nach dem Schluss von einzelnen beobachteten Stern- oder Himmelskörperorten auf die vollständige Bahn des jeweiligen Himmelsobjektes eine Problemstellung, die seit den Anfängen astronomischer Untersuchungen ein zentrales Anliegen darstellte und mit den Keplerschen Erkenntnissen zu den tatsächlichen Himmelskörperbahnen im 17. Jahrhundert zu einem herausragenden Forschungsschwerpunkt wurde. Im vorliegenden Beitrag wird diese prototypische Situation der Funktionsergänzung und -anpassung im Kontext historischer Messwerte zur Bahn eines Kometen aufgegriffen. Anliegen ist es, an Hand dieser realen, aber zugleich auch gut überschaubaren Datensituation die Problematik geeigneter Funktionsanpassung zu thematisieren und die Leistungsstärke des CAS-Rechners hierfür konkret zu erproben.

Eingebettet in den Kontext realer historischer, aber unvollständiger Beobachtungswerte des 17. Jahrhunderts und ihrer Beschreibung in einer Original-Text-Stelle, wird die typische Problemstellung geeigneter Datenergänzung und Funktionsanpassung exemplarisch untersucht. Insgesamt gibt es zwei Aspekte, die im Fokus stehen werden: Zum einen die überschaubare Anzahl zur Verfügung stehender, aber eben lückenhafter realer historischer Beobachtungswerte. Zum anderen die Tatsache, dass die vereinfachende Modellierung durch die scheinbare Bahn des Kometen auf der Himmelssphäre (also der vom irdischen Beobachter gedachten Himmelskugel, die die Erde konzentrisch enthält) bereits historisch gegeben ist. Durch die Nutzung eines CAS-Rechners wird mit einem modernen Werkzeug die historische Untersuchung „nur noch" technisch umgesetzt und muss dementsprechend nachvollzogen werden. Auf diese Weise eröffnet sich ein interessantes Spannungsfeld: eine überschaubare reale astronomische Situation wird durch einen nahe liegenden einfachen Modellierungsansatz beschrieben (in Übereinstimmung mit dem historischen Lösungsansatz) und mit modernen Hilfsmitteln einer Bearbeitung zugeführt. Gerade die zu Grunde gelegten historischen Beobachtungsdaten veranschaulichen einerseits den experimentellen Ausgangspunkt und zeigen andererseits die Stärke des Werkzeugs CAS-Rechner bei der Untersuchung von Standardproblemen. In diesem Fall wird die Funktionsergänzung und -anpassung, anschaulich-konkret erlebbar gemacht.

Die historische Verortung der zu untersuchenden analytischen Problemstellung erfordert es, einen kurzen Exkurs in die Geschichte der Astronomie des 17. Jahrhunderts und der sphärischen Geometrie vorzunehmen. Dadurch gewinnt man eine Plastizität der realen Situation, zu deren Untersuchung der CAS-Rechner maßgeblich genutzt werden wird.

Für die konkrete Umsetzung des Projektvorschlags dieses Beitrags bedeutet dies, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst die erforderlichen astronomischen und geometrischen Grundbegriffe und Sichtweisen kennenlernen müssen. Dafür eignet sich sowohl ein entsprechender Rechercheauftrag als auch eine gemeinsame Erarbeitung an Hand geeigneter Literatur, etwa des Buches von R. Hame „Sphärische Trigonometrie, Additum Jahrgangsstufe 11, Ehrenwirth Verlag GmbH 2007“. Auf dieser Grundlage ist dann die CAS-Auseinandersetzung mit den historischen Daten das eigentliche mathematische Anliegen. Wo früher zeitaufwendige Rechnungen und Versuche per Hand nötig waren, kann heute das Werkzeug CAS-Rechner einen entscheidenden Beitrag leisten, um schnell mit geeigneter Funktionsanpassung anschaulich-experimentell zu einer guten Annäherung von Himmelskörperbahnen zu gelangen, wie sie sich dem Auge am Himmel zeigen.

Das folgende Material für Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe besteht aus allen für das Verständnis des astronomischen Hintergrundproblems und des mathematischen Bearbeitungsansatzes nötigen Informationen. Zudem enthält es viele interessante Zusatzinformationen zum Weiterdenken, die sich nicht nur auf die eigentliche Approximation der fehlenden Daten beschränken, sondern sich auch auf grundlegende Sachverhalte erstrecken, etwa zu Bahnen astronomischer Himmelsobjekte, Kugelkoordinatensystemen oder Projektionen in die Ebene. Die Aufgabenstellungen sind als Arbeitsblätter aufbereitet. Die Aufgaben und die Lösungsvorschläge machen mit ihrer inhaltlichen Breite nicht nur die Leistungsstärke, sondern auch die Vielgestaltigkeit der Nutzungsmöglichkeiten des CAS-Rechners deutlich.

1. Die Himmelskugel – das astronomische Modell

> „Weißt du wie viel Sternlein stehen an dem blauen Himmelszelt?“
> Ganz selbstverständlich spricht dieses alte Kinderlied von einer ebenso fantastischen wie leistungsfähigen und grundlegenden Überlegung, um Phänomene der Astronomie einer einfachen mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen: dem Modell der Himmelskugel.

Die zentrale Idee zur Beschreibung der Bahn eines Himmelsobjektes, wie sie sich einem irdischen Beobachter „am Himmel zeigt“, ist die Modellierung mit Hilfe der sog. Himmelskugel oder Sphäre, die die zur Kugel idealisierte Erde konzentrisch enthält. Man denkt sich, wie schon in den frühsten Zeiten der Astronomie erfolgt, die Erde eingebettet in eine fiktive Kugel von nicht näher bestimmtem Radius, auf deren Oberfläche für den Erdbeobachter die Himmelskörper und deren Bahnen projiziert sind. Auf diese Weise wird es möglich, einen Stern, einen Kometen und dessen scheinbare Bahn oder andere Himmelskörper im Gesichtskreis des Beobachters zu lokalisieren. Aussagen, wie etwa die Folgende, sind dann möglich und schaffen die Voraussetzung, um z. B. einen Kometen am Nachthimmel ausfindig zu machen. „Er steht im Westen hoch über dem Horizont“ wäre eine mögliche einfache, wenn auch noch sehr ungenaue Beschreibungsmöglichkeit. Dabei wird der Begriff des Horizonts auf „augenscheinliche“ Weise verwendet.

Mathematische Definition: Der **Horizont** ist der Schnittkreis der Himmelskugel mit einer Ebene durch den Erdmittelpunkt, die parallel zur Tangentialebene an die Erde im Beobachtungspunkt (= Standpunkt des Beobachters auf der Erdoberfläche) ist.

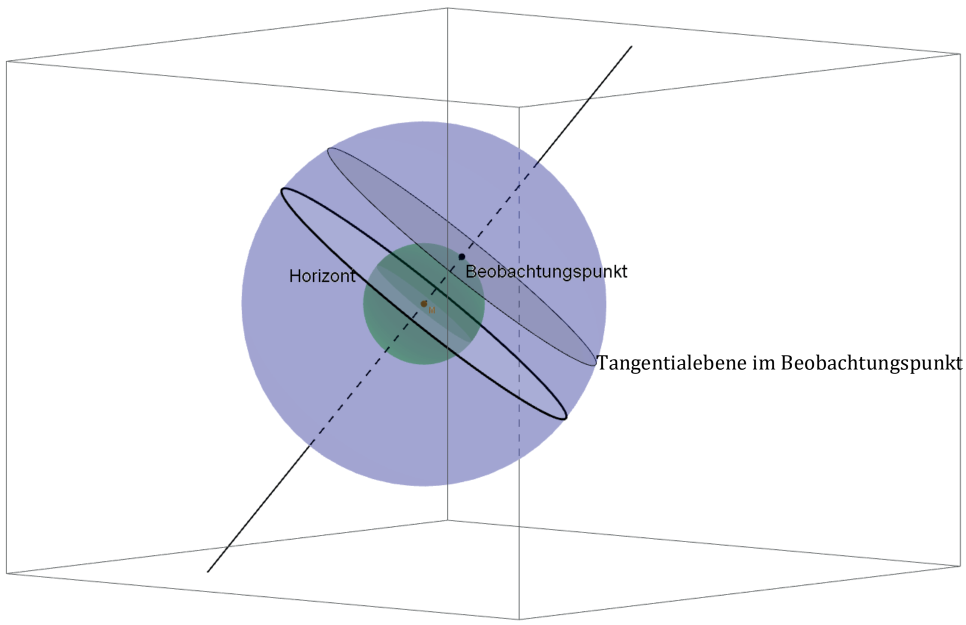


Abbildung 1: Erdkugel mit Tangentialebene und, zugehörig, Himmelskugel mit Horizont

Aber es gibt ein Problem: Bedingt durch die Rotation der Erde um ihre Achse im Verlaufe eines Tages, ändert sich für einen ortstreuen Beobachter fortwährend das Horizontsystem. Das ist der Grund, warum Sterne in der Nähe des Polarsterns auf einer scheinbaren Kreisbahn um ihn herum wandern.

Der Wunsch nach Präzisierung solcher oder ähnlicher Ortsangaben für Himmelskörper auf der Sphäre führt auf die Beschreibung vermittels geeigneter Koordinatensysteme.

Ein naheliegender Ansatz ist der folgende: Zur Orientierung auf der Himmelskugel wird diese mit einem Gradnetz, ähnlich dem der Erdkugel, überzogen. Ausgehend von einer Grundebene – etwa der Ebene des Himmelsäquators (siehe Abbildung 2) – können, parallel hierzu, Breitenkreise und, senkrecht zur Grundebene und durch die Himmelspole verlaufend, Meridiane (oder Längenkreise) betrachtet werden (siehe Abbildung 3).

Definition: Der Schnittkreis der Ebene des Erdäquators mit der Himmelskugel wird **Himmelsäquator** genannt.

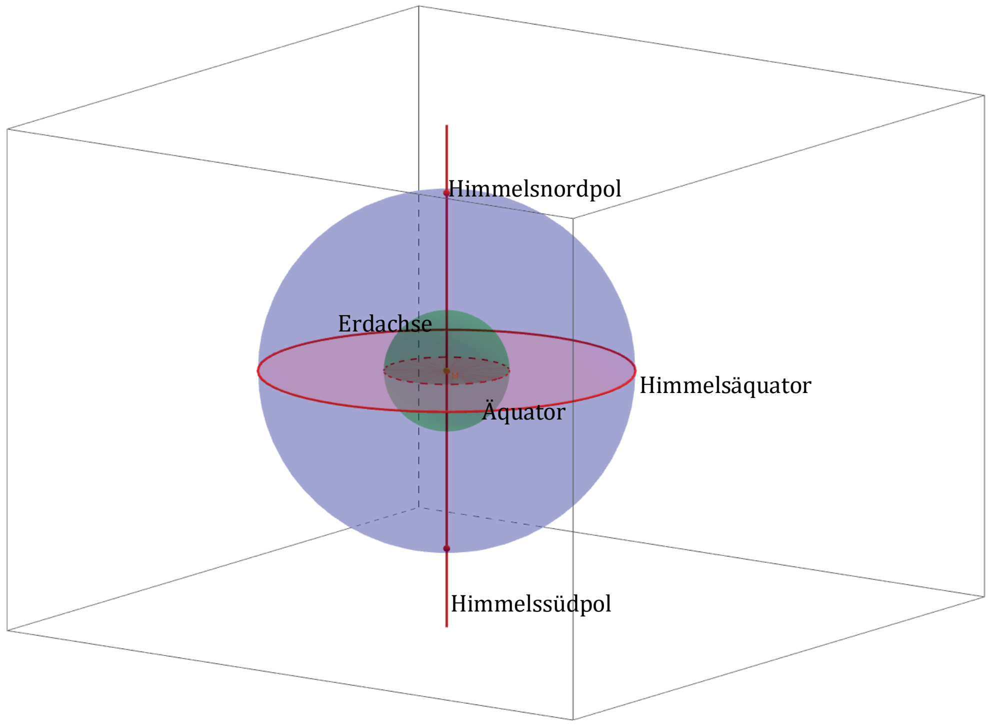


Abbildung 2: Erd- und Himmelskugel mit Himmelsäquator und Himmels-Nord- und Südpol

Wie von der Erdkugel gewohnt, haben Breitenkreise auch auf der Himmelskugel unterschiedliche Radien. Meridiane dagegen sind sämtlich Großkreise, d. h. Kreise mit dem gleichen Radius wie die Himmelskugel.

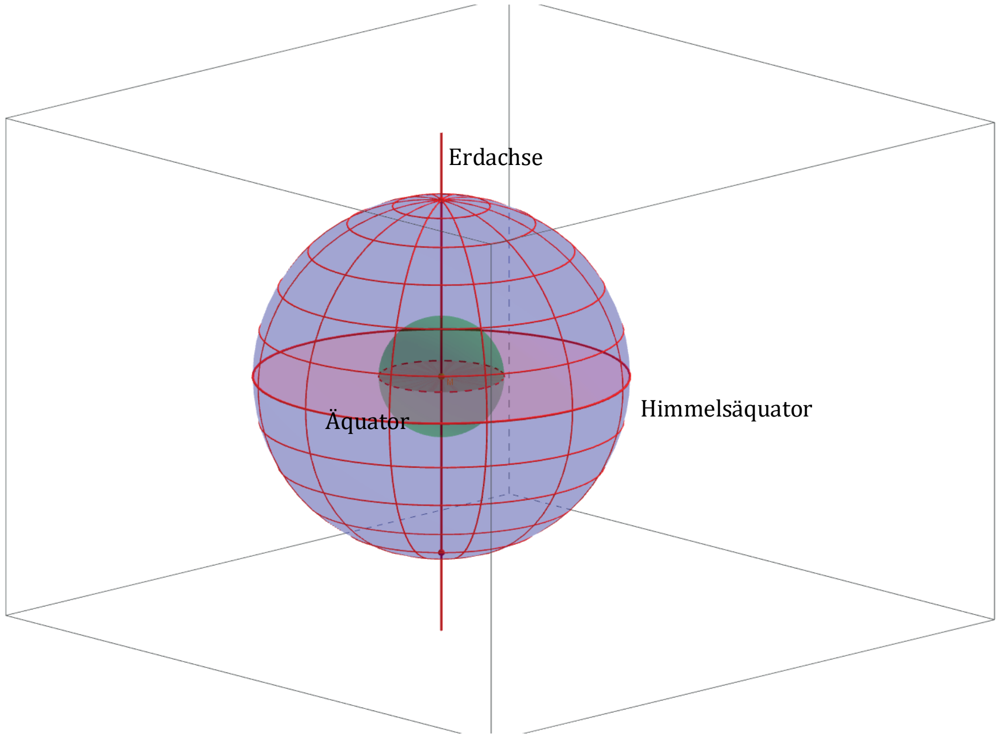
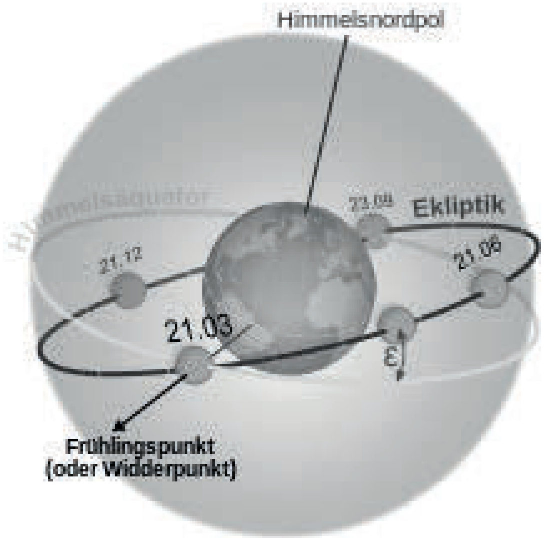


Abbildung 3: Himmelskugel mit Himmelsäquator, Himmels-Nord- und -Südpol sowie Breitenkreisen und Meridianen

Mit einer solchen Gradnetz-Festlegung lässt sich nun jeder Punkt der Himmelskugel eindeutig durch seine Koordinaten bzgl. Breitenkreis und Meridian angeben.

Heute ist es für uns selbstverständlich, den Himmelsäquator als Breitenkreis 0° zu verstehen. Früher dagegen haben fast alle astronomischen Beobachter das Himmelskoordinatensystem ausgehend von der scheinbaren Sonnenbahn als 0° Breite gewählt.

Definition: Die **Ekliptik** ist die scheinbare Bahn der Sonne im Laufe eines Jahres auf der gedachten Himmelskugel um die im Zentrum befindliche Erde.



Diese Kreislinie bildet einen Großkreis, der die 12 Sternbilder, die sog. Tier-Sternbilder, durchläuft. Daher auch die Bezeichnung Tierkreis.

Die Ebene der Ekliptik ist gegenüber der durch den Himmelsäquator definierten Äquatorebene um einen Winkel geneigt, der als Erdneigung (oder Schiefe der Ekliptik) bezeichnet wird.

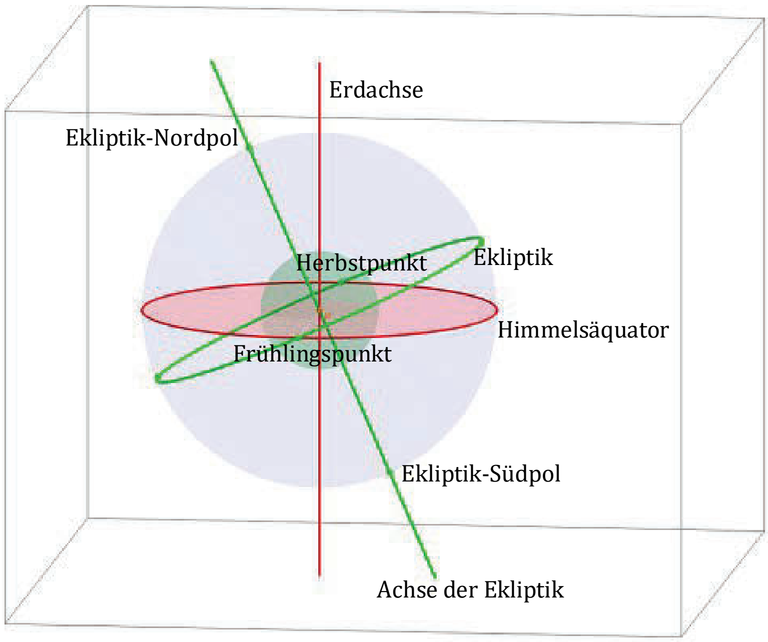


Abbildung 4: Himmelskugel mit Ekliptik, Himmelsäquator sowie Frühlings- und Herbstpunkt

Ganz ähnlich wie im Äquatorsystem kann ein Tierkreis-Koordinatensystem definiert werden: Die Ekliptikebene wird mit der Breite 0° versehen, alle weiteren Breitenkreise sind nun parallel zur Ekliptikebene. Die Meridiane sind Großkreise, die senkrecht zur Ekliptikebene verlaufen. Sie schneiden sich in den beiden Polen des Ekliptiksystems.

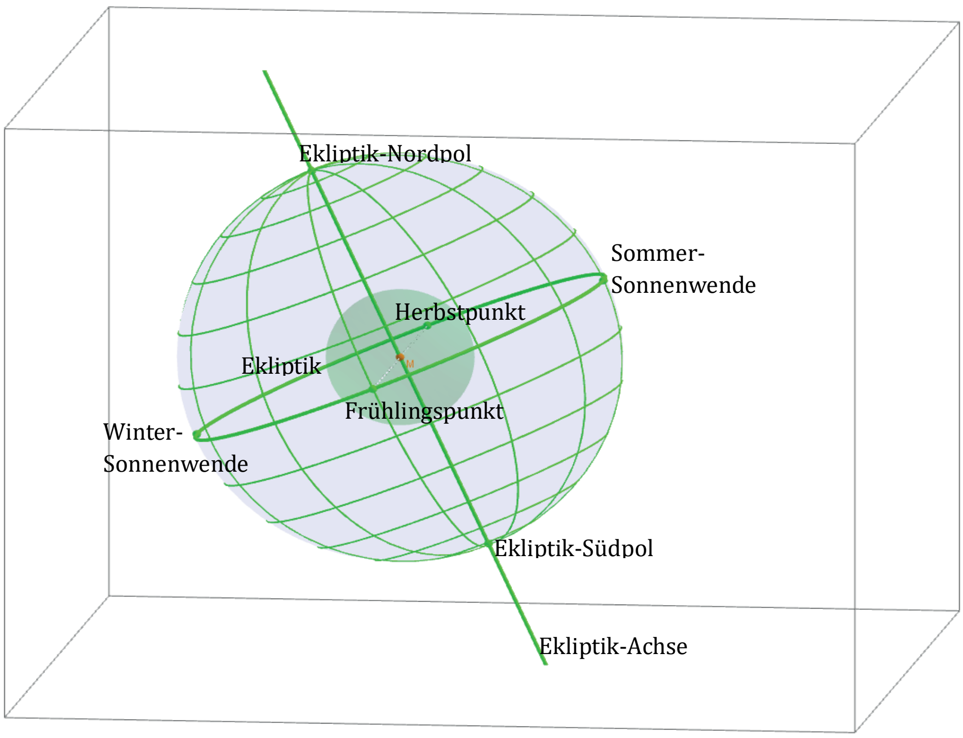


Abbildung 5: Himmelskugel mit Ekliptik sowie Breitenkreisen und Meridianen des Ekliptiksystems

2. Mathematische Himmels-Geographie: Kartenentwürfe

Eine Orientierung auf der Himmelskugel mit Hilfe eines Gradnetzes, das für jeden Punkt der Sphäre eine Charakterisierung durch den zugehörigen Breitenkreis und den entsprechenden Meridian ermöglicht, stellt ein leistungsfähiges Denkmodell dar. Eine konkrete graphische Veranschaulichung ist dagegen anspruchsvoll, ja schwierig. Auch mit Hilfe von 3D-Geometrie-Software erweist es sich als aufwendig, zu vorgegebenen Himmelkoordinaten auf der Sphäre einen Punkt oder auch Scharen von Punkten einzutragen (Vergleiche die Aufträge 3a, 3e und 3f aus Arbeitsblatt 3, die als Grundlage hierfür dienen können.) Um wie viel größer waren die Schwierigkeiten, die zur Zeit von Erasmus Schmidt im beginnenden 17. Jahrhundert diesbezüglich, allein unter Verwendung üblicher mechanischer Zeichenhilfsmittel wie Stechzirkel, Lineal und einem Himmelsglobus mit Messing Großkreis-Ring, zu überwinden waren. Der Wunsch, ebene Karten zu konstruieren, die eben diese Veranschaulichung leicht ermöglichten, war dementsprechend naheliegend.

Der einfachste Ansatz, der sich für ein ebenes Bild der Himmelskugel anbietet, betrachtet die Länge und die Breite als Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems.

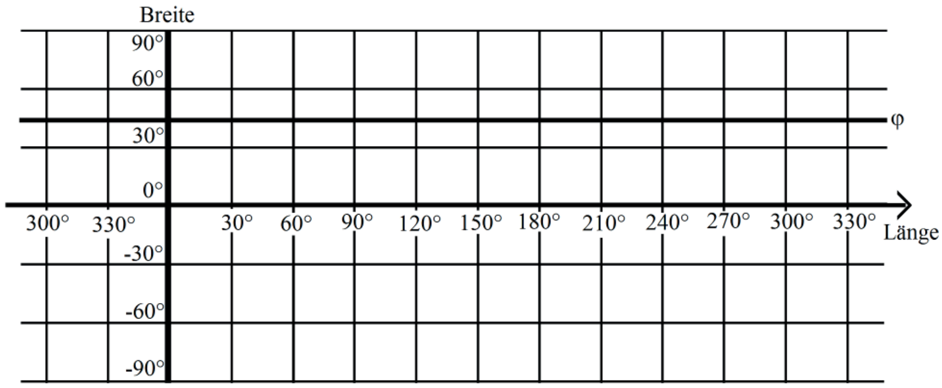


Abbildung 6: Die mit Hilfe der kartesischen Koordinaten Länge und Breite entstehende Karte wird **quadratische Plattkarte** genannt.

Die „merkwürdige“ Beschriftung der Längen-Achse wird verständlich, wenn man bedenkt, dass es nur die Längengrade *0°, ..., 360°* $\cong$ *0°* gibt.

Dabei kann die Länge Werte von 0° bis $360° \cong 0°$ annehmen, die Breite, wie vom Erdgradnetz gewohnt, nimmt Werte zwischen $-90°$ und $+90°$ an.
Eine nähere Analyse dieses Kartenvorschlages verdeutlicht jedoch sofort auch Probleme:

(1) Jeder φ-Breitenkreis hat auf der Sphäre den Umfang $2\pi \cdot R \cdot \cos\varphi$, wenn R den fiktiven Radius der Sphäre bezeichnet. In der Plattkarte werden aber *alle* Breitenkreise auf *gleichlange* Strecken abgebildet. Der Kartenentwurf ist also ***nicht längentreu***!

(2) Betrachtet man z. B. den Winkel, den zwei verschiedene Meridiane an einem Pol der Sphäre miteinander einschließen, und vergleicht es mit der Situation auf der Karte, so zeigt sich auch hier etwas Merkwürdiges: Die Bilder aller Meridiane sind parallele Strecken. Der Kartenentwurf ist also auch ***nicht winkeltreu***.

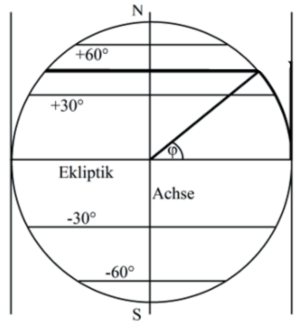


Abbildung 7: Punkt auf der Himmelskugel mit φ - und λ-Koordinate

(3) Für eine Kugelzone (oder Kugelschicht) auf der Sphäre, die von zwei Breitenkreisen mit 1° Unterschied eingeschlossen wird, lässt sich die bekannte Formel für die Mantelfläche nutzen: Ist der Abstand der beiden (zur Ekliptik) parallelen Ebenen gleich h, so gilt für den Mantel der Kugelzone: $F_{Mantel} = 2\pi Rh$. Damit folgt für die Mantelfläche der Kugelzone, die von zwei Breitenkreisen mit 1° Unterschied gebildet wird,

$$A = 2\pi \cdot R^2 (\sin(\varphi + 1) - \sin\varphi),$$

wenn der Winkel φ zum Breitenkreis gehört, der näher zur Ekliptik ist. Aus Abbildung 7 liest man ab, dass

Übrigens ...

Längentreue:
Die Längen zweier Kurven im Original verhalten sich wie die Längen der Bildkurven.

Winkeltreue:
Der Winkel, den zwei Kurven im Original miteinander einschließen, ist derselbe, wie der Winkel, den die Bildkurven miteinander einschließen.

Flächentreue:
Die Inhalte zweier Flächen im Original verhalten sich wie die Flächeninhalte der entsprechenden Bildflächen.

$$h_{Winkel\varphi} = R\sin\varphi \text{ bzw. } h_{Winkel(\varphi+1)} = R\sin(\varphi + 1) \text{ gilt.}$$

Das Bild dieser Zone ist ein Rechteckstreifen auf der Karte, der den Flächeninhalt $2\pi \cdot R \cdot 1 \cdot R$ hat, also von der speziellen Wahl von φ unabhängig ist. Der Kartenentwurf ist also auch ***nicht flächentreu***.

Der Ansatz, der auf die quadratische Plattkarte führt, ist mithin in vielerlei Hinsicht unbefriedigend. Es war naheliegend, nach Kartenentwürfen zu suchen, die zumindest einige der wünschenswerten Treue-Eigenschaften besitzen.

Die Schwierigkeiten, die sich bei einem derartigen Vorhaben auftun, sind elementar: *Denken Sie sich einen Kugel-Luftballon mit (irgend)einem (hinreichend langen) Schnitt geöffnet und versuchen Sie nun, die so geöffnete „Sphäre“ in die Ebene „zu drücken“. Wie Sie es auch versuchen, Sie müssen dabei ziehen und zerren. Wenn Sie vorher ein kleines Quadrat oder ein Dreieck auf den aufgeblasenen Ballon gezeichnet hatten, lässt sich* *exemplarisch sehen, was passiert: Quadrat und Dreieck geraten durch die Drück-und-Zieh-Aktion außer Form*. Mathematisch ausgedrückt: In jedem zweidimensionalen Kartenentwurf, der die Himmelskugel über eine geeignete Transformation in die Ebene projiziert, ist diese Abbildung stets mit Verzerrungen verbunden, die je nach der gewählten Projektionsart entsprechend unterschiedlich ausfallen. Der Versuch, die gekrümmte Sphäre ohne Verzerrungen in die Ebene abzubilden und dabei sowohl die Längen- als auch Flächen- und Winkeltreue zu erreichen, ist nicht möglich. Die Kartenentwürfe, die sich im Laufe der Jahrhunderte durchsetzten, verzichteten dementsprechend auf die eine oder andere Forderung der geometrischen Treue.

Unter der Vielzahl an gebräuchlichen Entwürfen hat sich bereits in den frühen Zeiten der Kartographie die Projektion auf Zylinder, die die Sphäre umhüllen, als besonders leicht übertragbar erwiesen.

Die Kartenfläche kann man sich als die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders vorstellen, der die Sphäre im Großkreis der Ekliptik berührt und dessen Mittelachse durch die Pole des Ekliptik-Systems geht. Die Nahtstelle, an der beim Zusammenrollen der Karte der linke und der rechte Kartenrand aneinanderstoßen, berührt den 0°-Meridian.

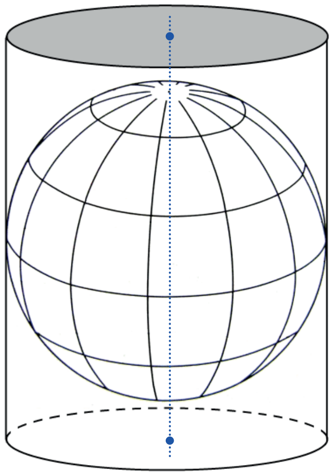


Abbildung 8: Sphäre mit umhüllendem Zylinder und blauer Projektionsachse

Stellt man sich die Achse der Sphäre durch die beiden Pole als Leuchtstab vor, so wird das Gradnetz der Sphäre durch parallele Lichtstrahlen, die senkrecht zur Achse stehen, auf die Karte projiziert. Breitenkreise gehen in waagerechte Strecken über, Meridiane in senkrechte Strecken.

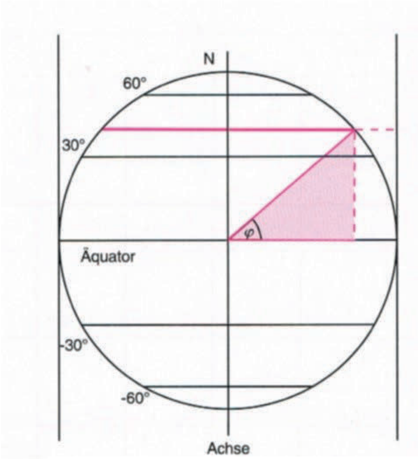


Abbildung 9: Archimedes-Projektion

Der auf diese Weise entstehende Kartenentwurf unterscheidet sich von der oben diskutierten quadratischen Plattkarte: Der Bildpunkt P' des Sphärenpunktes P mit der Länge λ und der Breite φ erhält **in der quadratischen Plattkarte** die Koordinaten

$$x_{P'} = R \cdot arc(\lambda) \text{ und } y_{P'} = R \cdot arc(\varphi).$$

(Hierbei steht $arc(\dots)$ für das Bogenmaß des jeweils betrachteten Winkels.)

In der eben beschriebenen „**Archimedes-Projektion**" der Sphäre auf den einhüllenden Zylinder ergibt sich für den Bildpunkt

$$x_{P'} = R \cdot arc(\lambda) \text{ und } y_{P'} = R \cdot sin(\varphi).$$

Winkeltreue und auch Längentreue liefert die Archimedes-Projektion ebenfalls nicht. Die gleichen Argumente wie für die Plattkarte können herangezogen werden.

Dagegen überzeugt man sich aber leicht, dass nun Flächentreue vorliegt. Bei der Betrachtung „kleiner" Gebiete kann man also davon ausgehen, dass sich diese auf der Sphäre und auf der Karte entsprechend „verhalten".

Beweis der Flächentreue der Archimedes-Projektion
Die wichtigsten Argumente hierfür liefern wieder Kugelzonen, die von einem φ_2-Breitenkreis und einem φ_1-Breitenkreis ($\varphi_2 > \varphi_1$) begrenzt werden. Für die Kugelzonen ergibt sich der Flächeninhalt

$$A = 2\pi \cdot R^2(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)).$$

Das Bild dieser Zone ist ein Rechteck mit den Seitenlängen

$$R \cdot 2\pi \quad \text{und} \quad R \cdot (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)).$$

Entsprechend überlegt man sich, dass ein Kugelviereck, das von zwei Meridianen und zwei Breitenkreisen begrenzt wird, ebenfalls diese Eigenschaft der Flächengleichheit besitzt.

Der letzte Schritt nutzt dann die Überlegung aus, dass jede beliebige Fläche auf der Sphäre durch eine Schar von Kugelvierecken der beschriebenen Art beliebig dicht angenähert werden kann.

Es gibt weitere Vorschläge für Zylinder- und andere Kartenentwürfe. Unter ihnen ist der vielleicht berühmteste die Mercator-Projektion. Der Bildpunkt *P'* des Sphärenpunktes *P* mit der Länge λ und der Breite φ hat hier die folgenden Koordinaten:

$$x_{P'} = R \cdot arc(\lambda) \text{ und } y_{P'} = R \cdot \ln\left(\tan(\frac{1}{2}\varphi + 45°)\right).$$

Dieser Kartenentwurf hat die besondere Eigenschaft, winkeltreu zu sein. Das ist der Grund, warum Kurven auf der Sphäre, die gleichen Kurswinkel haben, durch die Projektion in Geraden abgebildet werden.

Übrigens ...

Der Kartograph **Gerhard Mercator** (1512-1594) entwickelte den nach ihm benannten Kartenentwurf, um eine für die Schifffahrt benutzbare Karte der Erde zu erhalten, auf der Schiffsrouten mit konstantem Kurswinkel einfach mit dem Lineal gezogen werden konnten.

Der Ansatz für die Berechnung des φ-Breitenkreis-Bildes zeigt exemplarisch, wie durch geeignete Wahl der Transformation eine bestimmte Eigenschaft der Karte, hier die Winkeltreue, erzwungen werden kann.

3. Der Große Komet von 1618: Ein astronomisches CAS-Projekt

Die Voraussetzungen: Eine historische Beobachtungsschrift

Der Lauf der Gestirne am Himmel wurde zu allen Zeiten aufmerksam verfolgt und es zeigte sich bald, dass es neben den scheinbar harmonisch und regelmäßig verlaufenden Himmelskörpern wie den Fixsternen, Planeten, Sonne und Mond auch eine andere Kategorie von Objekten gab, über deren plötzliches Auftreten genau wie über ihre Herkunft im 17. Jahrhundert noch keine gesicherten Aussagen getroffen werden konnten. Dazu zählten auch die Kometen.

Als es im geschichtsträchtigen Jahr 1618, am Vorabend des 30-jährigen Krieges, in recht kurzen Abständen zum Auftreten gleich dreier Kometen am europäischen Nachthimmel kam, war das Interesse entsprechend groß. Neben unzähligen astrologischen Flugblättern, die vor drohendem Unheil warnten, erschienen von vielen Mathematikern Europas auch Schriften über deren exakte Beobachtung und Bahnbeschreibungen der Kometen. So auch an der Universität Wittenberg, wo von dem dort zu dieser Zeit lehrenden Mathematikprofessor Erasmus Schmidt (1570–1637) eine Kometenschrift mit Beobachtungsdaten zum Stand des Kometen überliefert ist.[1] Schmidt beobachtete den dritten und größten Kometen des Jahres 1618 (C/1618 W1) vom 21. November 1618 bis zum 5. Januar 1619 täglich, nur an den Tagen unterbrochen, an denen man den Kometen „*wegen des Gewölckes nicht* [hat] *sehen können*."[2]

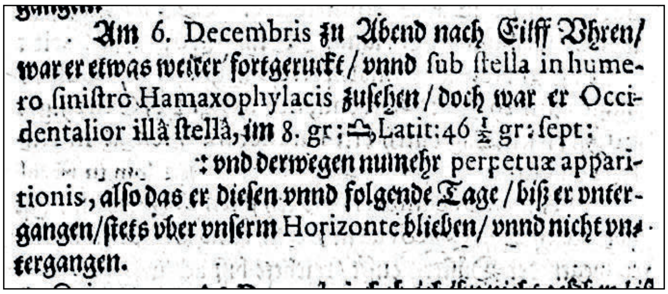
Die Angabe der von ihm beobachteten Kometen-Positionsdaten geschieht bei Schmidt als fortlaufende Beschreibung stets in gleicher Weise. Das Beispiel vom 4. Dezember soll dies verdeutlichen: (siehe nächste Seite)

[1] Vgl. Erasmus Schmidt, Prodromus Conjunctionis Magnae, anno 1623. futurae. Das ist: Kurtzes und Einfeltiges […] Bedencken, Wittenberg, 1619.

[2] Die Datumsangaben sind im damals in den protestantischen Ländern noch gültigen julianischen Kalender erfolgt. Für eine Übertragung in den heute gültigen Kalender müssten jeweils 10 Tage hinzu addiert werden.

Am 4. Decembris/ war er uber die beyden stellulas in dorso Hamaxophylacis komen/ und stund auffs genaweste im 15 ½ gr. ♎*, Latit. Sept. 40.* [...] *Hatte Caudam noch in der lenge/ wie vorigen tag.* *Ist noch nicht Europae verticalis gewesen.*	Begonnen wird am jeweiligen Beobachtungstag mit der ungefähren Einordnung des Kometen an der Sphäre[3] mithilfe der nahe stehenden Sternbilder, hier: der Rücken des Bärenhüters. Es folgt die Angabe seiner Position nach Länge (Longitude) und Breite (Latitude). Die Länge wird auf den Tierkreis der Ekliptik[4] bezogen, in dem jedes der zwölf Tierkreiszeichen einen Bereich von 30 Grad besitzt (hier: 15,5° im Zeichen Waage), bei der Breite erfolgt der Zusatz „septemtrionalis“ für nördlich, „australis“ für südlich (hier: 40° nördlich). Weitere Angaben betreffen die Schweiflänge und die Orte, über denen der Komet im Zenit stand.

Für den 6. Dezember findet sich folgender Eintrag:


Am 6. Decembris zu Abend nach Eilff Vhren/ war er etwas weiter fortgeruckt/ vnnd ſub ſtella in humero ſiniſtro Hamaxophylacis zuſehen/ doch war er Occidentalior illâ ſtellâ, im 8. gr: ♎ Latit: 46 ½ gr: ſept: : vnd derwegen nunmehr perpetuæ apparitionis, alſo das er dieſen vnnd folgende Tage/ biß er vntergangen/ ſtets vber vnſerm Horizonte blieben/ vnnd nicht vntergangen.

Um die Schmidt-Angaben zu verstehen, bedarf es einer „Übersetzung“:

Welche Länge und welche Breite wurden an diesem Tag gemessen?

Welcher absoluten Länge entsprechen die „Tierkreislängen“?

Die folgende Tabelle zeigt die von Schmidt in seiner Schrift zusammengestellten Beobachtungsdaten in aufbereiteter Form. Die ausgesparten Angaben für den 6.12.1618

3 Zur Erinnerung: Die Sphäre (= Himmelskugel) ist eine gedachte Kugelschale mit unendlich großem Radius, die als geozentrische Kugel die Erde umgibt. Sie dient als virtuelle „Rechenfläche“, um Koordinatenangaben insbesondere für Himmelsobjekte zu ermöglichen.

4 Zur Erinnerung: Die Ekliptik ist ein gedachter Großkreis auf der Himmelssphäre, auf dem sich die Sonne im Laufe des Jahres zu bewegen scheint. Sie ist im Vergleich zum Himmelsäquator um 23,5 Grad geneigt.

lassen sich mit Hilfe der oben gegeben Erläuterungen leicht eintragen, die absoluten Längen schnell berechnen.

Übrigens ...

Mit dieser Vorgehensweise der täglichen Beschreibung von Länge und Breite in Ekliptikkoordinaten, Aussagen zum Schweif und nahen Sternbildern, orientiert sich Schmidt inhaltlich, aber auch in der Art der Formulierungen sehr genau an einer damals üblichen Vorgehensweise der Kometenbeschreibung.

	Länge	absolute Länge	Breite
21.11.	-		8°
23.11.	10,5° ♏		12,5°
24.11.	8° ♏		18°
27.11.	0° ♏		27°
03.12.	18° ♎		39°
04.12.	15,5° ♎		40°
05.12.	13° ♎		43°
06.12.			
09.12.	3° ♎		50°
10.12.	0° ♎		53°
12.12.	26° ♍		55°
14.12.	20° ♍		57,5°
15.12.	16° ♍		58°
17.12.	12° ♍		60°
24.12.	25° ♌		-
26.12.	15° ♌		-
28.12.	11° ♌		-
05.01.	5° ♌		65°

Bedeutung der verwendeten Symbole:

Widder ♈:	0° - 30°
Stier ♉:	30° - 60°
Zwilling ♊:	60° - 90°
Krebs ♋:	90° - 120°
Löwe ♌:	120° - 150°
Jungfrau ♍:	150° - 180°
Waage ♎:	180° - 210°
Skorpion ♏:	210° - 240°
Schütze ♐:	240° - 270°
Steinbock ♑:	270° - 300°
Wassermann ♒:	300° - 330°
Fische ♓:	330° - 360°

So entspricht beispielsweise die Angabe 13° ♎ absolut einer Länge von (180° + 13° =)193°.

Für den 21.11. und vom 24.12. bis 28.12. fehlen entweder die Längen- oder die Breitenkoordinaten. Lässt sich hier eine sinnvolle Vermutung anstellen? Die folgenden Überlegungen sollen einen Weg aufzeigen, auf mathematisch wohlbegründete Weise, die fehlenden Daten mit Hilfe geeigneter Näherungsansätze zu ergänzen.

Die Analyse: Von der Kugel zum ebenen Zylinderkartenentwurf

Die Schmidt-Daten belegen deutlich, dass der beobachtete Komet eine bestimmte Bahn durchläuft. Die Astronomen stellen sich solche Bahnen als scheinbare Großkreise auf der Sphäre vor.

> **Übrigens …**
>
> Kometen und Großkreise … so ganz stimmt diese Aussage nicht, denn Kometenbahnen sind elliptischer oder hyperbolischer Natur. Dennoch ist der Verlauf für den irdischen Beobachter zum Zeitpunkt der besten Sichtbarkeit eines Kometen in Sonnennähe (Perihel) sehr ähnlich dem einer Großkreisbahn. Auch das war ein Grund, warum sich die Vorstellung einer Großkreis-Kometenbahn in der Wissenschaft viele Jahrhunderte gehalten hat.

Für ein Himmelsobjekt, das scheinbar auf einem Großkreis, der nicht parallel zur Grundebene des Koordinatensystems liegt, die Erde umläuft, bedeutet dies, dass ein Teil des Weges oberhalb der Grundebene verläuft, der anschließende unterhalb der Grundebene, dann wieder oberhalb der Grundebene, dann … .

Es handelt sich also um eine periodische Bewegung, die durch die verwendete Projektion als solche wiederzuerkennen ist.

Der Archimedes-Kartenentwurf hat die besondere Eigenschaft, dass aus einem gegen die Grundebene geneigten Großkreis auf der Sphäre in sehr guter Annäherung eine Projektions-Kurve in der Karte wird, die stark an eine bekannte, periodische Funktion mit der Periode 2π erinnert: Eine Kurve von sinusförmiger Gestalt.

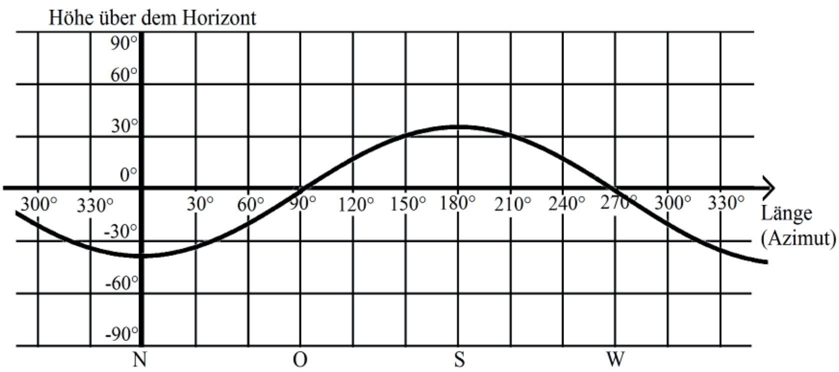


Abbildung 10: Beispiel für eine sinusförmige Bewegung eines Himmelskörpers auf einer Zylinderkarte, bei dem von einer annähernden Großkreisbewegung ausgegangen wird: Scheinbare Sonnenbahn zum Frühlingsanfang für einen Beobachter bei 50° N, wenn als Grundebene der Sphäre die Äquatorebene verwendet wird.

Ein zur Breite 0° geneigter Großkreis führt bei der Archimedes-Projektion auf eben diesen typischen periodischen Verlauf: Die sichtbare Bahn über der Breite 0° liefert den Bogen oberhalb der Achse, der nichtsichtbare Bahnverlauf den anderen Bogen der periodischen Bahn auf der Karte.

Die Übertragung dieses Gedankens auf die Schmidt-Daten ermöglicht es nun, durch die Suche nach einer geeigneten sinusförmigen Kurve, die die gegebenen Daten „gut" approximiert, ein mathematisches Werkzeug in die Hand zu bekommen, das ein sinnvolles Ergänzen nicht beobachteter Werte ermöglicht. Genauer:

Mit dem Ansatz einer sinusförmigen periodischen Bahnkurve $f(arc(\varphi)) = a \cdot \sin(b \cdot \varphi + c) + d$ in der Archimedes-Karte lassen sich durch geeignete Bestimmung der Parameter für die Näherungskurve die nicht beobachteten „Zwischenpunkte" der scheinbaren Kometenbahn sinnvoll ergänzen: Aus den in der Karte eingezeichneten originalen Daten führt die Frage nach geeigneter Bahn-Approximation durch eine Sinuskurve zur Möglichkeit, an beliebigen Zwischenstellen noch fehlende Bahnpunkte näherungsweise zu berechnen.

Diese Überlegungen ermöglichen nun die Formulierung einer **Serie von Arbeitsaufträgen** für die Schülerinnen und Schüler, die sukzessive zu bearbeiten sind, wobei eine arbeitsteilige Vorgehensweise denkbar und sinnvoll ist, woran sich dann ein Experten-Austausch nach Abschluss der Parallelbearbeitungen anschließen kann. Die am Ende des Beitrags angefügten **Arbeitsblätter 1-3** enthalten diese Arbeitsaufträge, vervollständigt um Lösungsvorschläge.

Das Ergebnis

Mit den Berechnungen haben wir nun „echte" Forschungsarbeit geleistet. Zur Zeit von Erasmus Schmidt kann man sich das Vorgehen ähnlich vorstellen – wenn auch mit anderen Hilfsmitteln. Mit trigonometrischen Tabellen und einfachen Rechenhilfen, zur mechanischen Multiplikation etwa, galt es zur Zeit von Erasmus Schmidt, die Annäherung der unvollständig gegebenen Kometenbahn zu vollziehen. Mit geeigneten Rechnungen versuchte man, möglichst „gute" Werte für fehlende Bahnangaben zu finden.

War die sinnvolle Ergänzung der Bahn eines unbekannten Himmelsobjektes wie eines Kometen früher häufig wichtig, damit daraus bestimmte vermeintliche astrologische Bedeutungen interpretativ „abgeleitet" werden konnten, steht heute vor allem die Bestimmung der wahren Bahnverläufe der himmlischen Körper im Vordergrund. Die wirkliche Rekonstruktion ist natürlich noch um einiges umfangreicher, doch bietet auch unser Ansatz einen guten Eindruck, wie man sich dieser Problemstellung innerhalb der Astronomie mit überschaubarem Aufwand nähern kann – mit erstaunlich guten Resultaten.

Literatur

Erasmus Schmidt, Prodromus Conjunctionis Magnae, anno 1623. futurae. Das ist: Kurtzes und Einfeltiges […] Bedencken, Wittenberg, 1619.

H. G. Bigalke: Kugelgeometrie. Frankfurt am Main 1984.

R. Hame: Sphärische Trigonometrie. Additum für die Jahrgangsstufe 11. Oldenburg Schulbuchverlag, München 1995.

E. Hammer: Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1916.

W. Herget, E. Malitte, K. Richter e. a.: Neue Materialien für den Mathematikunterricht. Sinusfunktionen. Hannover 2002.

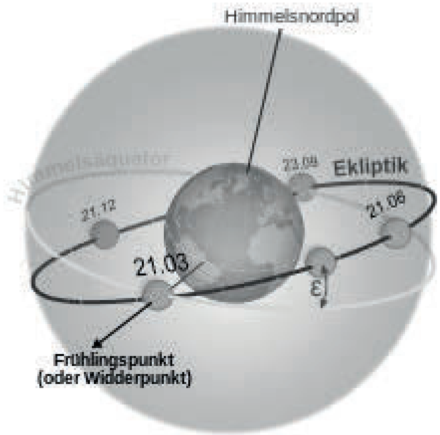
H. Kern, J. Rung: Sphärische Trigonometrie. München 1986.

Arbeitsblatt 1: Kartenentwürfe zum Modell der Himmelskugel

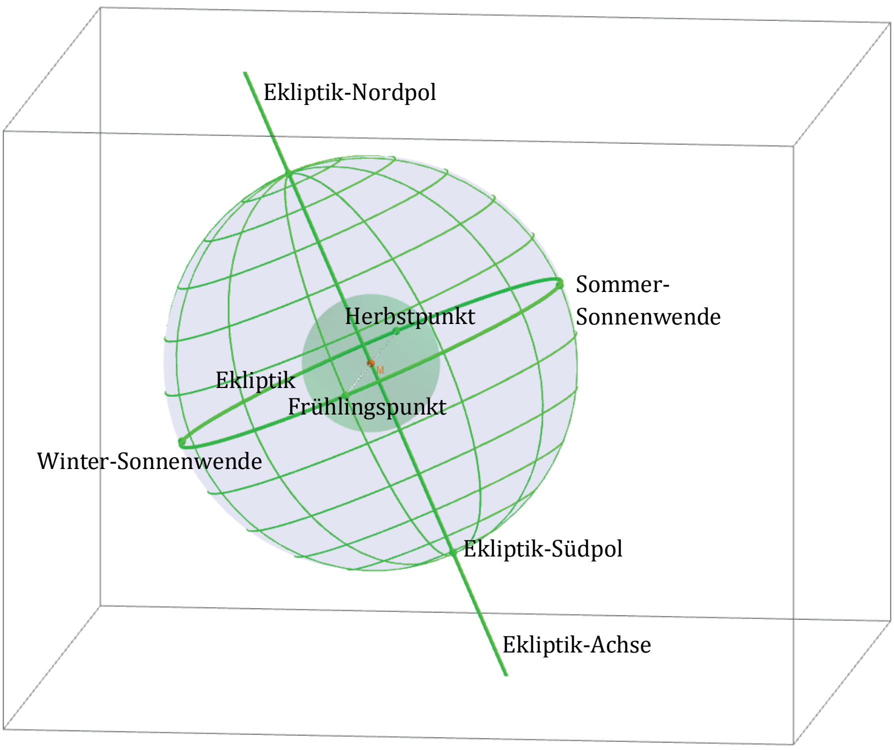
Der Lauf der Gestirne am Himmel wurde zu allen Zeiten aufmerksam verfolgt. Moderne astronomische Beobachtungsinstrumente von höchster Präzision beschreiben Orte astronomischer Objekte basierend auf den gleichen mathematischen Grundüberlegungen wie einfache Peilgeräte vor Hunderten von Jahren. Aus den dabei ermittelten Datenmengen über Objekt-Orte zu ausgewählten Beobachtungszeitpunkten werden heute wie damals Rückschlüsse auf Bahnbewegungen gezogen.

Aufgabe 1a: Informieren Sie sich über den mathematischen **Modellansatz der Himmelskugel** und der gebräuchlichen Koordinatensysteme, die am Himmelsäquator bzw. an der Ekliptik orientiert sind.

Aufgabe 1b: Nutzen Sie die für die Konstruktion im Raum ausgelegte Geometriesoftware Geogebra 3D, um die Himmelskugel mit Äquator- und Ekliptikkoordinatensystem zu konstruieren.



Tipp: Die fertige Konstruktion zeigt die nachstehende Graphik. Konstruieren Sie Schritt für Schritt: Beginnend mit Erd- und Himmelskugel mit Erdachse und Himmelsäquator, konstruieren Sie darauf folgend Ekliptik und Ekliptik-Achse und im letzten Schritt die Breitenkreise und Meridiane, bezogen auf die Ekliptik.



***Bemerkung*:** Aus dem Einführungstext des Artikels kann der Abschnitt 1 „**Die Himmelskugel – das astronomische Modell**“ als Informationsquelle genutzt werden, der alle für die weitere

Auseinandersetzung wesentlichen Begriffe und Zusammenhänge zur Modellierung der Sphäre zusammenstellt.
Die Abbildungen 1-5 aus diesem Abschnitt des Informationsmaterials geben zudem einen Vorschlag, wie die 3D-Geogebra-Konstrutktion Schritt für Schritt entstehen kann.

Aufgabe 1c: Kartenentwürfe

Eine Orientierung auf der Himmelskugel mit Hilfe eines Gradnetzes, das für jeden Punkt der Sphäre eine Charakterisierung durch den zugehörigen Breitenkreis und den entsprechenden Meridian ermöglicht, stellt ein leistungsfähiges Denkmodell dar. Eine konkrete graphische Veranschaulichung ist dagegen anspruchsvoll. Auch mit Hilfe von 3D-Geometrie-Software erweist es sich als aufwendig, zu vorgegebenen Himmelkoordinaten auf der Sphäre einen Punkt oder auch Scharen von Punkten einzutragen. Der Wunsch, ebene Karten zur Sphäre zu konstruieren, die eine Veranschaulichung leicht ermöglichten, war dementsprechend naheliegend.

Sogenannte Zylinderkartenentwürfe gehen davon aus, dass die Punkte der Sphäre auf den Mantel eines Zylinders auf bestimmte Weise projiziert werden, der eng um die Sphäre gelegt ist.

Informieren Sie sich über die mathematischen Hintergründe der Plattkarten- und speziell der Archimedes-Projektion und setzen Sie sich mit den Vor- und Nachteilen dieser Karten auseinander.

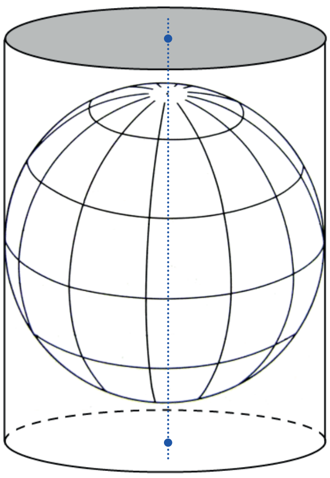


Abbildung: Sphäre mit umhüllendem Zylinder und blauer Projektionsachse

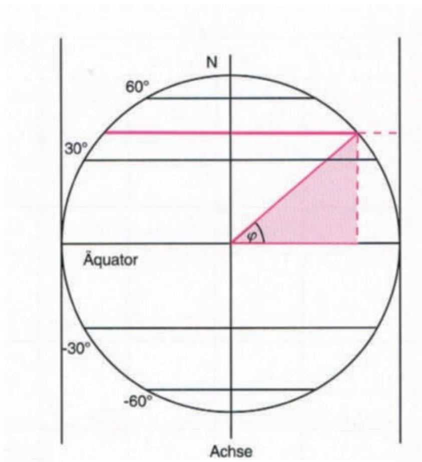


Abbildung: Archimedes-Projektion

Bemerkung: Aus dem Einführungstext des Artikels kann der Abschnitt 2 „**Mathematische Himmels-Geographie – Kartenentwürfe**“ als Informationsquelle genutzt werden, die alle für die weitere Auseinandersetzung wesentlichen Begriffe und Zusammenhänge zu Kartenentwürfen zusammenstellt.

Arbeitsblatt 2: Astronomische Beobachtungen als Datenquellen zur Beschreibung von Orten astronomischer Objekte: Der Große Komet von 1618.

Sorgfältig erhobene astronomische Beobachtungsdaten, wann und wie sie auch immer erhoben wurden, können Einblick in astronomische Zusammenhänge geben. Im Folgenden soll an historischen Daten zur scheinbaren Bewegung eines Kometen untersucht werden, wie aus den vorliegenden Daten (=Angaben von Himmelskoordinaten im ekliptikalen System für einen bestimmten Beobachtungszeitraum) Rückschlüsse auf die Kometenbahn gezogen werden können.

Aufgabe 2a: Setzen Sie sich dazu zunächst mit dem geschichtlichen Kontext und den erhaltenen historischen Beobachtungsdaten auseinander.

1618, am Vorabend des 30-jährigen Krieges, erschienen in recht kurzen Abständen gleich drei Kometen am europäischen Nachthimmel. Viele Mathematiker Europas verfassten Schriften über ihre Kometenbeobachtungen und ihre Beschreibungen der Kometenbahnen. So auch an der Universität Wittenberg, wo von dem dort zu dieser Zeit lehrenden Mathematikprofessor Erasmus Schmidt (1570–1637) eine Kometenschrift mit Beobachtungsdaten zum Stand des Kometen überliefert ist.[5] Er beobachtete den dritten und größten Kometen des Jahres 1618 (C/1618 W1) vom 21. November 1618 bis zum 5. Januar 1619 täglich, nur an den Tagen unterbrochen, an denen man den Kometen „*wegen des Gewölckes nicht* [hat] *sehen können*.“[6]

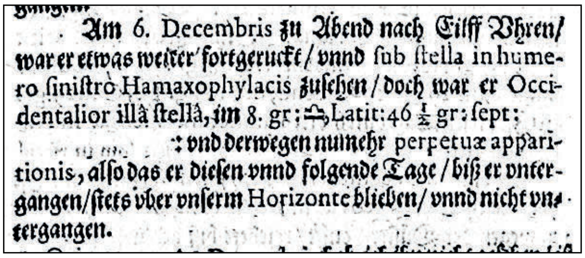
Die Angabe der Beobachtungsdaten geschieht bei Erasmus Schmidt als fortlaufende Beschreibung stets in gleicher Weise; ein Beispiel vom 4. Dezember soll dies verdeutlichen.

Am 4. Decembris/ war er uber die beyden stellulas in dorso Hamaxophylacis komen/	Begonnen wird am jeweiligen Beobachtungstag mit der ungefähren Einordnung des Kometen an der Sphäre mithilfe der nahe stehenden Sternbilder, hier: der Rücken des Bärenhüters.
und stund auffs genaweste im 15 ½ gr. G, *Latit. Sept. 40.* […]	Es folgt die Angabe seiner Position nach Länge (Longitude) und Breite (Latitude). Die Länge wird auf den Tierkreis der Ekliptik bezogen, in dem jedes der zwölf Tierkreiszeichen einen Bereich von 30 Grad besitzt (hier: 15,5° im Zeichen Waage), bei der Breite erfolgt der Zusatz „septemtrionalis“ für nördlich, „australis“ für südlich (hier: 40° nördlich).

[5] Vgl. Erasmus Schmidt, Prodromus Conjunctionis Magnae, anno 1623. futurae. Das ist: Kurtzes und Einfeltiges […] Bedencken, Wittenberg, 1619.

[6] Die Datumsangaben sind im damals in den protestantischen Ländern noch gültigen julianischen Kalender erfolgt. Für eine Übertragung in den heute gültigen Kalender müssten jeweils 10 Tage hinzuaddiert werden.

Für den 6. Dezember findet sich dieser Eintrag:



Am 6. Decembris zu Abend nach Eilff Uhren/ war er etwas weiter fortgeruckt/ vnnd sub stella in humero sinistro Hamaxophylacis zusehen/ doch war er Occidentalior illâ stellâ, im 8. gr: ♎ Latit: 46 ½ gr: sept:
: vnd derwegen nunmehr perpetuæ apparitionis, also das er diesen vnnd folgende Tage/ biß er vntergangen/ stets vber vnserm Horizonte blieben/ vnnd nicht vntergangen.

Die folgende Tabelle zeigt die von Schmidt in seiner Schrift zusammengestellten Beobachtungsdaten in aufbereiteter Form.

	Länge	**absolute Länge**	**Breite**
21.11.	-		8°
23.11.	10,5° ♏		12,5°
24.11.	8° ♏		18°
27.11.	0° ♏		27°
03.12.	18° ♎		39°
04.12.	15,5° ♎		40°
05.12.	13° ♎		43°
06.12.			
09.12.	3° ♎		50°
10.12.	0° ♎		53°
12.12.	26° ♍		55°
14.12.	20° ♍		57,5°
15.12.	16° ♍		58°
17.12.	12° ♍		60°
24.12.	25° ♌		-
26.12.	15° ♌		-
28.12.	11° ♌		-
05.01.	5° ♌		65°

Es entspricht beispielsweise die Angabe 13° ♎ absolut einer Länge von (180° + 13° =)193°.

Bedeutung der verwendeten Symbole:

Widder ♈:	0° - 30°
Stier ♉:	30° - 60°
Zwilling ♊:	60° - 90°
Krebs ♋:	90° - 120°
Löwe ♌:	120° - 150°
Jungfrau ♍:	150° - 180°
Waage ♎:	180° - 210°
Skorpion ♏:	210° - 240°
Schütze ♐:	240° - 270°
Steinbock ♑:	270° - 300°
Wassermann ♒:	300° - 330°
Fische ♓:	330° - 360°

Aufgabe 2b: Verwenden Sie die Tabellenkalkulation, um die absolute Länge (=Länge als Gradzahl) sowie die dezimale Darstellung (=Länge als Bogenmaß) der von Schmidt angegebenen Längen-Daten zu bestimmen.

Arbeitsblatt 3: Der Große Komet von 1618 – ein astronomisches CAS-Projekt

Die von Schmidt vorgelegten Beobachtungsdaten weisen Lücken auf. Am 21.11. und vom 24. bis 28.12. fehlen entweder die Längen- oder die Breitenkoordinaten. Die naheliegende Frage: Lässt sich hier eine sinnvolle Vermutung anstellen? Die folgenden Überlegungen sollen einen Weg aufzeigen, auf mathematisch wohlbegründete Weise, die fehlenden Daten mit Hilfe geeigneter Näherungsansätze zu ergänzen.

	Länge	**Breite**
21.11.	-	8°
23.11.	10,5° ♏	12,5°
24.11.	8° ♏	18°
27.11.	0° ♏	27°
03.12.	18° ♎	39°
04.12.	15,5° ♎	40°
05.12.	13° ♎	43°
06.12.		
09.12.	3° ♎	50°
10.12.	0° ♎	53°
12.12.	26° ♍	55°
14.12.	20° ♍	57,5°
15.12.	16° ♍	58°
17.12.	12° ♍	60°
24.12.	25° ♌	-
26.12.	15° ♌	-
28.12.	11° ♌	-
05.01.	5° ♌	65°

Die Schmidt-Daten belegen deutlich, dass der beobachtete Komet eine Bahn durchläuft. Die Astronomen stellen sich diese Bahnen als scheinbare Großkreise auf der Sphäre vor.

Für ein Himmelsobjekt, das scheinbar auf einem Großkreis, der nicht parallel zur Grundebene des Koordinatensystems liegt, die Erde umläuft, bedeutet dies, dass ein Teil des Weges oberhalb der Grundebene verläuft, der anschließende unterhalb der Grundebene, dann wieder oberhalb der Grundebene, dann … . Es handelt sich also um einen periodischen Bewegungsvorgang, der durch die verwendete Projektion als solcher wiederzuerkennen ist.

Der Archimedes-Kartenentwurf hat die besondere Eigenschaft, dass aus einem gegen die Grundebene geneigten Großkreis auf der Sphäre in sehr guter Annäherung eine Projektions-Kurve in der Karte wird, die sehr an eine bekannte, periodische Funktion mit der Periode 2π erinnert: Eine Kurve von sinusförmiger Gestalt.

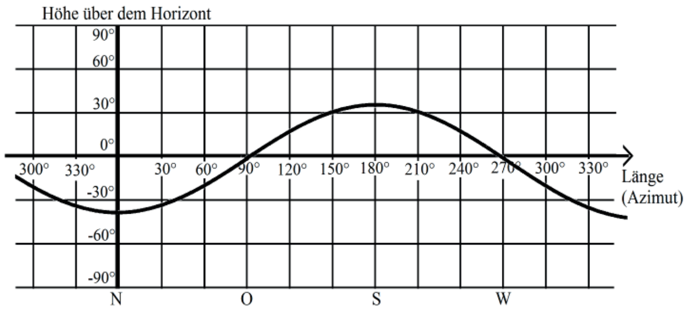


Abbildung: Beispiel für eine sinusförmige Bewegung eines Himmelskörpers auf einer Zylinderkarte, bei dem von einer annähernden Großkreisbewegung ausgegangen wird: Scheinbare Sonnenbahn zum Frühlingsanfang für einen Beobachter bei 50° N, wenn als Grundebene der Sphäre die Äquatorebene verwendet wird.

Bemerkung: Die folgenden 3 Aufgabenvorschläge ermöglichen eine sukzessive Bearbeitung, aber auch arbeitsteiliges oder nur partielles Bearbeiten. (Für die zuletzt genannte Vorgehensweise ist Aufgabenvorschlag Ia oder IIa voranzustellen.)

Aufgabenvorschlag I (Verwendung der Tabellenkalkulation)

Aufgabe a: Nutzen Sie die Tabellenkalkulation, um aus den Beobachtungsdaten von Schmidt die Bildpunkte der Archimedes-Projektion zu berechnen.

Aufgabe b: Stellen Sie Bildpunkte der Archimedes-Projektion grafisch dar.

Aufgabe c: Diskutieren Sie die Möglichkeit, verschiedene Funktionen an die „Punktwolke“ der Schmidt-Daten anzupassen.

Aufgabe d: Nutzen Sie die Sinus-Regression, um eine sinnvolle Funktionsanpassung für die Schmidt-Daten zu erhalten.

Aufgabe e: Berechnen Sie Näherungswerte für die Lücken in den Ausgangsdaten, unter Heranziehung der von Ihnen unter **c** ermittelten Sinus-Funktion.

Aufgabe f: Ergänzen Sie die Schmidt-Daten durch weitere Näherungswerte für die Kometenbahn.

Aufgabenvorschlag II (Verwendung des Statistikmenüs)

Aufgabe a: Nutzen Sie das Statistik-Menü, um aus den Beobachtungsdaten von Schmidt die Bildpunkte der Archimedes-Projektion zu berechnen und grafisch darzustellen.

Aufgabe b: Stellen Sie Bildpunkte der Archimedes-Projektion grafisch dar.

Aufgabe c: Diskutieren Sie die Möglichkeit, verschiedene Funktionen an die „Punktwolke“ der Schmidt-Daten anzupassen. Variieren Sie die Parameter der Funktion und untersuchen Sie die Güte der Approximation der Kometenbahn durch die verschiedenen Funktionsterme.

Aufgabe d: Diskutieren Sie Fehlermöglichkeiten und Grenzen Ihrer Vorgehensweise.

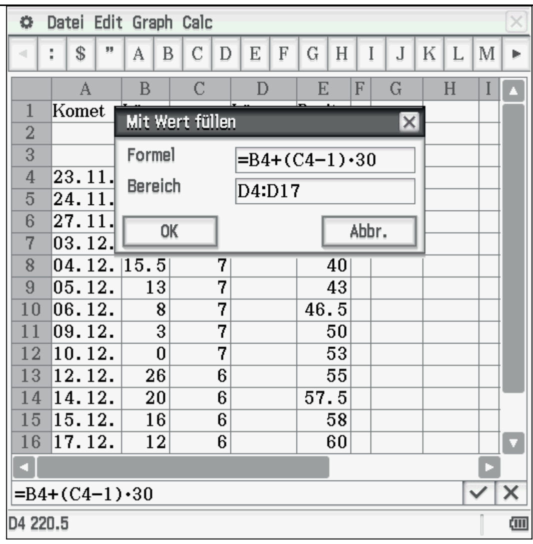
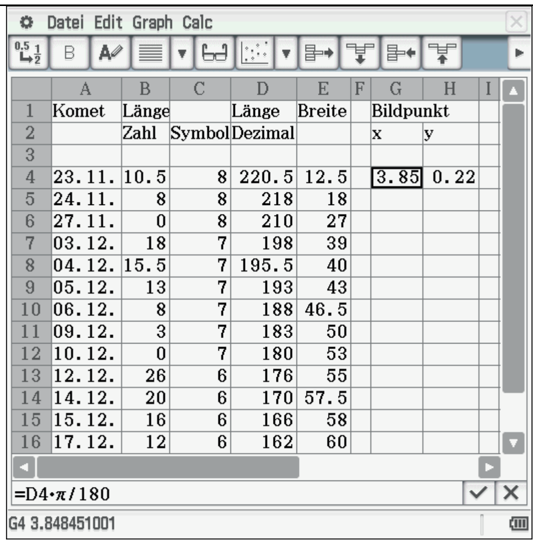
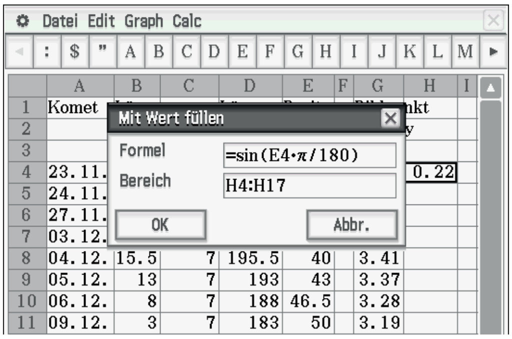
Aufgabenvorschlag III (Verwendung des Geometrie-Menüs)

Aufgabe a: Nutzen Sie das Geometrie-Menü, um die Bildpunkte der Archimedes-Projektion der Schmidt-Daten auf dem Zeichenblatt einzutragen.

Aufgabe b: Untersuchen Sie verschiedene Funktionsterme, um die gegebenen Daten visuell möglichst gut durch eine Kurve zu approximieren. Diskutieren Sie Ihr Vorgehen.

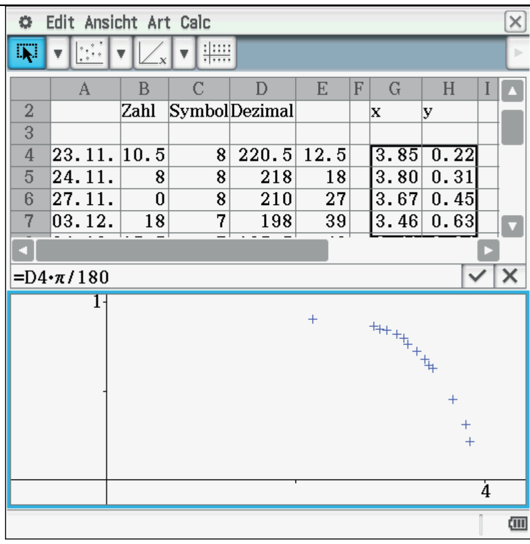
Lösungshinweise

I: Verwendung der Tabellenkalkulation

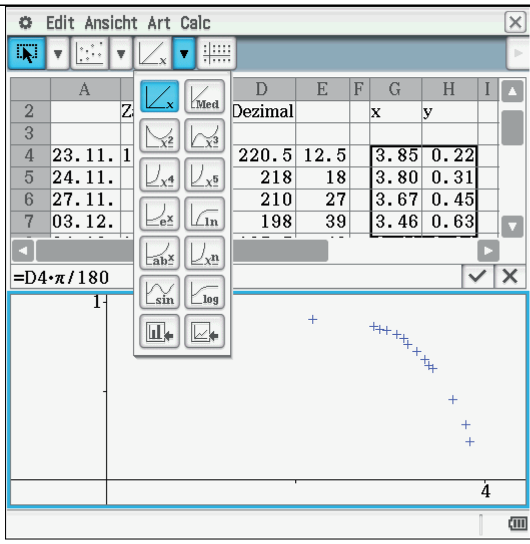
	Anforderungen	Lösungsmöglichkeiten
	Die Schülerinnen und Schüler ...	**Ausgewählte Screenshots**
Ia	• benennen die Spalten; • tragen die vollständig vorhandenen Datensätze geeignet in ein Tabellenblatt ein, wobei für die Länge (Zahl und Symbol) zwei Spalten verwendet werden; • wandeln das Symbol in der Längenangabe in eine natürliche Zahl um; • nutzen eine Formel, mit der sie aus den zwei Angaben für die Länge eine Dezimalzahl berechnen und das Menü, um den entsprechenden Bereich damit zu füllen.	
Ia	• berechnen die Koordinaten der Bildpunkte der Archimedes-Projektion (vgl. Abschnitt 2), also die x-Koordinate ist das Bogenmaß der Länge und die y-Koordinate ist der Sinus der Breite; • geben die zugehörigen Formeln ein; • füllen den entsprechenden Bereich.	

<table>
<tr>
<td>Ib</td>
<td>

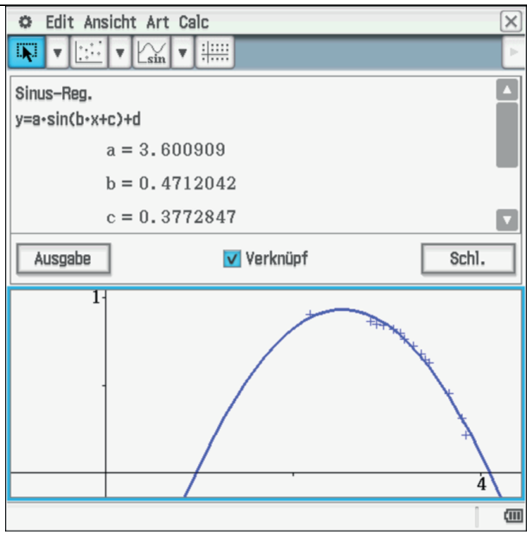
- stellen die Bildpunkte der Archimedes-Projektion grafisch dar.

</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ic</td>
<td>

- diskutieren die Möglichkeit, ganz verschiedene Funktionen an die „Punktwolke“ anpassen zu können.

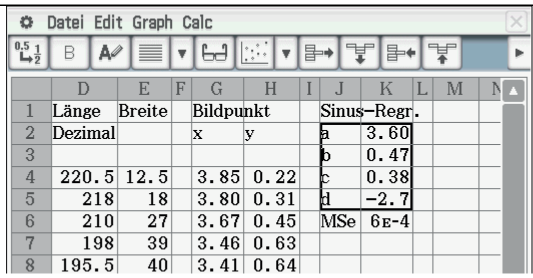
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Id</td>
<td>

- nutzen die Sinus-Regression um per „Knopfdruck“ eine sinnvolle Funktionsanpassung zu erhalten;
- vergleichen die transformierten Daten (Kreuze) mit dem durchgezogenen Graphen der Sinusfunktion in dem dargestellten Bereich.

</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Ie

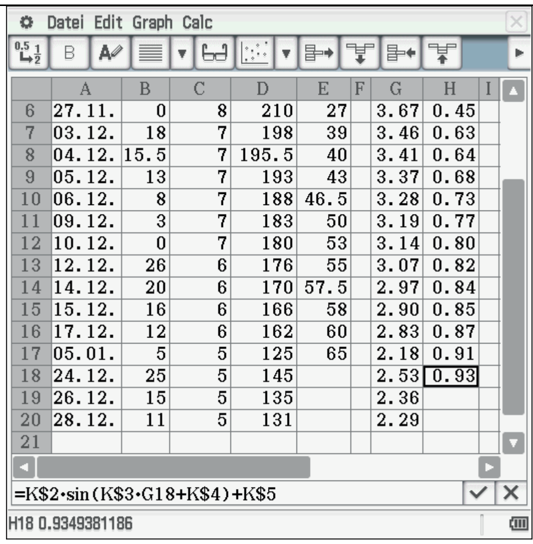
- übernehmen die Parameter der Sinusfunktion in das Tabellenblatt.



	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Länge	Breite		Bildpunkt			Sinus−Regr.			
2	Dezimal			x	y		a	3.60		
3							b	0.47		
4	220.5	12.5		3.85	0.22		c	0.38		
5	218	18		3.80	0.31		d	−2.7		
6	210	27		3.67	0.45		MSe	6E-4		
7	198	39		3.46	0.63					
8	195.5	40		3.41	0.64					

Ie

- ergänzen in der Tabelle die Ausgangsdaten, bei denen Längenangaben vorliegen, die Breitenangaben allerdings fehlen (24.12., 26.12., 28.12.);
- verwenden die Formeln aus **Ia** für die Berechnung der x-Werte der Bildpunkte;
- verwenden die ermittelte Sinusfunktion für die Berechnung der y-Werte der Bildpunkte.



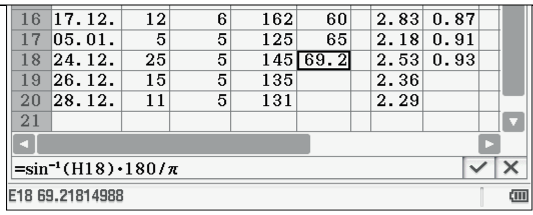
	A	B	C	D	E	F	G	H
6	27.11.	0	8	210	27		3.67	0.45
7	03.12.	18	7	198	39		3.46	0.63
8	04.12.	15.5	7	195.5	40		3.41	0.64
9	05.12.	13	7	193	43		3.37	0.68
10	06.12.	8	7	188	46.5		3.28	0.73
11	09.12.	3	7	183	50		3.19	0.77
12	10.12.	0	7	180	53		3.14	0.80
13	12.12.	26	6	176	55		3.07	0.82
14	14.12.	20	6	170	57.5		2.97	0.84
15	15.12.	16	6	166	58		2.90	0.85
16	17.12.	12	6	162	60		2.83	0.87
17	05.01.	5	5	125	65		2.18	0.91
18	24.12.	25	5	145			2.53	0.93
19	26.12.	15	5	135			2.36	
20	28.12.	11	5	131			2.29	
21								

=K$2·sin(K$3·G18+K$4)+K$5

H18 0.9349381186

Ie

- berechnen aus dem y-Wert der Archimedes-Projektion den zugehörigen x-Wert durch Umformen der Formel nach $E18$: $H18 = sin(E18\pi/180)$ (siehe Ia).



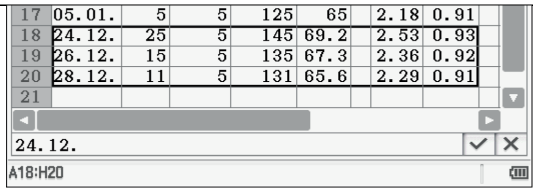
	A	B	C	D	E	F	G	H
16	17.12.	12	6	162	60		2.83	0.87
17	05.01.	5	5	125	65		2.18	0.91
18	24.12.	25	5	145	69.2		2.53	0.93
19	26.12.	15	5	135			2.36	
20	28.12.	11	5	131			2.29	
21								

=sin⁻¹(H18)·180/π

E18 69.21814988

Ie

- vervollständigen so die Datensätze mit bekannter Länge, aber unbekannter Breite.



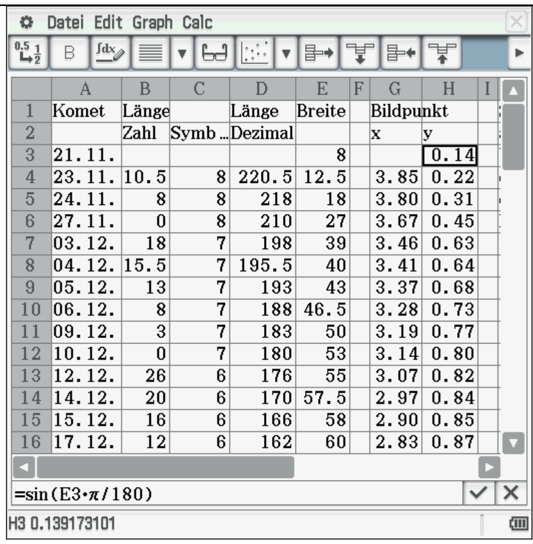
	A	B	C	D	E	F	G	H
17	05.01.	5	5	125	65		2.18	0.91
18	24.12.	25	5	145	69.2		2.53	0.93
19	26.12.	15	5	135	67.3		2.36	0.92
20	28.12.	11	5	131	65.6		2.29	0.91
21								

24.12.

A18:H20

Ie

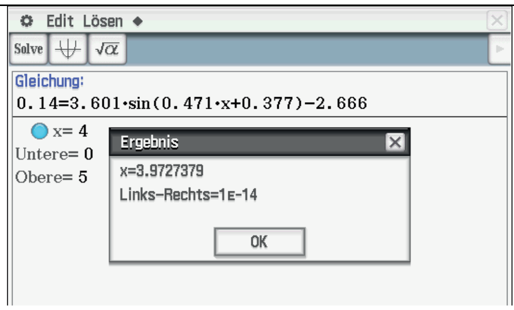
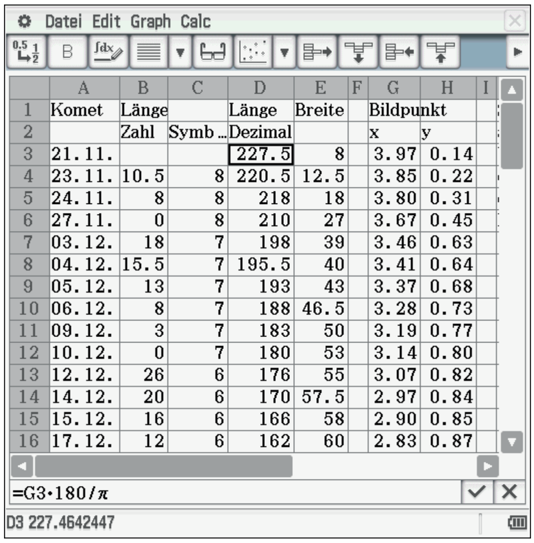
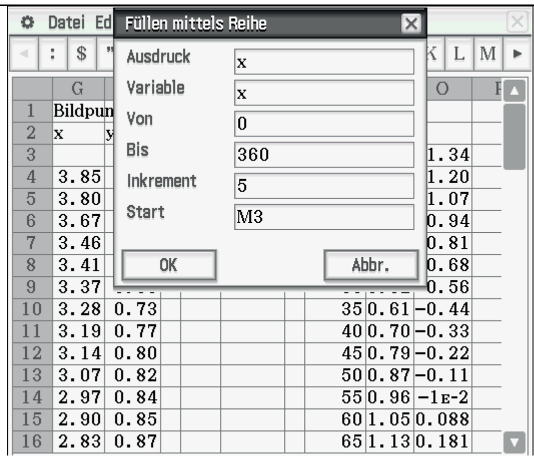
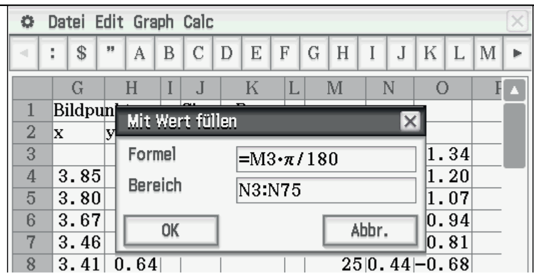
- ergänzen in der Tabelle der Ausgangsdaten den Datensatz, bei dem die Breite bekannt ist, allerdings die Längenangabe fehlt (21.11.);
- berechnen aus dem Wert der Breite den y-Wert der Archimedes-Projektion.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Komet	Länge		Länge	Breite		Bildpunkt	
2		Zahl	Symb…	Dezimal			x	y
3	21.11.				8			0.14
4	23.11.	10.5	8	220.5	12.5		3.85	0.22
5	24.11.	8	8	218	18		3.80	0.31
6	27.11.	0	8	210	27		3.67	0.45
7	03.12.	18	7	198	39		3.46	0.63
8	04.12.	15.5	7	195.5	40		3.41	0.64
9	05.12.	13	7	193	43		3.37	0.68
10	06.12.	8	7	188	46.5		3.28	0.73
11	09.12.	3	7	183	50		3.19	0.77
12	10.12.	0	7	180	53		3.14	0.80
13	12.12.	26	6	176	55		3.07	0.82
14	14.12.	20	6	170	57.5		2.97	0.84
15	15.12.	16	6	166	58		2.90	0.85
16	17.12.	12	6	162	60		2.83	0.87

=sin(E3·π/180)

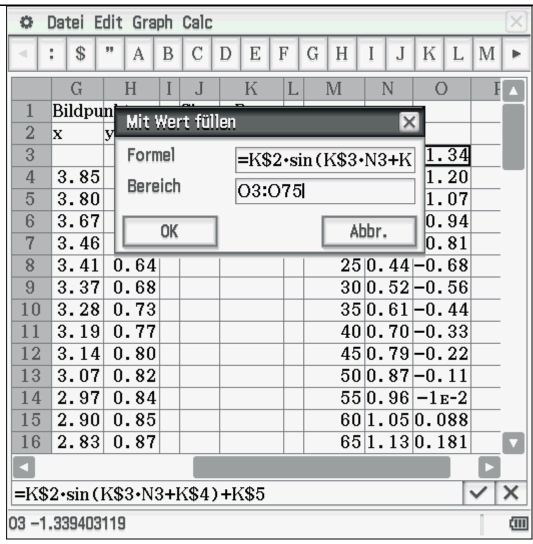
H3 0.139173101

Ie	• interpretieren diesen y-Wert als Funktionswert der Sinus-Regression; • erkennen, dass hier zu einem Funktionswert einer Sinusfunktion das zugehörige Argument zu ermitteln ist; • lösen das Problem in der Applikation zum numerischen Lösen von Gleichungen unter Verwendung eines geeigneten Anfangswertes, z. B. $x = 4$, im Vergleich zu den benachbarten x-Koordinaten; • übernehmen das Ergebnis für den x-Wert in die Tabellenkalkulation; • bestimmen aus dem x-Wert der Archimedes-Projektion die Längenangabe in Grad.	 
If	• erzeugen eine Wertetabelle für die Sinus-Funktion, um Näherungswerte für die Kometenbahn auch an nicht beobachteten Tagen zu erhalten und an beobachteten Tagen die Näherungswerte mit den beobachteten Werten vergleichen zu können; • wählen für die Längenangaben in Grad den Bereich von 0 bis 360, der mittels einer Reihe gefüllt wird.	
If	• bestimmen aus den Werten für die Länge die x-Werte der Archimedes-Projektion; • bestimmen die y-Werte der Bildpunkte mit der Funktionsgleichung der Sinus-Regression; • bestimmen aus den y-Werten der Sinus-Regression die zugehörige Breite in Grad; • interpretieren und bewerten die Ergebnisse; • lesen Näherungswerte für die Kometen-	

bahn an nicht beobachteten Tagen ab durch eine geeignete Zuordnung zwischen Wertetabelle und Datum im Vergleich zu den Ausgangsdaten;

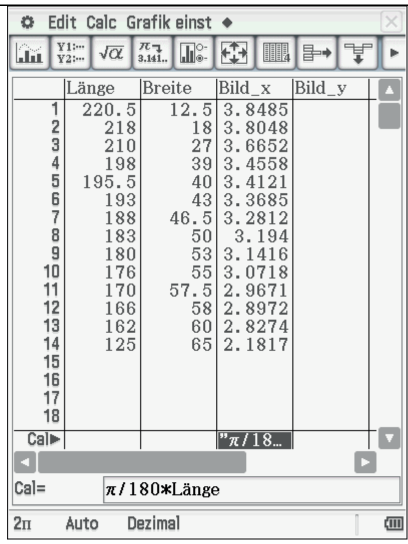
- erkennen, dass geringe Abweichungen zwischen den Ausgangsdaten und den Näherungswerten, die die Sinus-Regression bei Verwendung der Archimedes-Projektion liefert, bestehen.

Hinweis: Die numerischen Abweichungen zwischen Ausgangsdaten und berechneten Näherungswerten können in der *Tabellenkalkulation* weiter untersucht werden, z. B. über die Summe der Abstandsquadrate oder durch den Maximum-Abstand, für diese Aufgabenstellung reicht es durchaus auf **Id** zu verweisen und die Güte der Näherung qualitativ zu bewerten.

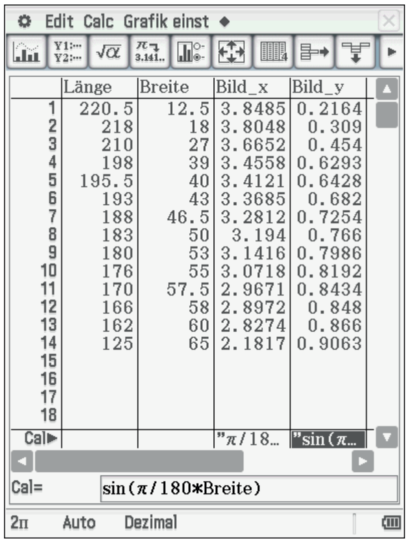


II: Verwendung des Statistik-Menüs

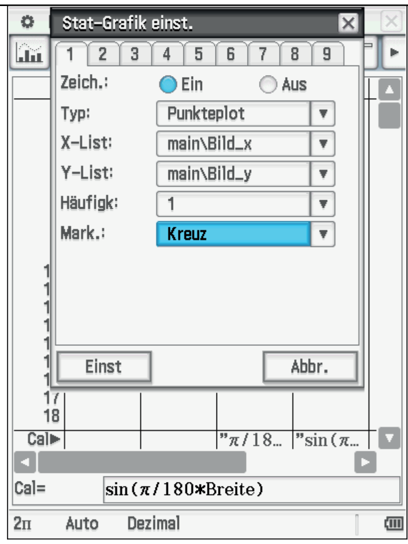
	Anforderungen	**Lösungsmöglichkeiten**
	Die Schülerinnen und Schüler ...	**Ausgewählte Screenshots**
IIa	• benennen die Spalten (Listenkopf); • tragen die vollständig vorhandenen Datensätze ein (Liste Länge und Liste Breite); • berechnen die x-Koordinaten der Archimedes-Projektion (Liste Bild_x) aus der Liste Länge durch die Eingabe des zugehörigen Terms in der Zeile ***Cal=***; • berechnen die y-Koordinaten der Archimedes-Projektion (Liste Bild_y) aus der Liste Breite durch die Eingabe des zugehörigen Terms in der Zeile ***Cal=***. Hinweis: Anstelle der Liste Länge kann zunächst auch die Länge in zwei Listen (Zahl, Symbol) eingegeben werden und mit dem zugehörigen Term in der Zeile ***Cal=*** daraus die Liste Länge berechnet werden	
IIb	• definieren eine Graphik für die grafische Darstellung der Koordinaten.	

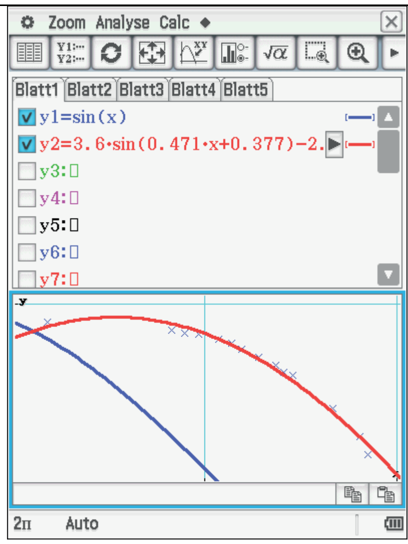


	Länge	Breite	Bild_x	Bild_y
1	220.5	12.5	3.8485	
2	218	18	3.8048	
3	210	27	3.6652	
4	198	39	3.4558	
5	195.5	40	3.4121	
6	193	43	3.3685	
7	188	46.5	3.2812	
8	183	50	3.194	
9	180	53	3.1416	
10	176	55	3.0718	
11	170	57.5	2.9671	
12	166	58	2.8972	
13	162	60	2.8274	
14	125	65	2.1817	
15				
16				
17				
18				
Cal▶			"π/18…	

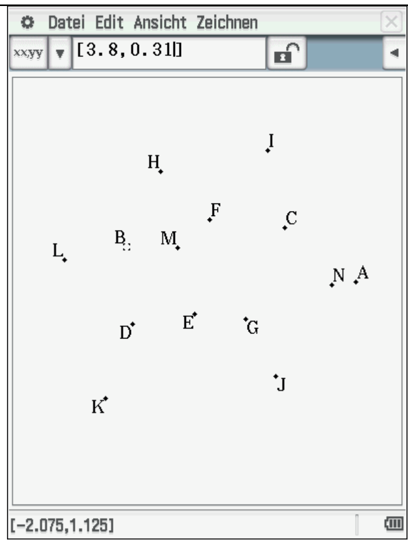
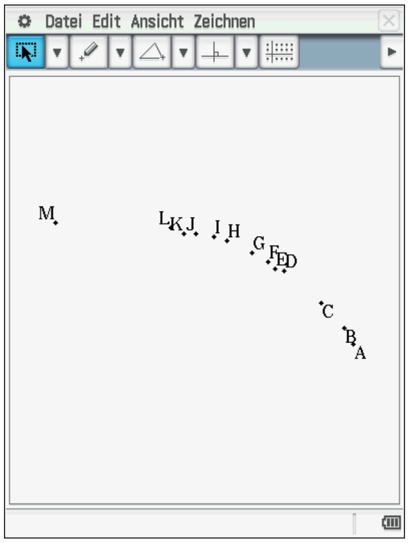
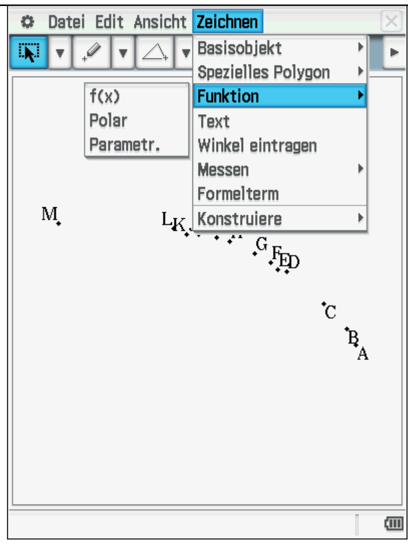


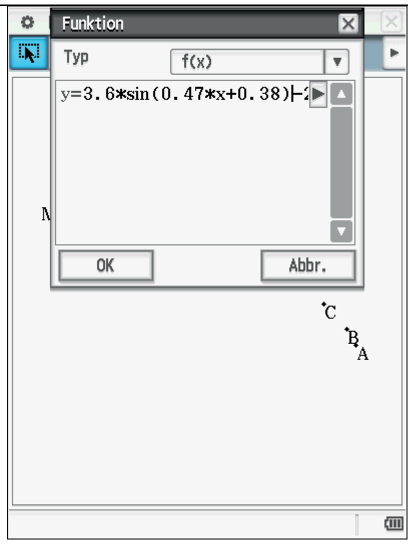
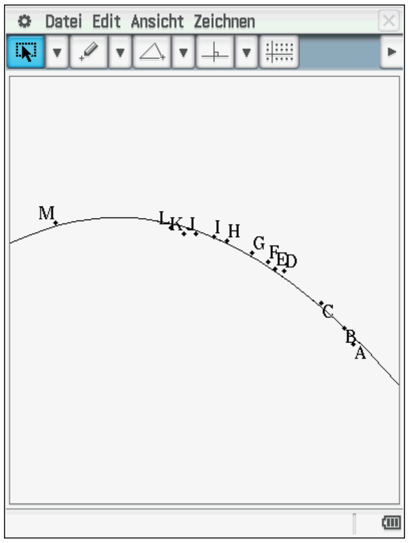
	Länge	Breite	Bild_x	Bild_y
1	220.5	12.5	3.8485	0.2164
2	218	18	3.8048	0.309
3	210	27	3.6652	0.454
4	198	39	3.4558	0.6293
5	195.5	40	3.4121	0.6428
6	193	43	3.3685	0.682
7	188	46.5	3.2812	0.7254
8	183	50	3.194	0.766
9	180	53	3.1416	0.7986
10	176	55	3.0718	0.8192
11	170	57.5	2.9671	0.8434
12	166	58	2.8972	0.848
13	162	60	2.8274	0.866
14	125	65	2.1817	0.9063
15				
16				
17				
18				
Cal▶			"π/18…	"sin(π…



IIc **IId**	• können zusätzlich zur grafischen Darstellung der einzelnen Punkte im gleichen Graphikfenster selbst definierte Funktionen darstellen; • wählen den *Y-Editor* für die Eingabe verschiedener Funktionsterme; • variieren die Parameter der Funktionen; • vergleichen die Ergebnisse anhand der grafischen Darstellungen oder auch anhand der Wertetabellen; • erkennen Rechner-Grenzen und Fehler bei der grafischen Darstellung von Sinus-Funktionen; • diskutieren Ursachen; • entwickeln unterschiedliche Strategien; • nutzen die gefundene Näherungsfunktion, um weitere Informationen über die Kometenbahn zu ermitteln. Hinweis: Das *Statistik*-Menü bietet auch die Regression an, womit per Knopfdruck die gesuchte Funktion gefunden ist.	

III: Verwendung des Geometrie-Menüs

	Anforderungen	**Lösungsmöglichkeiten**
	Die Schülerinnen und Schüler ...	**Ausgewählte Screenshots**
IIIa	• zeichnen so viele Punkte wie vollständige Datenpaare vorliegen ganz willkürlich auf das Zeichenblatt; • markieren jeden der willkürlich gesetzten Punkte einzeln nacheinander; • geben die Koordinaten der Archimedes-Projektion Punkt für Punkt ein und fixieren damit alle Punkte.	 
IIIb	• wählen im Menü Zeichnen die Möglichkeit zur Eingabe eines Funktionsterms.	

IIIb	• wählen verschiedene Funktionsterme; • versuchen einen Funktionsterm zu finden, der möglichst gut zu den Punkten passt; • diskutieren ihr Vorgehen.	 

Unterstützung durch den ClassPad II bei der Einführung des Ableitungsbegriffs

Jens Weitendorf

Kurzfassung des Inhalts:
In dem Artikel wird keine einzelne Lerneinheit dargestellt; sondern es wird gezeigt, inwiefern der ClassPad in einzelnen Phasen des Unterrichts bei der Einführung des Ableitungsbegriffs hilfreich für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler sein kann.

Klassenstufe(n):
Sekundarstufe II

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler ...

- erfahren, dass ein CAS verständnisfördernd ist, da man den Rechenaufwand minimieren und leicht die Darstellungsebene wechseln kann.
- verstehen den Übergang von der Änderungsrate in einem Punkt zur Ableitungsfunktion durch eine dynamische Darstellung.
- erkennen, dass ein CAS eine elektronische Formelsammlung ist.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Keine

Zeitbedarf:
Der Zeitbedarf lässt sich nicht angeben, da nur unterstützende Möglichkeiten beschrieben werden.

Sonstige Materialien:
Keine

Einführung

Der Rechenaufwand in der klassischen Analysis ist relativ hoch. Allein schon aus diesem Grund erscheint der Einsatz des ClassPad als hilfreich, wenn man den Unterricht bzgl. des Rechnens entlasten möchte. Ein großer Vorteil ergibt sich daraus, dass man nicht mehr auf Funktionsklassen beschränkt ist, die sich händisch, das heißt insbesondere hinsichtlich des Lösens von Gleichungen bearbeiten lassen. So ist es für die Bearbeitung von Aufgaben nicht mehr ganz so von Bedeutung, wie kompliziert die zur Diskussion stehenden Terme sind. Des Weiteren verliert auch das Zeichnen von Funktionsgraphen an Bedeutung, da man die Graphen sofort per Knopfdruck mit Hilfe eines Funktionsplotters erhält. Es geht also nicht mehr darum, aus Berechnungen den Graphen einer Funktion zu zeichnen, sondern Zusammenhänge zwischen Funktionstermen und deren Graphen zu erkennen. Die Frage, wie ein Analysisunterricht mit einem CAS zu gestalten ist, lässt noch viele Möglichkeiten offen und kann natürlich auch nicht mit diesem Beitrag beantwortet werden. Es gibt aber inzwischen in vielen Schulbüchern CAS-Hinweise, wobei sich der Aufbau dieser Bücher allerdings nur unwesentlich von einem Buch ohne CAS Einsatz unterscheidet.

Einen möglichen Unterrichtsgang, der den ClassPad einbezieht, findet man in CiMS Hamburg (2013). Dort ist auch eine Reihe von Aufgaben mit Lösungsvorschlägen dokumentiert. So sind die folgenden Kapitel eher als Ergänzung zu der Dokumentation über das Hamburger CiMS-Projekt zu sehen.

Ableitung an einer Stelle (lokaler Aspekt)

Die Einführung der Ableitung sollte in zwei Schritten erfolgen. Zunächst geht es darum, den Grenzwert des Differenzenquotienten an einer vorgegebenen Stelle zu bestimmen. In der neueren didaktischen Literatur spricht man in der Regel von einem intuitiven Grenzwertbegriff. Was darunter zu verstehen ist, lässt sich mit Hilfe einer Tabellenkalkulation verdeutlichen.

Abbildung 1 zeigt den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für die Funktion mit $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 2$ mit verschiedenen kleinen h-Werten, der vorher im Main-Menü definiert worden ist. Entsprechendes lässt sich natürlich für andere x-Werte und andere Funktionen durchführen. Zu diskutieren ist an dieser Stelle, warum die „1“ nach hinten „durchgeschoben“ wird und warum die beiden letzten Werte „exakt“ 4 sind. Hierzu ist es sinnvoll, die angezeigte Stellenzahl zu erhöhen.

Ableitungsfunktion (globaler Aspekt)

Ein großes Problem für Schülerinnen und Schüler ist der Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion. Dies lässt sich mit Hilfe des ClassPad veranschaulichen. Das Geometrie-Modul bietet die Möglichkeit, an einen vorgegebenen Funktionsgraphen in einem Punkt die Tangente an den Graphen zu legen. Da der ClassPad natürlich im Hintergrund rechnet, ist das Programm in der Lage, die Funktionsgleichung der Tangente anzugeben, woraus sich der Wert der Ableitung an dieser Stelle ergibt. Durch die Dynamik des Systems, kann man den Punkt, an dem die Tangente bestimmt wird, auf dem Graphen wandern lassen. Während dieser „Wanderung“ werden die Punkte als auch die dazugehörenden Tangentensteigungen jeweils neu berechnet und gespeichert. Die Abbildung 2 zeigt das entsprechende Bild.

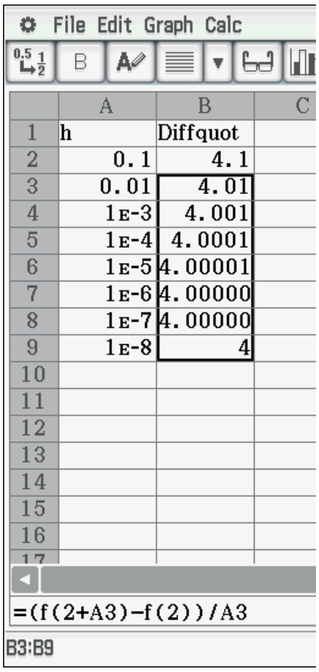


Abb. 1 Bestimmung des intuitiven Grenzwertes des Differenzenquotienten für $f(x) = x^2$ an der Stelle *x=2*

Indem man den Funktionsgraphen und den Punkt A markiert, lässt sich eine sogenannte *Animation hinzufügen*, mit Hilfe derer sich x-Werte und die dazugehörenden Ableitungswerte erzeugen lassen.

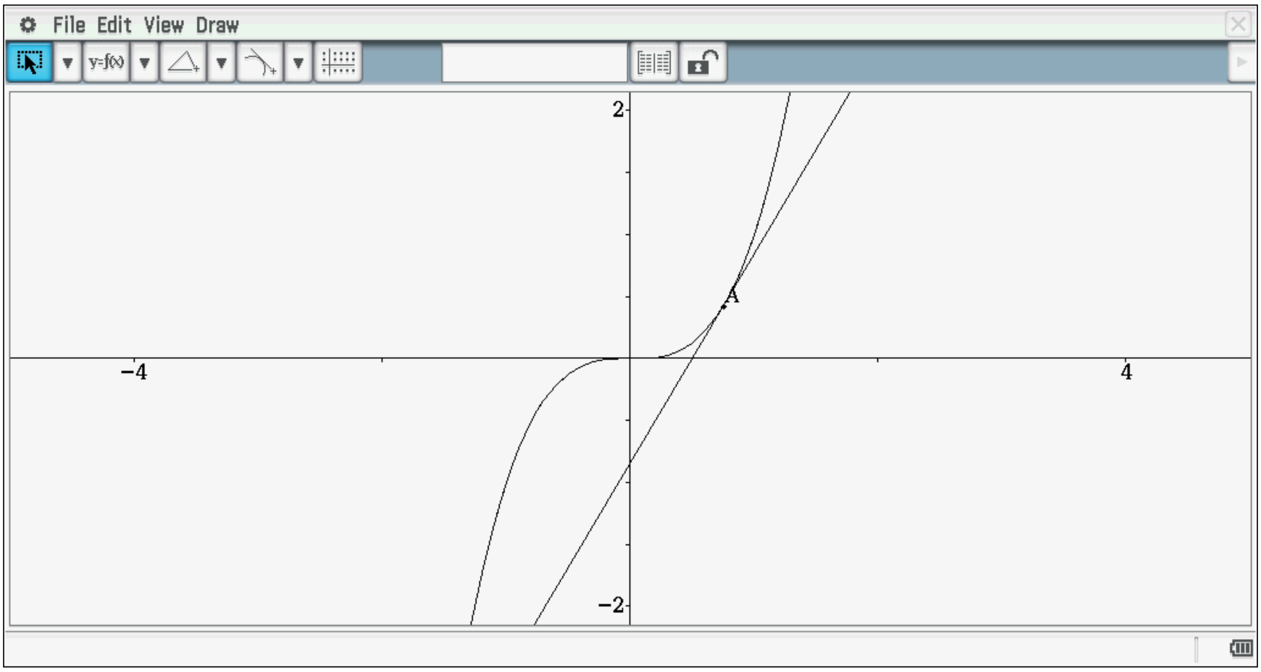
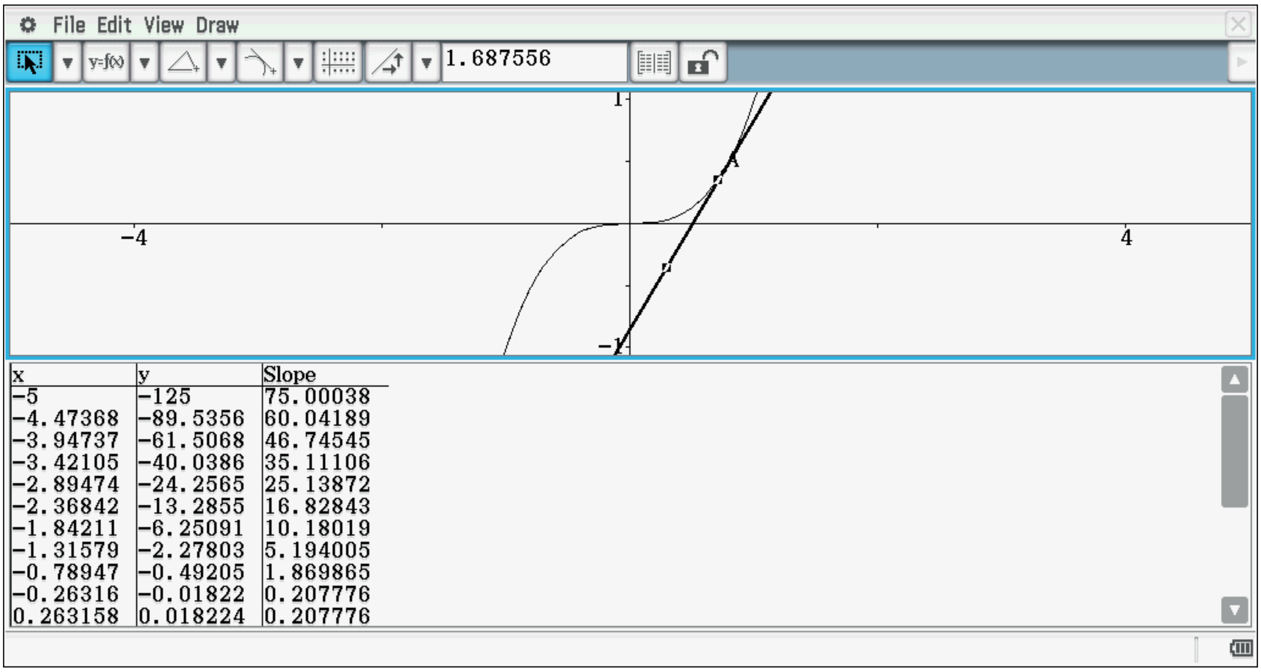


Abb. 2 Graph der Funktion $f(x) = x^3$ mit der Tangente im Punkt A

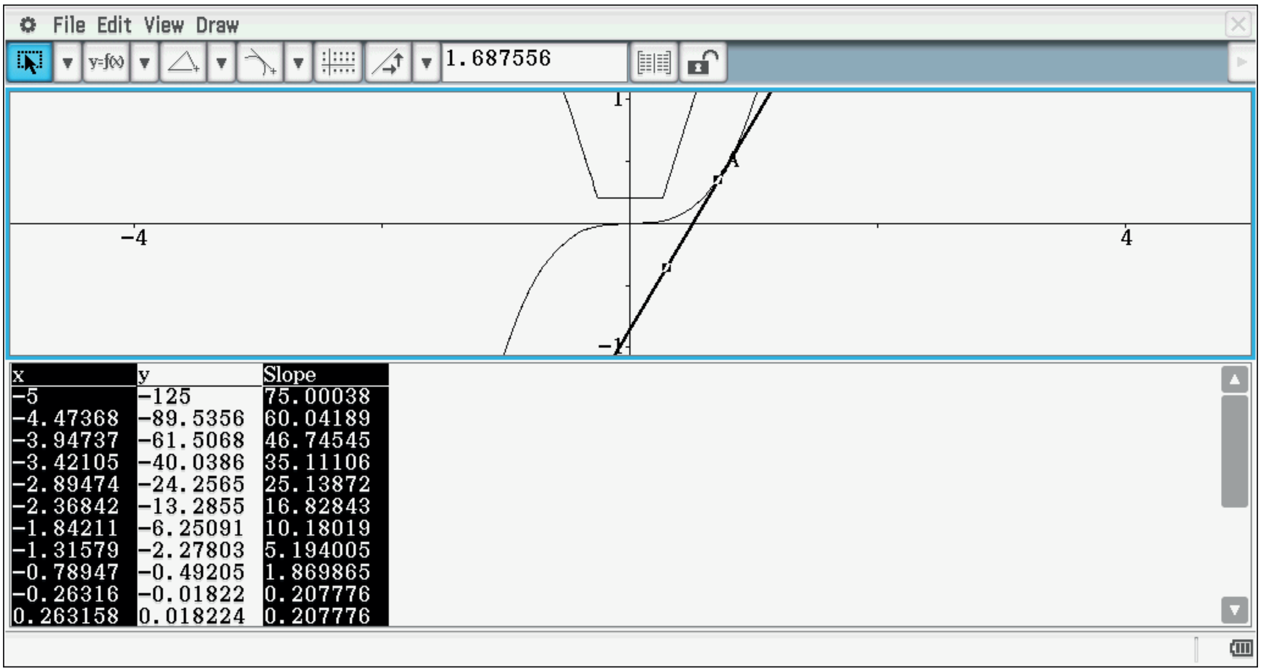
Die Abbildung 3 zeigt das Ergebnis der durch die *Animation* gewonnenen Werte.



x	y	Slope
−5	−125	75.00038
−4.47368	−89.5356	60.04189
−3.94737	−61.5068	46.74545
−3.42105	−40.0386	35.11106
−2.89474	−24.2565	25.13872
−2.36842	−13.2855	16.82843
−1.84211	−6.25091	10.18019
−1.31579	−2.27803	5.194005
−0.78947	−0.49205	1.869865
−0.26316	−0.01822	0.207776
0.263158	0.018224	0.207776

Abb. 3 Mit Hilfe der Animation erzeugte Ableitungswerte

Um sich einen Überblick zu verschaffen, lassen sich die x-Werte und die dazugehörenden Ableitungswerte grafisch darstellen. In der vorgegebenen Einstellung sind die Abstände der x-Werte einmal bewusst sehr groß gewählt, so dass der Graph der Ableitungsfunktion sehr ungenau ist (s. Abbildung 4). Dies lässt sich natürlich verändern (s. Abbildung 5). Dadurch kommt aber der diskrete Charakter dieser Berechnung deutlich zum Ausdruck.



x	y	Slope
−5	−125	75.00038
−4.47368	−89.5356	60.04189
−3.94737	−61.5068	46.74545
−3.42105	−40.0386	35.11106
−2.89474	−24.2565	25.13872
−2.36842	−13.2855	16.82843
−1.84211	−6.25091	10.18019
−1.31579	−2.27803	5.194005
−0.78947	−0.49205	1.869865
−0.26316	−0.01822	0.207776
0.263158	0.018224	0.207776

Abb. 4 „Grobe" Darstellung des Graphen der Ableitungsfunktion (ein Teil dessen ist am oberen Rand zu erkennen)

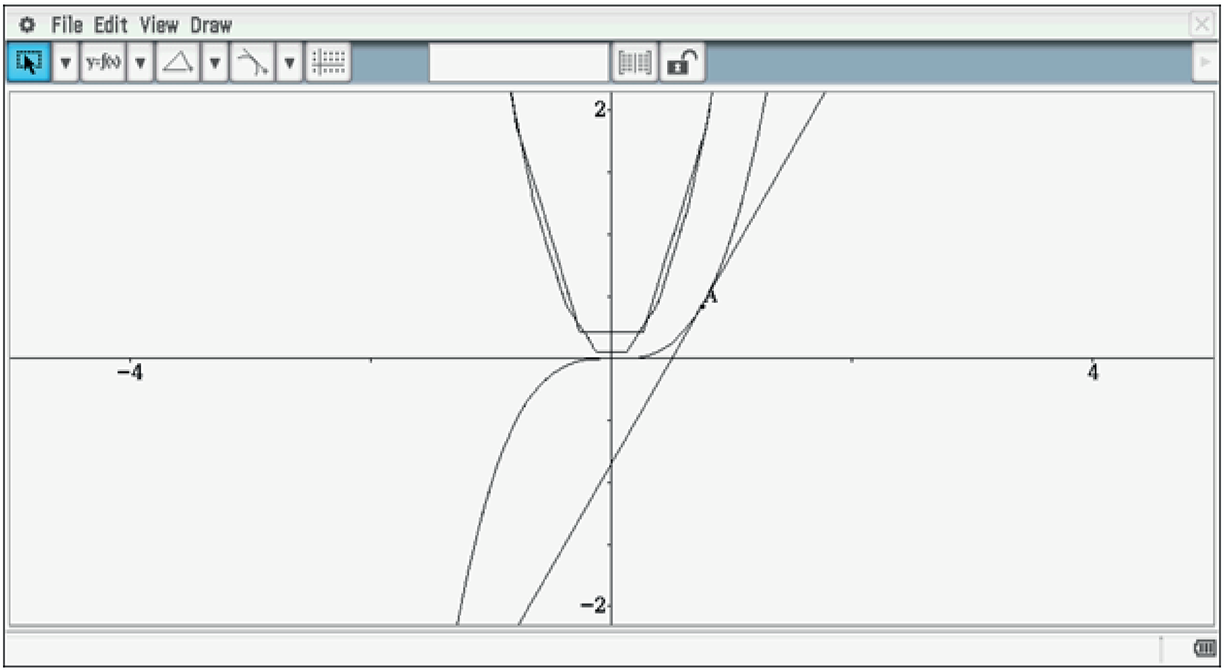


Abb. 5 Graphen der Ableitungsfunktion (Intervall [−5/5] und 40 Schritte)

Schülerinnen und Schüler haben jetzt die Möglichkeit, eigenständig Gleichungen für die jeweiligen Funktionsgraphen der Ableitung zu finden. Sie können dabei durchaus die Zusammenhänge zwischen Funktion und deren Ableitung etwa für Potenz- und trigonometrische Funktionen entdecken. Natürlich muss der Übergang von der Sekanten- zur Tangentensteigung irgendwann im Unterrichtsverlauf problematisiert werden. Gerade für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler kann aber der zunächst direkt dargestellte Zusammenhang zwischen Graph und Tangente eine Vereinfachung darstellen. Wenn man mit Sekantensteigungen arbeiten möchte, so bietet es sich auch an, einmal Programme wie Geogebra einzusetzen.

Abbildung 6 zeigt eine Darstellung mit Geogebra. Die x-Werte der Punkte A und B unterscheiden sich um $h = 0{,}1$ und lassen sich mit Hilfe des Schiebereglers verändern. Der y-Wert des Punktes M, dessen Spur dargestellt ist, gibt den jeweiligen Differenzenquotienten an; sein x-Wert ist mit dem x-Wert des Punktes A identisch.

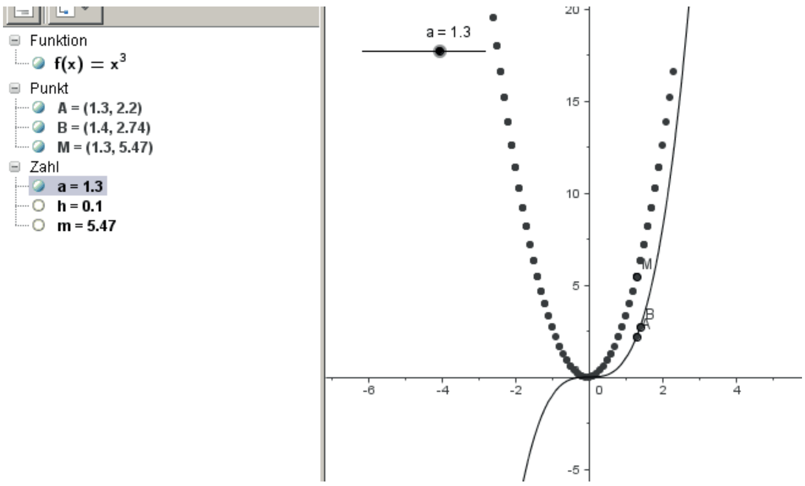


Abb. 6 Erzeugung des Graphen der Ableitung mit Geogebra

Auch hier bietet sich den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, die Ableitungsregeln selbst zu entdecken.

Weitere Ableitungsregeln

Die obige Methode eignet sich auch dazu weitere Ableitungsregeln an ausgewählten Beispielen zu entdecken; so z. B.: $g(x) = f(a \cdot x) \Rightarrow g'(x) = a \cdot f'(x)$. Besonders geeignet ist in diesem Zusammenhang die Sinusfunktion.

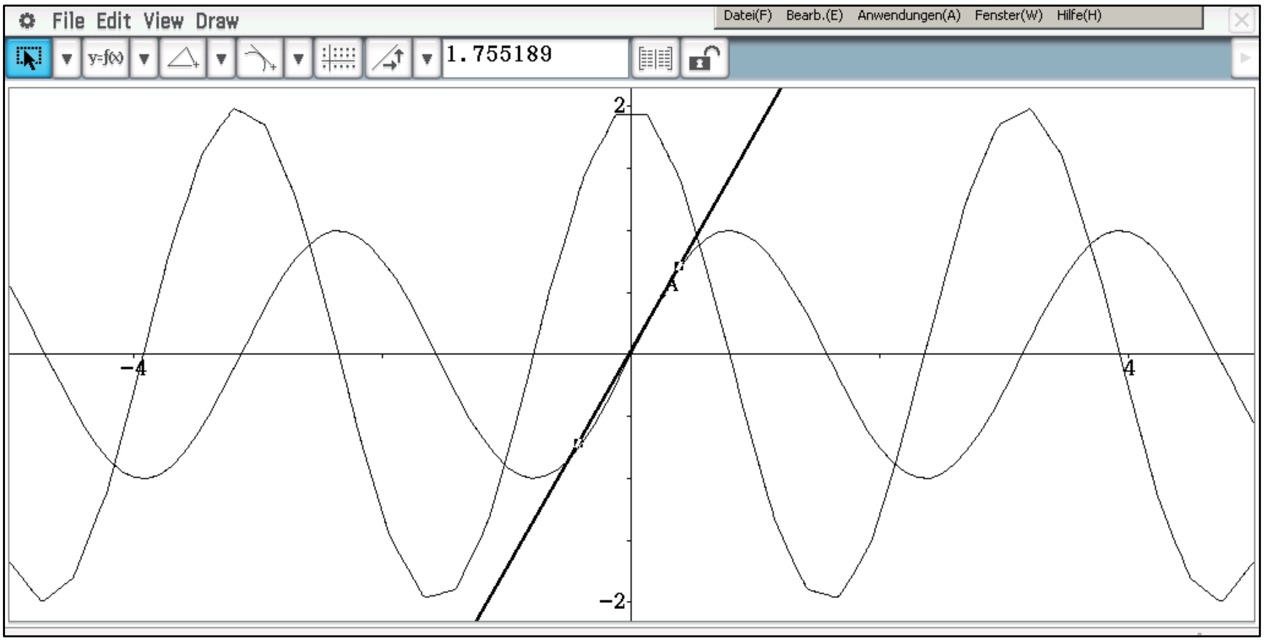


Abb. 7 Graph von $sin(2x)$ und der Ableitung

Aus der Abbildung 7 lässt sich die Funktionsgleichung der Ableitung von $f(x) = sin(2x)$ vermuten und relativ leicht ablesen. Es muss noch diskutiert werden, warum die Amplitude der Ableitungsgleichung bei Abbildung 7 eventuell nicht genau den Wert 2 hat.

Entsprechend lässt sich die Regel für $f(x) = g(x) + h(x)$ finden. Die allgemeine Kettenregel und die Produkt- und Quotientenregel erscheinen aber zu kompliziert zu sein, als dass man sie mit Hilfe von CAS zeichnerisch entdecken könnte. Der ClassPad „kennt" wegen des CAS diese Ableitungsregeln; ausgenommen ist dabei allerdings die Kettenregel in ihrer einfachsten Form, wie die Abbildung 8 verdeutlicht.

Interpretierungsbedürftig ist der erste Faktor, der sich bei Anwendung der Kettenregel ergibt (s. Abb. 8, 2. Zeile). Durch ein einfaches Beispiel lässt sich aber die Bedeutung dieses Faktors auch durch Schülerinnen und Schüler eigenständig herausfinden (s. Abbildung 9).

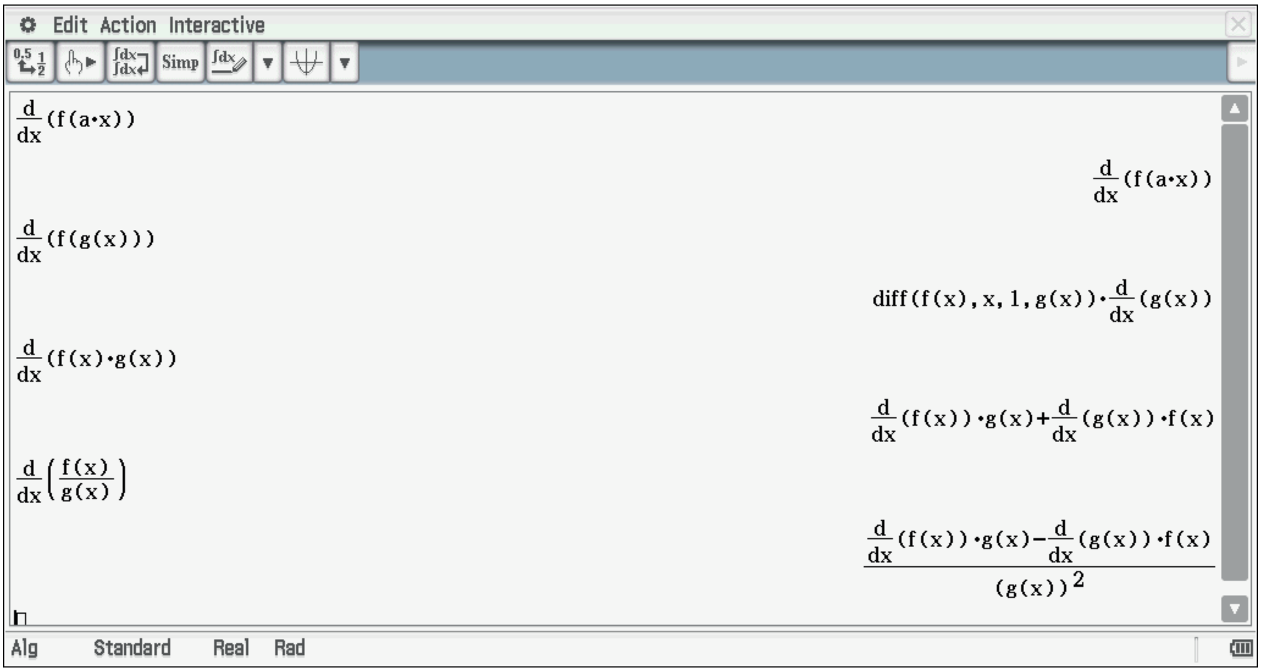


Abb. 8 Ableitungsregeln, CAS als elektronische Formelsammlung

Abb. 9 Interpretation von $diff(f(x), x, 1, z)$

Es sollte hier also deutlich werden, dass das Verständnis für die Ableitungsregeln mit Hilfe des Geometrie-Moduls unterstützt werden kann.

Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion erhält man als Spezialfall der Kettenregel. Diese formale Herleitung ist für Schülerinnen und Schüler allerdings oft nicht nachvollziehbar.

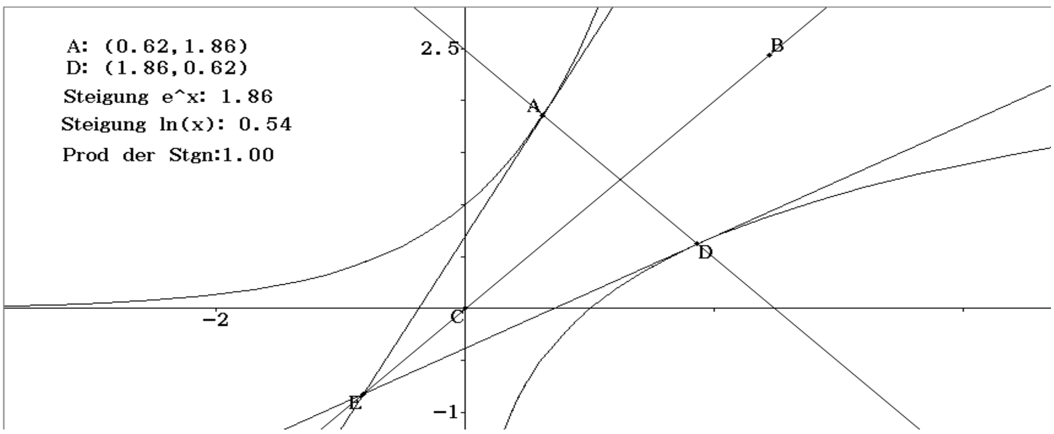


Abb. 10 Zusammenhang der Ableitungen von $f(x) = e^x$ und $f^{-1}(x) = ln(x)$

Die Abbildung 10 zeigt die Graphen von der e- und der ln-Funktion. Auf dem Graphen der e-Funktion wurde ein Punkt A gesetzt und in diesem die Tangente an den Graphen konstruiert. Der Bildpunkt D liegt auf der Normalen und dem Graphen der Umkehrfunktion. Die Tangente in D lässt sich nicht direkt konstruieren, da durch den Befehl *Tangente an Kurve* auch der Punkt, in dem die Tangente konstruiert werden soll, festgelegt wird. Dieser Punkt soll aber als Bildpunkt vom Punkt A direkt abhängig sein. Das Problem lässt sich dadurch lösen, dass der Schnittpunkt zwischen der ursprünglichen Tangente und der Spiegelachse bestimmt wird; durch diesen Punkt muss aus Symmetriegründen auch die Bildtangente verlaufen. Dabei ist die Konstruktion nur möglich, wenn die Spiegelachse nicht durch $y = x$, sondern durch zwei Punkte konstruiert wird[7]. Der Punkt A lässt sich variieren, und man erkennt, dass das Produkt der beiden Steigungen immer den Wert 1 ergibt. Für die Schülerinnen und Schüler ist es zusätzlich sehr hilfreich, dass der Zusammenhang zwischen den Punkten A und D (Vertauschung der x- und y-Werte) deutlich wird, was bei der formalen Herleitung eine besondere Schwierigkeit bedeutet.

Literatur

CiMS Hamburg – Unterrichtsgang für die Sek II mit Computer-Algebra-System, Unterrichtsversuch CiMS der Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg, 2013

Ergänzende Literatur

Bruder, R. (Hrsg.) 2006: Aufgaben mit CAS Einsatz, Modellversuch 2004/05 Hessen, Texas Instruments

Mathematik mit CAS, 2011, Band 2, Cornelsen Verlag, Berlin

Lambacher Schweizer Gesamtband Oberstufe mit CAS, 2007, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

[7] Der Grund hierfür ist folgender: Für die Konstruktion ist die Konstruktion einer Normalen erforderlich. Dieses ist nicht möglich, wenn man Geraden durch eine Funktionsgleichung „konstruiert“.

Optimale Verpackung

Sascha Reimers, Martin Scharschmidt

Kurzfassung des Inhalts:
In diesem Unterrichtsarrangement bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben zur Optimierung von Verpackungsmaterialien. Mathematisch handelt es sich um Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung.

Klassenstufe(n):
Thematisch und zeitlich ist dieses Unterrichtarrangement der gymnasialen Oberstufe zuzuordnen.

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler ...

- modellieren optimale Verpackungen;
- erkunden Lösungsstrategien mithilfe des ClassPad;
- präsentieren ihre Arbeitsergebnisse mithilfe des ClassPad.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

- Differenzieren;
- Definieren;
- Gleichungen lösen;
- Umgang mit Tabellen und Funktionsgraphen.

Zeitbedarf:
3-4 Doppelstunden

Sonstige Materialien:
Verpackungen, OHP-Panel oder ClassPad-Manager mit Beamer

Begleittext

Überblick

Im nachfolgend beschriebenen Unterrichtsarrangement bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben zur Optimierung von Verpackungsmaterialien unter Nutzung des Computeralgebrasystems des ClassPad400.

Diese Unterrichtseinheit ist auf 3-4 Doppelstunden für die Oberstufe der allgemeinen und beruflichen Gymnasien ausgelegt.

Intention des Unterrichtsarrangements

Die Intention bei der Erstellung des Unterrichtsarrangements erfolgte im Sinne der Handlungsorientierung[8]. Die Schülerinnen und Schüler durchlaufen dabei die Phasen *Informieren, Planen, Entscheiden, Ausführen, Kontrollieren* sowie *Bewerten* und *Schlussfolgern*. Im besonderen Maße sollen die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen[9] des mathematischen Kommunizierens und des mathematischen Modellierens durch den Einsatz des Casio ClassPad unterstützt werden. Gegenstand des Unterrichtsarrangements ist die Ermittlung optimaler Verpackungseinheiten. Der Einsatz von realen quaderförmigen und zylinderförmigen Verpackungen, wie sie im Handel erhältlich sind, ermöglicht einen guten Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler.

Ablauf des Unterrichtsarrangements

Im Sinne der **Binnendifferenzierung** ist das Unterrichtsarrangement „optimale Verpackung" in zwei Szenarien aufgeteilt: Quaderförmige und zylinderförmige Verpackungen. Die quaderförmigen Verpackungen bieten oftmals einen geometrisch einfacheren Zugang zur Problemstellung. Die entsprechende differenzierte Einteilung der Schülerinnen und Schüler erfolgt demnach durch die Lehrkraft. Denkbar ist aber auch eine freiwillige Zuordnung der Schülerinnen und Schüler zu einem Szenario, das sie bearbeiten. Je nach Anzahl der Schülerinnen und Schüler in der Klasse beschäftigen sich auch mehrere Gruppen mit dem gleichen Szenario. Denkbar ist auch, dass alle Schülerinnen und Schüler zunächst die erste und anschließend die zweite Problemstellung bearbeiten.

Darüber hinaus ist ein drittes Szenario möglich: Hierzu bringen die Schülerinnen und Schüler eigene quaderförmige Verpackungen, wie beispielsweise Milchtüten, mit. Diese werden im Unterricht auseinander gefaltet. Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung davon, wie diese Verpackungen tatsächlich gefaltet werden (weitere Erläuterungen finden Sie hierzu im Anhang).

Zur Einführung in das vorliegende Unterrichtsarrangement kann die Problemstellung durch die Lehrkraft kurz erläutert werden. Sind keine optimierten Verpackungen beispielsweise von quaderförmigen 200 ml Verpackungen verfügbar und werden diese den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung gestellt, entfallen die Maßangaben des ersten Absatzes auf den Arbeitsblättern. Denkbar ist außerdem, dass bereits nach Aufgabe 1

[8] Vgl. Meyer et al. (1994): Didaktische Modelle, 3. Auflage, S.354ff, Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor
[9] Blum (2007): Bildungsstandards Mathematik: konkret, 3. Auflage, S. 40-43, Berlin: Cornelsen Scriptor

eine Kurzpräsentation ermöglicht wird, beispielsweise in Form eines „Marktplatzes“. Hierzu werden die Ergebnisse im Klassenraum in Form von Plakaten ausgehängt und die Schülerinnen und Schüler erhalten die Gelegenheit, sich die Ergebnisse ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler zu betrachten. Damit ein Austausch möglich ist, steht jeweils ein Mitglied der Gruppe für Fragen und Anregungen an dem Plakat zur Verfügung. Nach einer vorher bestimmten Zeit, erfolgt ein Wechsel, sodass ein anderes Gruppenmitglied am Plakat steht. Je nach Lerngruppe kann dieser Wechsel auch eigenverantwortlich erfolgen.

Um die Eigenverantwortung der Schülerinnen und Schüler zu fördern und diese aktiv in die Gestaltung des Unterrichtsarrangements einzubinden, bieten sich kooperative Lernformen[10] an. Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler, nach der Einführung durch die Lehrkraft sowie der Einteilung in Gruppen den Auftrag, sich zunächst selbstständig mit der Problemstellung auseinander zu setzen. Notwendig ist, dass die Schülerinnen und Schüler in dieser Phase ihre Überlegungen, Vermutungen und Lösungsansätze auch aufschreiben, um anschließend mit ihrer Gruppe darüber diskutieren zu können. Denkbar ist auch, dass nach dieser ersten Denkphase Zeit gegeben wird, um grundsätzliche Fragen im Klassenverband zu klären. Während der anschließenden Gruppenarbeit können weitere kooperative Methoden wie beispielsweise Talking Chips[11] zum Einsatz kommen, um die Schülerinnen und Schüler aktiv einzubinden.

Die Zwischenpräsentation gibt den Schülerinnen und Schülern Sicherheit, indem sie den Austausch im Plenum und einen Vergleich mit den übrigen Gruppen ermöglicht. Bei der abschließenden Präsentation erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, ihre fertigen Ergebnisse zu präsentieren. Zum einen besteht hier die Möglichkeit den Modellierungskreislauf auch den Schülerinnen und Schülern explizit zu erläutern. Zum anderen bietet es sich an, den Blick auf konkrete Verpackungen zu richten und zu diskutieren, warum reale Verpackungen nicht optimal, in dem in der Unterrichtssequenz erarbeiteten Sinne, gestaltet werden. Hier können Rahmenbedingungen, die durch die eingepackte Ware bedingt sind, besprochen, aber auch Aspekte des Marketings einbezogen werden.

Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen

Zur Entwicklung der prozessbezogenen Kompetenz des **mathematischen Modellierens** erhalten die Schülerinnen und Schüler entsprechende Aufgabenstellungen, die es ermöglichen den Modellierungskreislauf[12] zu durchlaufen. In Abhängigkeit von den Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler ist es denkbar, diese Aufgabenstellung kleinschrittiger zu gestalten, um den Schülerinnen und Schülern eine Orientierung zu geben. Andererseits kann die Aufgabenstellung auch offener gestaltet werden, indem

[10] Brüning / Saum (2009): Erfolgreich unterrichten durch kooperatives Lernen 1, 5. Auflage, Essen: NDS
[11] Vgl. Green / Grenn (2010): Kooperatives Lernen im Klassenraum und im Kollegium, 5. Auflage, S. 134, Seelze: Klett/Kallmeyer. Auch Redechips: Die Schülerinnen und Schüler bekommen zwei Chips. Diese Chips werden in die Mitte gelegt, wenn jemand sprechen möchte. Die Gruppenmitglieder können nicht erneut sprechen, bevor nicht jeder seinen Chip in die Mitte des Tisches gelegt hat. Wenn alle Chips aufgebraucht sind, werden sie zurückgenommen und jeder hat wieder die Möglichkeit, das Wort zu ergreifen.
[12] Maaß (2008): Mathematisches Modellieren, 2. Auflage, S. 13, Berlin: Cornelsen Scriptor

lediglich nach den optimalen Maßen gefragt wird. Im Sinne der Binnendifferenzierung kann diese Modifizierung auch genutzt werden, um unterschiedliche Voraussetzungen innerhalb der Klasse zu berücksichtigen.

Notwendig bei der Gestaltung der Aufgabenstellung ist es, dass Kriterien[13] für eine „gute“ Aufgabe berücksichtigt werden, sodass diese

- auf unterschiedlichen Anspruchsniveaus herausfordernd ist;
- inhalts- und prozessbezogene sowie übergreifende Kompetenzen fordert und fördert;
- an Vorwissen anknüpft und das zu erwerbende Wissen kumulativ aufbaut;
- in sinnstiftende Kontexte eingebunden ist;
- in den Lösungsstrategien und Darstellungsformen vielfältig ist;
- individuelle Lösungen ermöglicht;
- das Bewusstsein für die eigenen Fähigkeiten durch erfolgreiches Bearbeiten und Lösen stärkt.

Die Entwicklung des **mathematischen Kommunizierens** wird durch die Arbeit in Gruppen angeregt. Hier tauschen die Schülerinnen und Schüler Ideen, Vorschläge und alternative Lösungswege aus, diskutieren verschiedene Lösungen und gestalten ihre Präsentationen. Darüber hinaus wird das Kommunizieren durch die Präsentation sowie durch den Austausch über die Ergebnisse gefördert.

Bedeutung des CAS-Einsatzes

Der **Einsatz des CAS** unterstützt dabei den Modellierungsprozess. Hierzu nutzen die Schülerinnen und Schüler das CAS als Werkzeug im Übergang vom mathematischen Modell zur mathematischen Lösung und bearbeiten die dann notwendigen innermathematischen Fragestellungen. Somit können sich die Schülerinnen und Schüler auf den Modellierungskreislauf, auf die Erstellung von mathematischen Ansätzen und das Interpretieren der Lösungen konzentrieren, ohne dass der Blick auf diesen Kreislauf durch Berechnungen überlagert wird. Mathematische Ansätze zur Bearbeitung der Problemstellung können somit schnell eingegeben und Auswirkungen auf die daraus resultierende Lösung sofort erkannt werden. Damit wird den Schülerinnen und Schülern auch die Angst genommen, Fehler zu machen. Diese Fehler können sonst einerseits zu langen, teilweise auch unberechenbaren mathematischen Problemen führen, andererseits aber auch einen hohen Zeitbedarf erfordern. Beide Aspekte stehen dem Ziel der Stunde, insbesondere der Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenz des Modellierens, entgegen.

Außerdem dient der Casio ClassPad als Präsentationsmedium. Werden die Lösungsvorschläge als eActivity erstellt, dann können sie beispielsweise auf einen Laptop mit Beamer übertragen werden. Diese Art der Präsentation zwingt die Schülerinnen und Schüler zu einer mathematisch klaren Schreibweise, da das CAS diese ansonsten nicht durchführen könnte. Exemplarisch sei erwähnt, dass beispielsweise vergessene Rechenzei-

[13] Hermes et al. (2012): Entwicklung kompetenzorientierter Aufgaben, S.10, Berlin: Cornelsen

chen und Gleichheitszeichen sowie eine nicht dokumentierte Umbenennung von Variablen sofort zu Fehlermeldungen führen. Darüber hinaus gibt das CAS noch eine klare Struktur vor, die nicht von Berechnungen überlagert wird, sondern vielmehr die Lösungsstrategie unterstreicht. Somit steht beispielsweise nicht mehr das Lösen von Gleichungen per Formel im Vordergrund, sondern die aktuellen mathematischen Inhalte, wie die nach der Haupt- und der Nebenbedingung.

Schülermaterialien

Klasse:	Situationsbeschreibung	Datum:
Mathematik	Optimale Verpackungen	

Neben bekannten Markenprodukten bieten große Supermarktketten eigene preisgünstigere Handelsmarken an. Die NoPack GmbH stellt Verpackungen für Lebensmittel von Herstellern solcher Handelsmarken her. Hierbei kommt es neben funktionalen Kriterien (hohe Haltbarkeit, Packmaße, Stabilität usw.) insbesondere auf eine kostengünstige Verwendung von Verpackungsmaterial an. Die Thoma AG beauftragt die NoPack GmbH mit der Fertigung ausgewählter Verpackungen.

Beispiel quaderförmige Verpackung:
Die Thoma AG beauftragt die NoPack GmbH mit der Fertigung quaderförmiger Verpackungen, in die das Produkt „KakaoDrink" gefüllt werden soll. Die Thoma AG möchte ihr Produkt „Kakao" in unterschiedlich großen quaderförmigen Verpackungen anbieten (Single-Haushalt, Familie, Vorratspack).

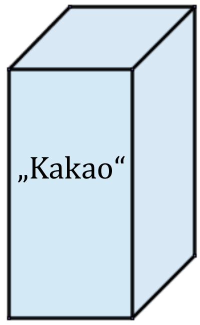
Sie erhalten von Ihrem Vorgesetzten als Mitarbeiter der NoPack GmbH zur Optimierung der Kostensituation den Auftrag, eine Verpackung zu entwickeln, die einen möglichst geringen Materialbedarf benötigt. Die Thoma AG möchte aus Gründen des Marketings eine quaderförmige Verpackung beibehalten, da sich für Getränke diese Form von Verpackungen beim Konsumenten durchgesetzt hat. Die Ergebnisse Ihrer Untersuchung sollen dem Vorgesetzten mathematisch plausibel und nachvollziehbar erläutert werden. Fertigen Sie dazu zum einen zur Visualisierung ein Plakat mit den Maßen und Bezeichnungen Ihrer quaderförmigen Verpackung an und zum anderen eine eActivity zur Veranschaulichung Ihrer mathematischen Lösung.

Beispiel zylinderförmige Verpackung:
Die Thoma AG beauftragt die NoPack GmbH mit der Fertigung zylinderförmiger Dosen, in die das Produkt „Stückige Tomaten" gefüllt werden soll. Die Thoma AG möchte die „Stückigen Tomaten" in unterschiedlich großen Dosen anbieten, um die verschiedenen Zielgruppen ansprechen zu können (Single-Haushalt, Familie, Vorratspack).

Sie erhalten von Ihrem Vorgesetzten als Mitarbeiter der NoPack GmbH zur Optimierung der Kostensituation den Auftrag eine Verpackung zu entwickeln, die einen möglichst geringen Materialbedarf benötigt. Die Thoma AG möchte aus Gründen des Marketings eine zylinderförmige Verpackung beibehalten, da sich für Tomatenstücke diese Form von Verpackungen beim Konsumenten durchgesetzt hat. Die Ergebnisse Ihrer Untersuchung sollen dem Vorgesetzten mathematisch plausibel und nachvollziehbar erläutert werden. Fertigen Sie dazu zum einen zur Visualisierung ein Plakat mit den Maßen und Bezeichnungen Ihrer Dosen an und zum anderen eine eActivity zur Veranschaulichung Ihrer mathematischen Lösung.

Klasse:	Arbeitsblatt	Datum:
Mathematik	Quaderförmige Verpackung 1/2	

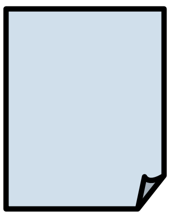
Als Mitarbeiter verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die zu optimierende Verpackung. Die Abmessungen werden mit Höhe 11,7 cm, Breite 4,3 cm und Tiefe 4 cm aufgenommen. Auf der Verpackung wird ein Inhalt von 0,2 $Litern$ angegeben.



1. Überprüfen Sie zunächst die Angabe des Volumens und berechnen Sie den Flächeninhalt des benötigten Materials der Getränkeverpackung. Diskutieren Sie anschließend mögliche Auswirkungen einer Veränderung einer Seitenlänge auf die Fläche, wenn das Volumen konstant bleiben soll. Notieren Sie Ihre Diskussionsergebnisse stichpunktartig auf einem Plakat.

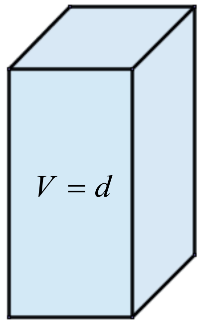
2. Ermitteln Sie anschließend die Maße mehrerer quaderförmiger Verpackungen für 200 $ccm = 0{,}2\ Liter$ Inhalt. Die Tiefe der Verpackung soll 4 cm betragen. Zeichnen Sie einen Graphen in ein Koordinatensystem, der Ihre Ergebnisse darstellt. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch diejenigen Maße der optimierten Verpackung mit minimalem Materialbedarf.

3. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität. Vergleichen Sie dann die Maße der optimalen Verpackung mit denen Ihrer Verpackung und berechnen Sie den eingesparten Materialbedarf in Prozent.



(Zwischen-)Präsentation der Ergebnisse

Fortsetzung der Arbeit



4. Ermitteln Sie für die abschließende Bearbeitung des Kundenauftrages den Materialbedarf der beiden übrigen Verpackungen:
   Single-Haushalt: 1000 $Kubikzentimeter$ (Tiefe 6 cm),
   Vorratspack: 2000 $Kubikzentimeter$ (Tiefe 8 cm).
   Vergleichen Sie die drei optimalen Verpackungen.

5. Leiten Sie nun eine allgemeine Formel her, die der Berechnung der Maße einer optimalen quaderförmigen Verpackung sowie der Berechnung des minimalen Materialbedarfs dient (d beschreibt das Volumen des Quaders). Berücksichtigen Sie dabei die unter Aufgabe 4 ermittelten geometrischen „Erkenntnisse“.

6. Berechnen Sie die Maße Ihrer Verpackung für eine quaderförmige Verpackung mit einem Inhalt von 200 ml mithilfe Ihrer in Aufgabe 5 ermittelten Formel. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 2.

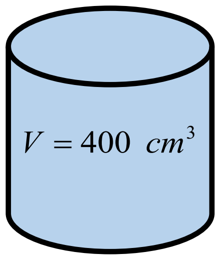
(Abschließende) Präsentation der Ergebnisse

Klasse:	Arbeitsblatt	Datum:
Mathematik	Zylinderförmige Verpackung 2/2	

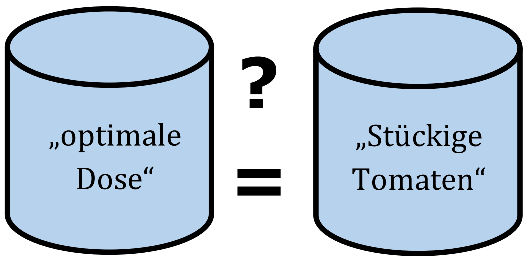
Als Mitarbeiter verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die zu optimierende Verpackung anhand der vorliegenden Konservendosen. Die Abmessungen werden mit Höhe 10,3 cm und Radius 3,5 cm aufgenommen. Auf der Dose wird ein Inhalt von 0,4 $Litern$ angegeben.

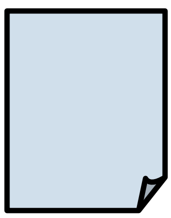
1. Bestimmen Sie die Materialgröße Ihrer Dose. Diskutieren Sie anschließend mögliche Auswirkungen einer Veränderung des Radius oder der Höhe der Dose auf die Fläche, wenn das Volumen konstant bleiben soll. Notieren Sie Ihre Diskussionsergebnisse stichpunktartig auf einem Plakat.

2. Ermitteln Sie anschließend mithilfe der Differentialrechnung die Maße einer zylindrischen Dose zur Optimierung der Verpackung von 400 cm^3 Inhalt sowie den minimalen Materialbedarf.



3. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität. Vergleichen Sie dann die Maße der optimalen Dose mit denen Ihrer Dose und berechnen Sie den eingesparten Materialbedarf in Prozent.

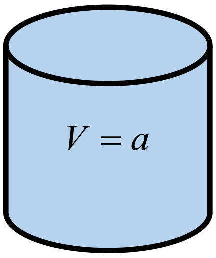




(Zwischen-)Präsentation der Ergebnisse

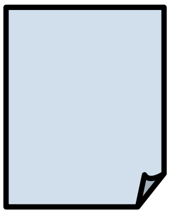
Fortsetzung der Arbeit

4. Leiten Sie dazu eine allgemeine Formel her, die der Berechnung der Maße einer optimalen Dose sowie der Berechnung des minimalen Materialbedarfs dienen (a beschreibt das Volumen der Dose).

   Ermitteln Sie für die abschließende Bearbeitung des Kundenauftrages den Materialbedarf für folgende weitere Verpackungen: Single-Haushalt: 500 $Kubikzentimeter$, Vorratspack: 1750 $Kubikzentimeter$.

5. Ermitteln Sie die Maße Ihrer Dose aus Aufgabe 2 mithilfe Ihrer in Aufgabe 4 ermittelten Formel. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 2.

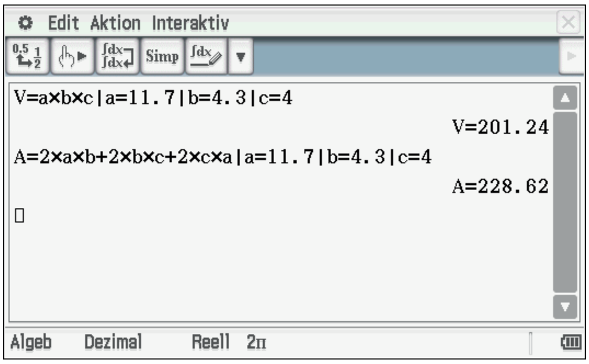


(Abschließende) Präsentation der Ergebnisse

Modelllösungen: quaderförmige Verpackung

Die Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler sind vor den jeweiligen Aufgaben aufgeführt.

1) Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Volumen und Fläche, diskutieren über Veränderungen und notieren Ergebnisse.

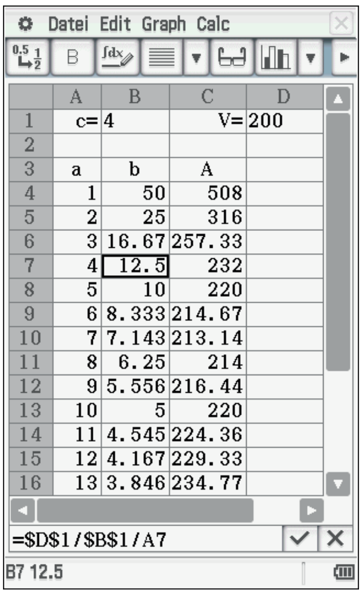


Hinweis: Der senkrechte Strich ermöglicht die Zuweisung des Wertes für diese eine Rechnung. Der Wert beispielsweise für $a = 11{,}7$ wird nicht im Speicher des CP400 abgelegt.

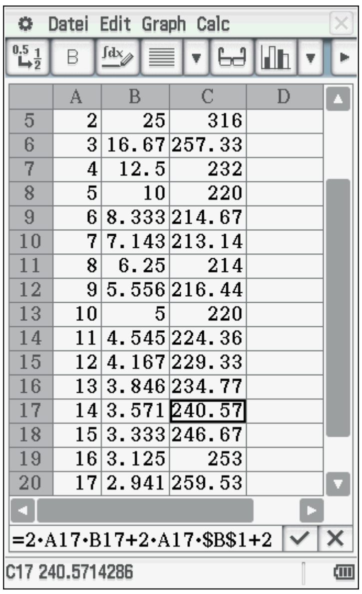
Mögliche Diskussionsergebnisse:

- Fläche bleibt dann auch gleich;
- Ist nicht möglich, da sich bei größerer Fläche auch das Volumen vergrößert;
- Beim geschickten Auswählen der Maße kann das Volumen konstant bleiben und die eingesetzte Materialmenge minimal sein.

2) Die Schülerinnen und Schüler ermitteln Maße von möglichen Verpackungen, zeichnen den Graphen, bestimmen die Maße einer optimalen Verpackung.

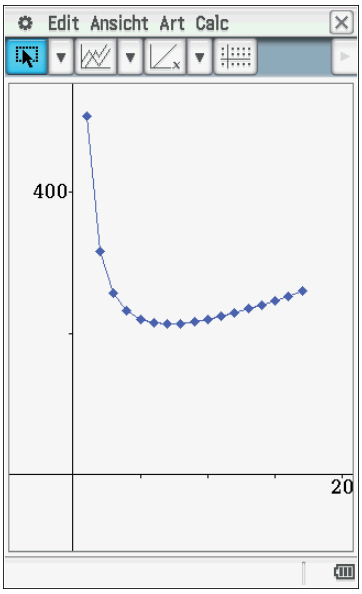


	A	B	C	D
1	c=	4	V=	200
2				
3	a	b	A	
4	1	50	508	
5	2	25	316	
6	3	16.67	257.33	
7	4	12.5	232	
8	5	10	220	
9	6	8.333	214.67	
10	7	7.143	213.14	
11	8	6.25	214	
12	9	5.556	216.44	
13	10	5	220	
14	11	4.545	224.36	
15	12	4.167	229.33	
16	13	3.846	234.77	

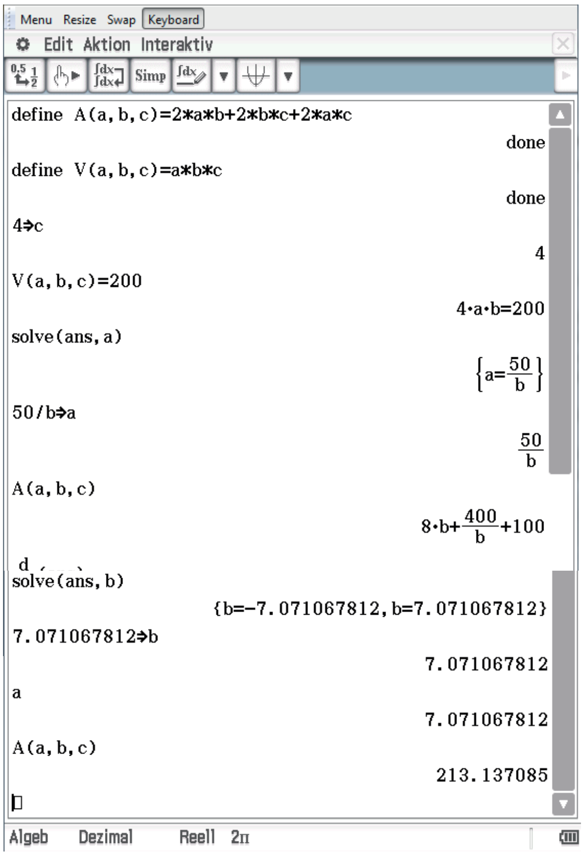


	A	B	C	D
5	2	25	316	
6	3	16.67	257.33	
7	4	12.5	232	
8	5	10	220	
9	6	8.333	214.67	
10	7	7.143	213.14	
11	8	6.25	214	
12	9	5.556	216.44	
13	10	5	220	
14	11	4.545	224.36	
15	12	4.167	229.33	
16	13	3.846	234.77	
17	14	3.571	240.57	
18	15	3.333	246.67	
19	16	3.125	253	
20	17	2.941	259.53	

Hinweis: Im *Tabellenkalkulationsmenü* können die ermittelten Werte eingetragen werden. Durch Markierung der Felder C4 bis C20 kann der zugehörige Graph gezeichnet werden. Sowohl mit der Wertetabelle als auch mit dem Graphen kann näherungsweise die optimale Fläche bestimmt werden.

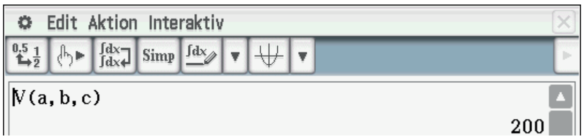


Rechnerisch ist die nachfolgende Lösung möglich.

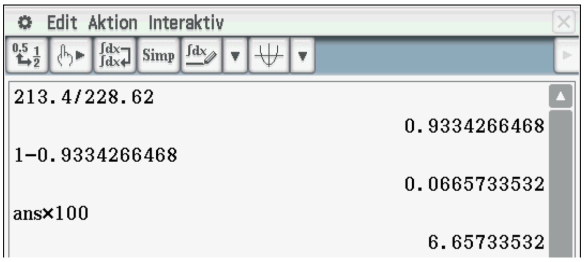


Hinweis: Mit dem Ausdruck *4⇒c* wird dem *c* dauerhaft im Speicher des CP400 der Wert 4 zugeordnet.

3) Die Schülerinnen und Schüler überprüfen und vergleichen die Ergebnisse.

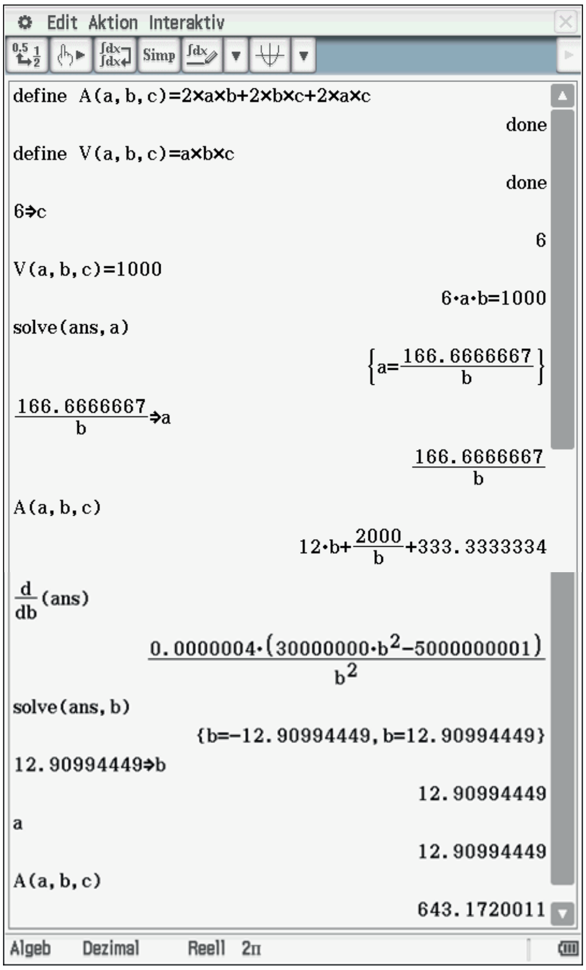


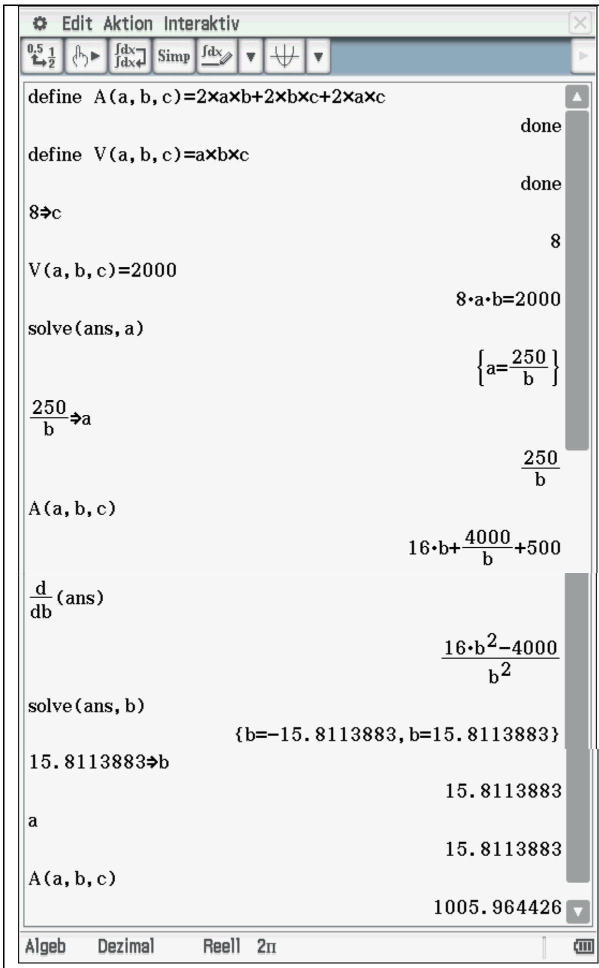
Die Verpackung hat eine quadratische „Frontfläche" bzw. „Rückseite" bei einer Tiefe von 4 *cm*. Die 200 *ccm* werden eingehalten.



Die optimale Schachtel spart bei gleichem Volumen 6,77 % Material ein.

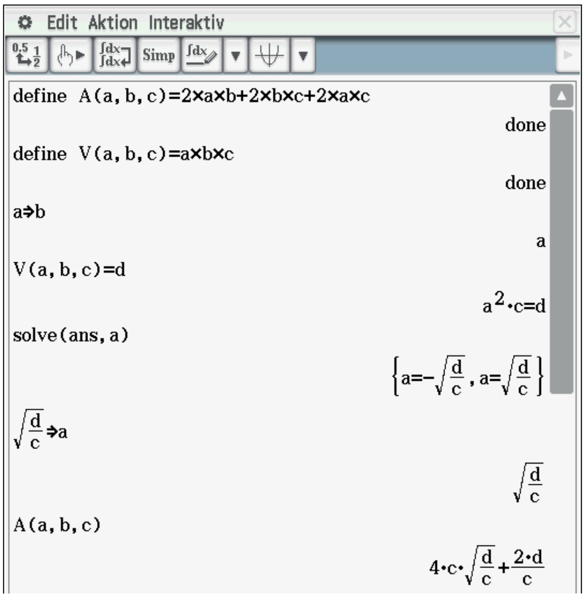
4) Die Schülerinnen und Schüler ermitteln weitere optimale Verpackungen und leiten eine Formel her.





Der Vergleich der drei ermittelten optimalen Verpackungen zeigt, dass die Verpackung immer dann hinsichtlich des minimalen Verpackungsmaterials optimal ist, wenn eine Fläche des Quaders quadratisch ist.

5) Die Schülerinnen und Schüler leiten eine allgemeine Formel her.



$\frac{d}{dc}(\text{ans})$

$$\frac{2\cdot c\cdot d-2\cdot d\cdot\sqrt{\frac{d}{c}}}{c^2\cdot\sqrt{\frac{d}{c}}}$$

solve(ans, c)

$$\left\{c=d^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$d^{\frac{1}{3}} \Rightarrow c$

$$d^{\frac{1}{3}}$$

a

$$(|d|)^{\frac{1}{3}}$$

A(a, b, c)

$$2\cdot(|d|)^{\frac{2}{3}}+4\cdot(d\cdot|d|)^{\frac{1}{3}}$$

define Flaeche(d) $=2\cdot(|d|)^{\frac{2}{3}}+4\cdot(d\cdot|d|)^{\frac{1}{3}}$

done

define Tiefe(d) $=(|d|)^{\frac{1}{3}}$

done

define Breite(d) $=(|d|)^{\frac{1}{3}}$

done

Algeb Standard Reell 2π

6) Die Schülerinnen und Schüler berechnen die Maße der optimalen Verpackung, vergleichen die Ergebnisse.

Flaeche(200)

205.1971136

Tiefe(200)

5.848035476

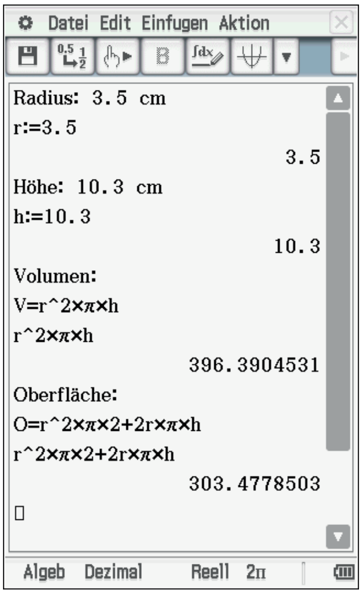
Breite(200)

5.848035476

Ausgehend von einem Volumen von 200 ml liegt bei einem Würfel (alle Seiten gleich lang) die optimale Verpackung vor. Jedoch unter der Bedingung: $Tiefe = 4\ cm$, sind die ermittelten Werte in der Lösung von Aufgabe 2 optimal.

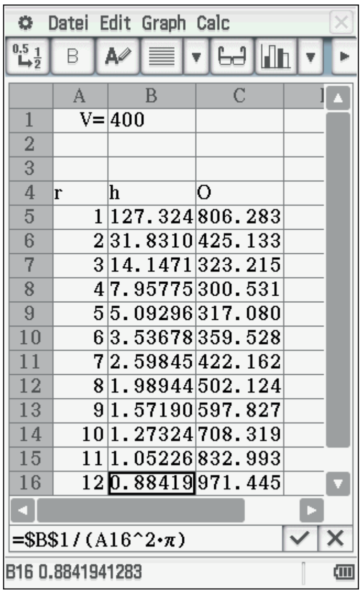
Modelllösungen: zylinderförmige Verpackung

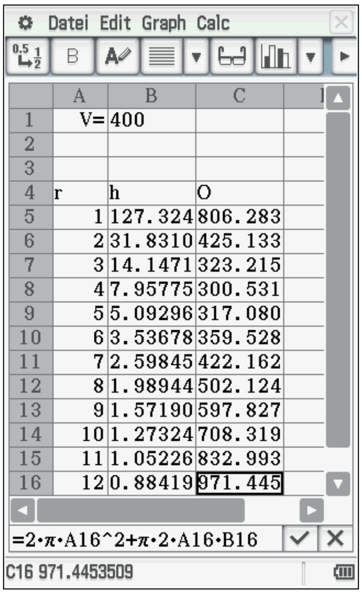
1) Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Volumen und Fläche, diskutieren über Veränderungen und notieren Ergebnisse. (Die Ergebnisse können je nach vorliegender Dose voneinander abweichen.)



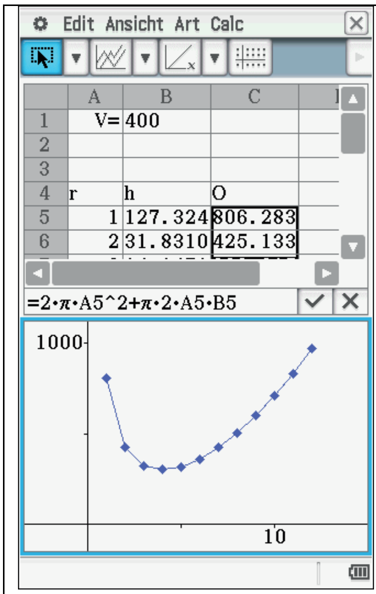
Hinweis: Im eActivity-Menü können Textzeilen () und Berechungszeilen ()eingefügt werden.

Mögliche Diskussionsgrundlagen können auch von Schülern erstellte Tabellen oder Funktionsgraphen sein:





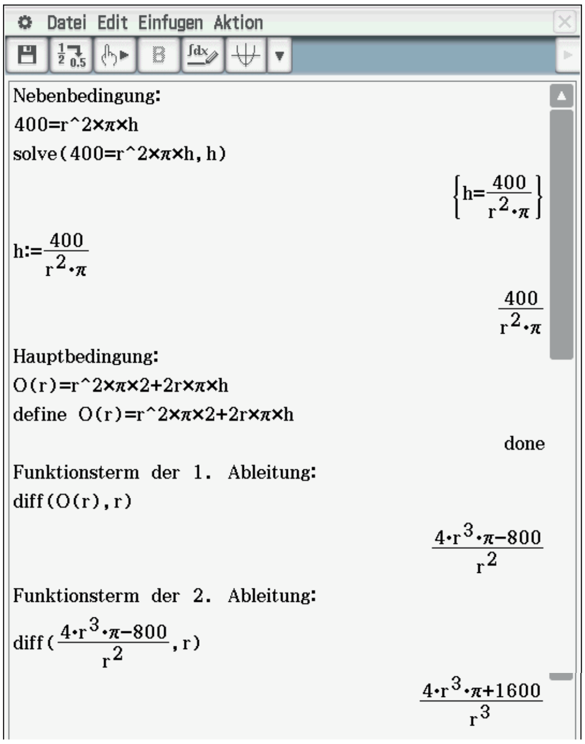
Hinweis: Im Tabellenkalkulationsmenü können die ermittelten Werte eingetragen werden. Durch Markierung der Felder D5 bis D16 kann der dazugehörige Graph gezeichnet werden.



Mögliche Diskussionsergebnisse:

- Fläche bleibt dann auch gleich;
- Ist nicht möglich, da sich bei größerer Fläche auch das Volumen vergrößert;
- Beim geschickten Auswählen der Maße kann das Volumen konstant bleiben und die eingesetzte Materialmenge minimal sein.

2) Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Maße der optimalen Dose.



Notwendige Bedingung:

solve$\left(\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-800}{r^2}=0, r\right)$

$$\left\{r=\frac{2\cdot 25^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}\right\}$$

$r:=\frac{2\cdot 25^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}$

$$\frac{2\cdot 25^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}$$

Hinreichende Bedingung:

$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi+1600}{r^3}$

$$12\cdot\pi$$

Minimale Oberfläche:

O(r)

300.5300279

Algeb Standard Reell 2π

3) Die Schülerinnen und Schüler überprüfen und vergleichen die Ergebnisse.

Minimale Oberfläche:

O(r)

300.5300279

Oberfläche der realen Dose: 303.4778503

$\frac{100\times 303.4778503}{O(r)}$

100.9808745

Die reale Dose hat andere Maße und einen um ca. 1% höheren Materialbedarf.

Algeb Standard Reell 2π

4) Die Schülerinnen und Schüler ermitteln weitere optimale Verpackungen und leiten eine Formel her.

Datei Edit Einfugen Aktion

Nebenbedingung:

a=r^2×π×h

solve(a=r^2×π×h, h)

$$\left\{h=\frac{a}{r^2\cdot\pi}\right\}$$

$h:=\frac{a}{r^2\cdot\pi}$

$$\frac{a}{r^2\cdot\pi}$$

Hauptbedingung:

define O(r)=r^2×π×2+2×r×π×h

done

Funktionsterm der 1. Ableitung:

diff(O(r), r)

$$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-2\cdot a}{r^2}$$

Funktionsterm der 2. Ableitung:

$\text{diff}\left(\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-2\cdot a}{r^2},r\right)$

$$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi+4\cdot a}{r^3}$$

Notwendige Bedingung:

$\text{solve}\left(\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-2\cdot a}{r^2}=0,r\right)$

$$\left\{r=\frac{\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right\}$$

$r:=\frac{\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

$$\frac{\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

Hinreichende Bedingung:

$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi+4\cdot a}{r^3}$

$$12\cdot\pi$$

Minimale Oberfläche:

$O(r)$

$$\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{3}}\cdot a}{\left(\frac{2\cdot a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{2\cdot\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\pi}{4^{\frac{1}{3}}}$$

a:=500

500

O(r)

348.7342055

a:=1750

1750

O(r)

803.9084186

Algeb Standard Reell 2π

5) Die Schülerinnen und Schüler vergleichen die Ergebnisse.

Minimale Oberfläche:

$O(r)$

$$\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{3}}\cdot a}{\left(\frac{2\cdot a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{2\cdot\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\pi}{4^{\frac{1}{3}}}$$

a:=400

400

O(r)

300.5300279

r

3.992945425

h

7.985890849

Algeb Standard Reell 2π

Die mithilfe dieser allgemeinen Formel bestimmte minimale Oberfläche ist mit der in Aufgabe 2 berechneten minimalen Oberfläche identisch. Die 400 der Formel wurde durch a substituiert.

Modifizierung eines Szenarios

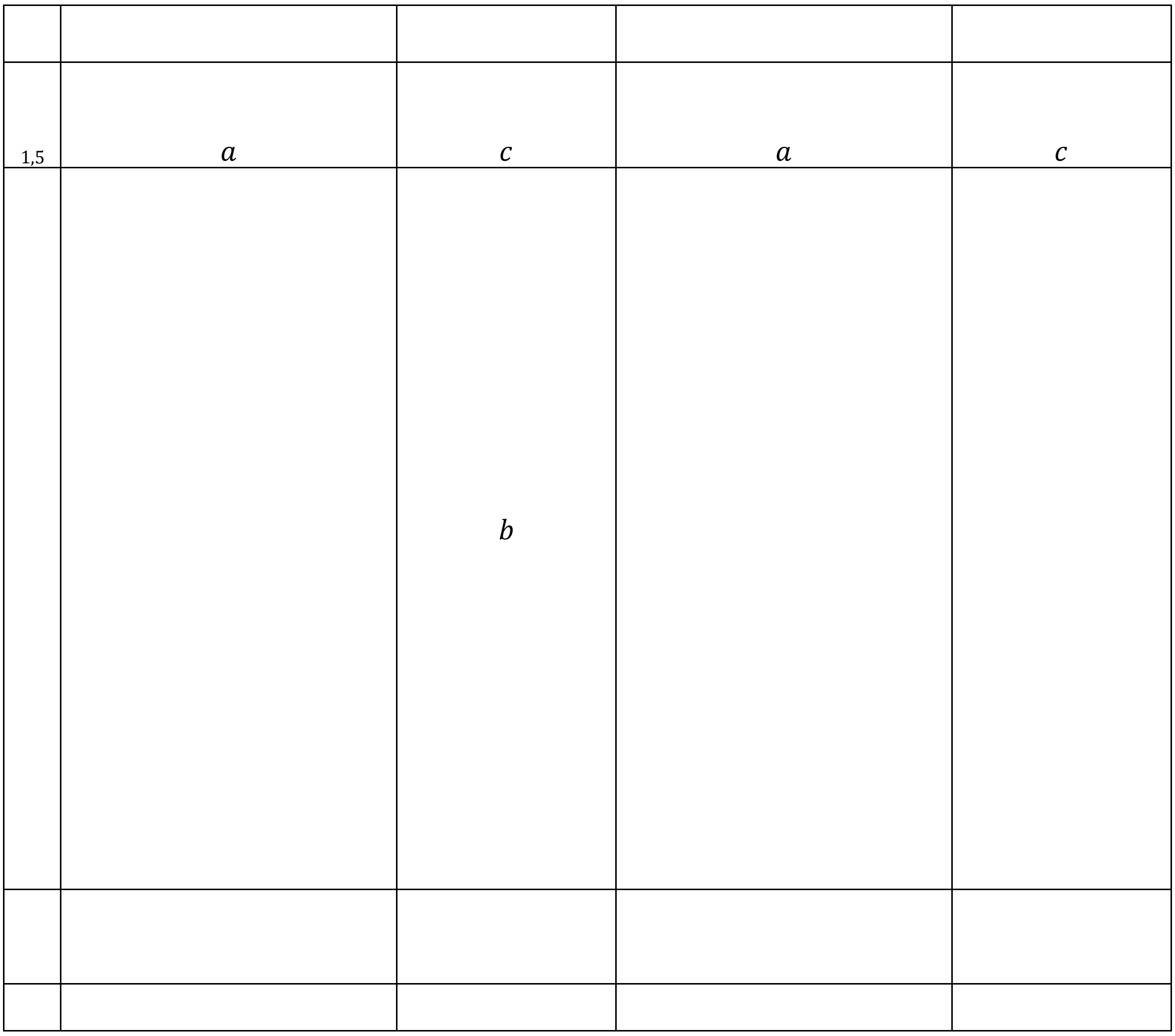
Beschreibung

Entsprechend der Leistungsfähigkeit sowie der Intention des Unterrichtsarrangements kann z. B. das erste Szenario modifiziert werden, indem die Schülerinnen und Schüler eigene quaderförmige Verpackungen beispielsweise von Milchtüten mitbringen. Diese werden im Unterricht zerlegt. Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler einen konkreten Überblick darüber, wie diese Verpackungen tatsächlich gefaltet werden. Es wird deutlich, dass quaderförmige Verpackungen aus einem rechteckigen Materialstück gefaltet und entsprechend verklebt werden, das eine Größe von etwa 30,9 cm x 27,1 cm hat. Dieses entspricht einer Fläche von rund 837,39 $Quadratzentimetern$.

Die Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler besteht darin, zu überprüfen, ob die Verpackung bei gleichbleibendem Volumen sowie gleichbleibenden Klebelaschen auch mit weniger Material realisiert werden kann. Die gewonnen Erkenntnisse können dann wieder auf quaderförmige Verpackungen übertragen werden, die ein anderes Volumen fassen.

Zur Bearbeitung der Aufgabe ist es aus Gründen der didaktischen Reduktion notwendig, dass entweder entsprechend der ausführlich beschriebenen Szenarien die Tiefe als konstante Größe vorgegeben wird (z. B. 5,8 cm) oder dass von einer quadratischen Grundfläche ausgegangen wird. Beim zweitgenannten Vorgehen kann sich den Schülerinnen und Schülern allerdings nicht erschließen, warum gerade diese Vorgabe einen minimalen Materialbedarf realisiert. Dieses ließe sich realitätsbezogen mithilfe der Passgenauigkeit in entsprechende Umverpackungen begründen.

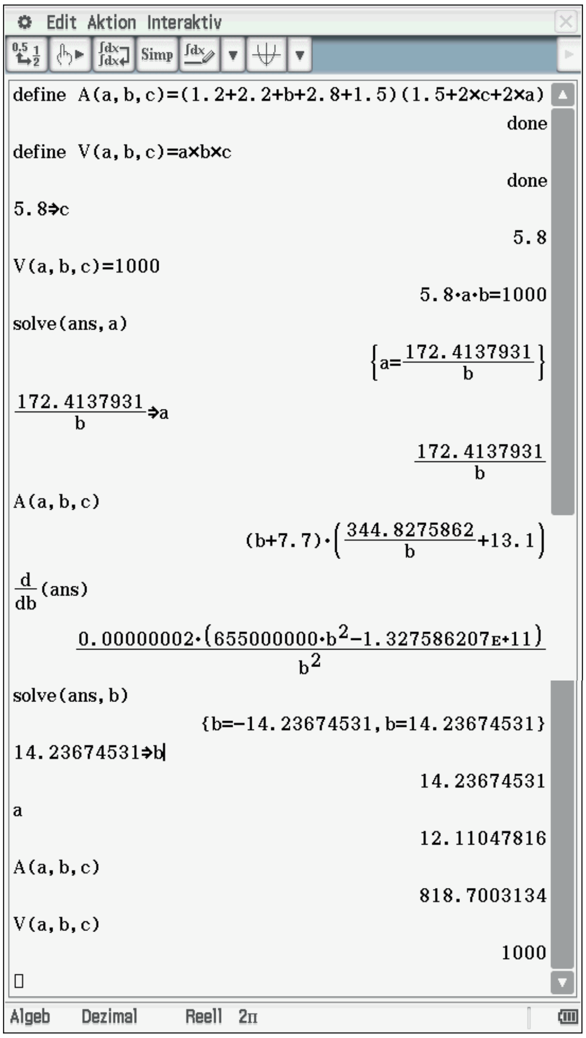
Mögliches Schnittmuster einer quaderförmigen Verpackung (Maßstab $1:2$):



Hinweis: Tatsächlich ausgemessene Milchtüten können beispielsweise auch folgende Werte haben: Höhe: 19,1 cm, Breite: 8,9 cm und Tiefe 5,8 cm. Hieraus errechnet sich ein Volumen von 985,42 ccm. Verursacht durch den Füllervorgang „beult“ sich das Material aus und ermöglicht somit die geforderte Füllmenge von einem Liter.

Mögliche Lösung des modifizierten Szenarios

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das modifizierte Szenario.



Empfehlungen für den Umgang mit eActivities

Dieter Haß

Kurzfassung des Inhalts:
Es werden Empfehlungen gegeben, die den gemeinsamen Umgang mit eActivities erleichtern sollen.

Klassenstufe(n):
Diese Empfehlungen sollten unabhängig von der Klassenstufe eingehalten werden, sobald mit eActivities gearbeitet wird.

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen eActivities so gestalten können, dass sie ohne weitere Kommentare auch von Mitschülern verstanden und fortgeschrieben werden können.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Besondere Vorkenntnisse sind nicht erforderlich.

Zeitbedarf:
Kurze Einführung dieser Regeln am besten anhand eines Beispiels. Im weiteren Unterrichtsverlauf dann ständig auf die Einhaltung achten.

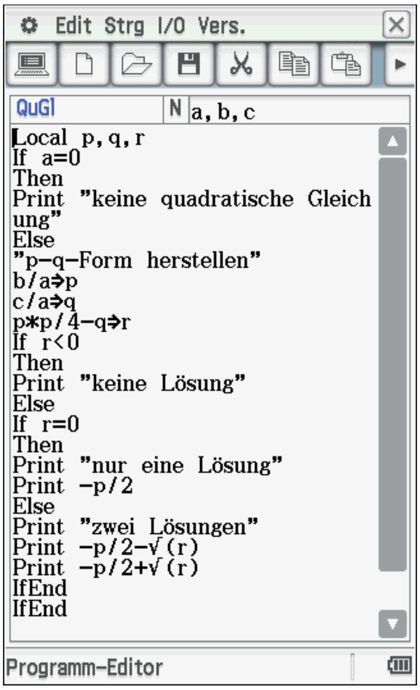
Sonstige Materialien:
Keine

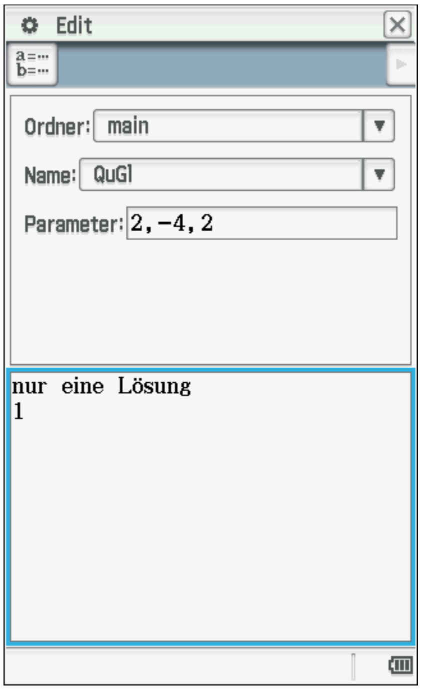
Empfehlungen für den Umgang mit eActivities

Während man im *Main-Menü* des ClassPad Rechnungen ähnlich einem einfachen wissenschaftlichen Taschenrechner ausführen kann, hat eine *eActivity* den Vorteil, dass man diese speichern, aufbewahren und insbesondere bei Bedarf verändern kann. Zudem kann sie kommentiert und damit besser gegliedert werden. Im Folgenden sind neben Empfehlungen zum Aufbau auch Beispiele für *eActivities* aufgeführt.

Man darf *eActivities* jedoch nicht mit einem *Programm* verwechseln, da z. B. Schleifen und Verzweigungen nicht möglich sind. Im Menü *Programme* definierte Programme und Funktionen können aber bei Bedarf aufgerufen und erneut verwendet werden.

So können beispielsweise mit dem folgenden Programm $QuGl(a, b, c)$ die Werte a, b und c der ABC-Formel (Mitternachtsformel) übergeben werden.





Der Aufruf erfolgt wie im *Main-Menü* auch innerhalb einer *eActivity* z. B. mit dem Namen des Programmes und ggf. den Parametern:

$$QuGl(2, -4,2)$$

Das Programm liefert in diesem Falle als einzige Lösung 1.

Eine *eActivity* wird von einer Person oder einer Gruppe erarbeitet und kann auch von anderen Personen verwendet und verändert werden. Um diese Arbeit zu erleichtern, sind die folgenden Empfehlungen sinnvoll und zweckmäßig:

(1) Eine *eActivity* ist so zu gestalten, dass der Rechenablauf immer wieder von der ersten Zeile an wiederholt werden kann. Dieses erfordert einen sorgfältigen Umgang mit Variablen. Deshalb soll die *eActivity* in der ersten Zeile nicht – wie beim Erstellen einer neuen *eActivity* vorgegeben – mit einer Textzeile, sondern mit dem *Clear_a_z*-Befehl in einer Berechnungszeile beginnen. Damit werden für wiederholte Berechnungen alle einstelligen Variablen (also a bis z und A bis Z) gelöscht. Bei einer Kommentarzeile zu Beginn der *eActivity* würde man außerdem bei der Eingabe von $\boxed{\text{EXE}}$ oder *Return* (im ClassPadManager) nur Zeilenumbrüche produzieren. Falls doch im späteren Verlauf wegen geänderter Werte der Variablen ein manueller Eingriff in die Rechnungen erforderlich wird, ist dies deutlich zu kommentieren. Dies kann man durch die verschiedenen Schreibweisen bei Wertzuweisungen unterstützen (siehe 5 und 6). Der Wechsel zwischen einer *Berechnungs-* und einer *Kommentarzeile* erfolgt durch Anklicken von $\boxed{\text{A}}$, bzw. $\boxed{\int dx}$ in der Menüleiste.

(2) Alle weiteren Variablen sollten mit dem Befehl *DelVar* in der zweiten Zeile einzeln gelöscht werden, wenn nicht sichergestellt ist, dass ihnen im Verlauf der Rechnung eindeutig vor einer Verwendung ein Wert zugewiesen wurde. Eine solche Aufstellung gibt bei umfangreichen *eActivities* auch einen guten Überblick über die verwendeten Variablen.

(3) Die *eActivity* ist insgesamt so zu gliedern:
   a. Löschen von Variablen
   b. Aufgabenstellung, ggf. mit Verweis auf Lehrwerk oder andere Quellen
   c. Name(n) des/der Verfasser, Datum
   d. Gegebene Werte
   e. Gesuchte Werte
   f. Rechenweg
   g. Lösung

(4) Während man bei klassischen Lösungswegen ohne CAS-Einsatz zunächst eine Lösung mit Variablen erstellt und dann anschließend die gegebenen Werte einsetzt, ist es beim CAS-Rechner zweckmäßig, Variablen zu verwenden, die bereits zuvor („gegeben") mit den entsprechenden Werten belegt wurden. Aber auch ein Lösungsweg nur mit unbelegten Variablen ist denkbar. Damit lassen sich dann sogar Beweise führen.

(5) Wertzuweisungen, die variiert werden können (z. B. im „gegeben"-Teil) werden mit $\boxed{:}\,\boxed{=}$ gekennzeichnet, automatische Zuweisungen im Verlauf der Rechnung mit $\Rightarrow$.

(6) Die einzelnen Lösungsschritte sollen automatisch ablaufen. Ein erzwungener Übertrag von Werten durch manuellen Eingriff in den Ablauf einer erstellten Rechnung ist möglichst zu vermeiden, bzw. falls unvermeidbar deutlich zu kennzeichnen.

(7) Aus dem Namen der *eActivity* soll auf deren Inhalt oder die Aufgabenstellung im Lehrwerk geschlossen werden können. Gewöhnlich genügt es ein „s" gefolgt von der Seitenzahl und danach ein „n" gefolgt von der Nummer der Aufgabe als Name zu verwenden. Weitere Zusätze können auch zur Unterscheidung von Lehrwerken dienen.

(8) In einer Gruppe erzeugt jeder Verfasser von *eActivities* ein Verzeichnis mit seinem eigenen Namen, in die er seine eigenen *eActivities* ablegt, damit beim Austausch von *eActivities* diese nicht durch gleichbenannte überschrieben werden.

(9) In der Regel werden Rechnungen im *Standardmodus* durchgeführt. Dezimale Ergebnisse werden mit der Funktion *approx()* bestimmt. Für solche Anwendungsaufgaben, die ohnehin nur mit Dezimalzahlen berechnet werden, gilt dies natürlich nicht; diese sollten direkt im *Dezimal-Modus* ablaufen.

(10) Die Berechnung von Winkeln wird im *Gradmaß* durchgeführt, wenn die Aufgabenstellung nicht ausdrücklich eine andere Darstellung erfordert.

Aufgabe

Hier folgt ein Beispiel aus dem Umfeld der Markow-Ketten:

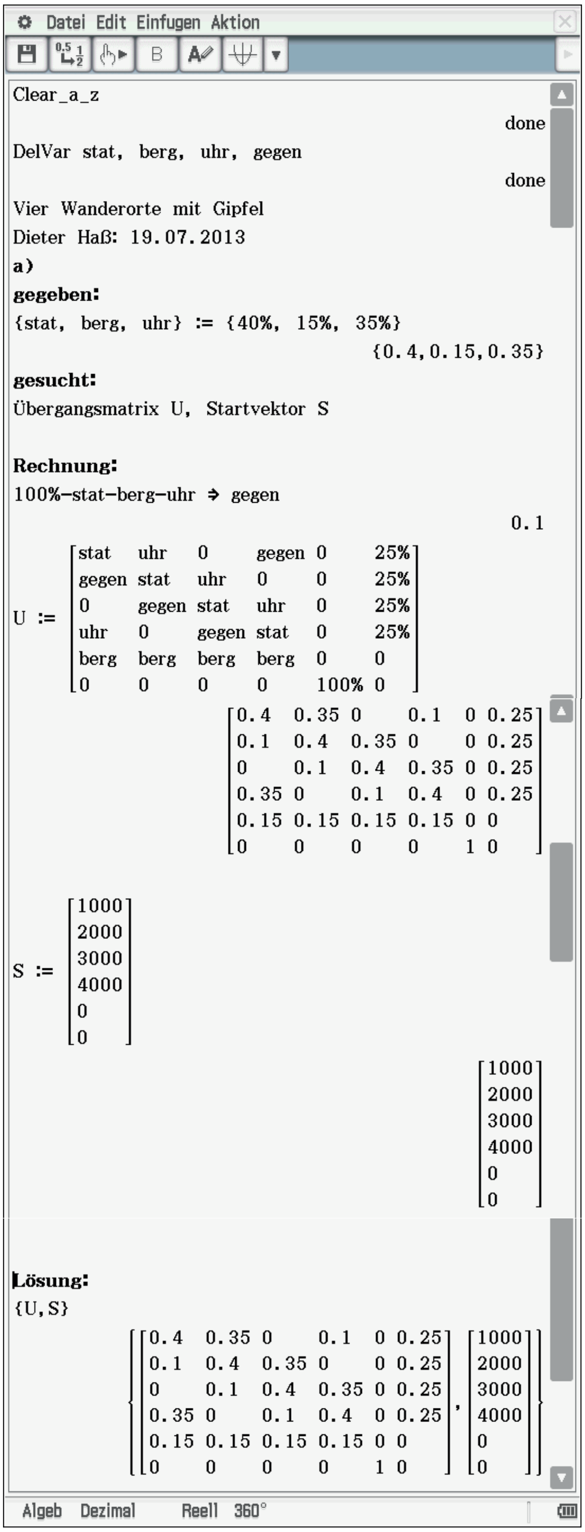
Vier Orte A, B, C und D liegen entgegen dem Uhrzeigersinn auf einem Kreis um einen Berg mit dem Gipfel G herum angeordnet. Benachbarte Orte sind in einer halben Stunde zu Fuß zu erreichen, ebenso der Weg zum oder vom Gipfel von jedem der Orte aus.

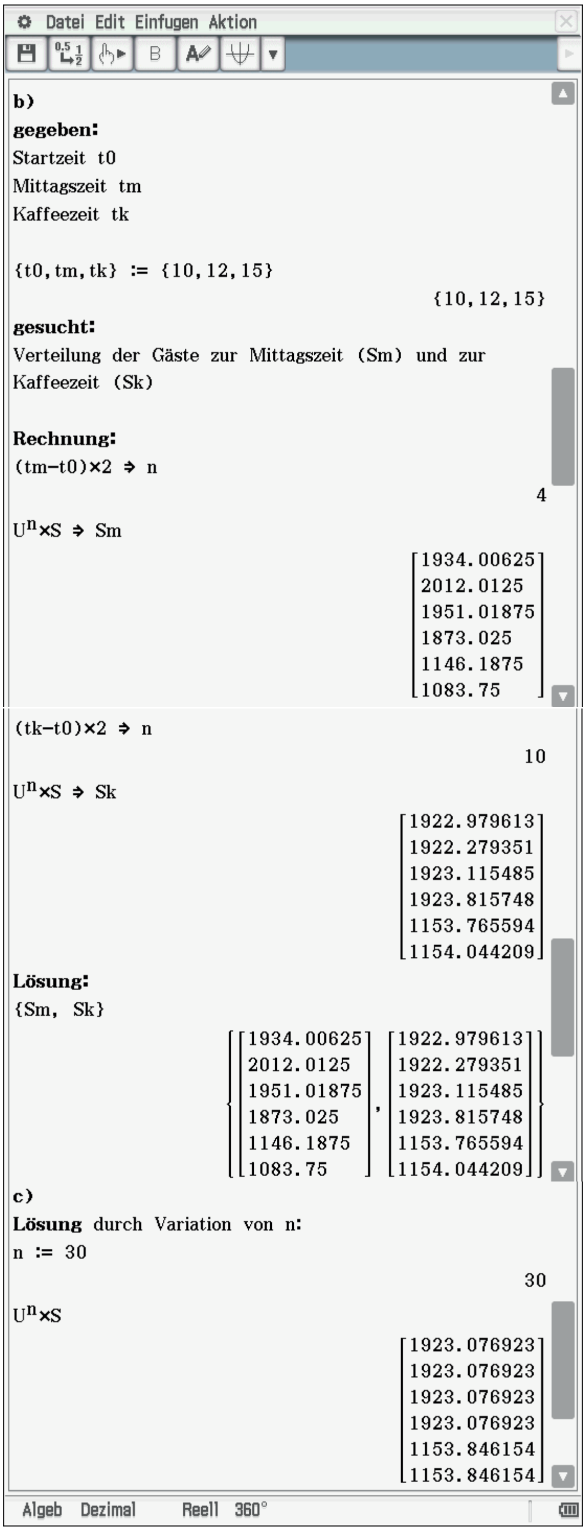
In einer statistischen Erhebung wurde festgestellt, dass die Gäste bestimmte Gewohnheiten haben: Sie beginnen ihre touristischen Aktivitäten um 10 Uhr. Die weiteren Aktivitäten werden halbstündlich erfasst. Dabei ist stets Folgendes festzustellen: 40 % sind im jeweiligen Ort verblieben. 35 % wanderten im Uhrzeigersinn zum Nachbarort, 15 % wählten den Weg zum Gipfel, der Rest wanderte entgegen dem Uhrzeigersinn zum anderen Nachbarort. Diejenigen, die zum Gipfel gewandert sind, verbleiben dort eine halbe Stunde, um sich dann wieder gleichmäßig auf die vier Orte zu verteilen.

Der Ort A beherbergt $1000, B$ $2000, C$ 3000 und D 4000 Gäste.

a) Erstellen Sie die Übergangsmatrix U und den Startvektor S!
b) Wie verteilen sich die Gäste zum Mittagessen um 12 Uhr und zur Kaffeezeit um 15 Uhr?
c) Beurteilen Sie die Entwicklung der Verteilung und geben Sie durch Auswahl eines geeigneten Wertes für n (Anzahl der halben Stunden) den Grenzvektor der Markow-Kette mit der Genauigkeit der ClassPad-Anzeige (Zahlenformat im *Grundformat* des ClassPad: *Normal 2*) an!

Lösungshinweise





Ein Beweis der Konvergenz ist das natürlich nicht. Auch könnte man diskutieren, ob bei der gegebenen Aufgabe eine derartige Grenzbetrachtung überhaupt zweckmäßig ist und ob eine Untersuchung über 15 Stunden ($n = 30$) Sinn ergibt, da die Gäste ihr Verhalten gegen Abend anders gestalten als tagsüber. Spätestens gegen 17 Uhr ($n = 14$) kann man für praxisbezogene Überlegungen die Berechnungen beenden.

Es gibt aber interessante Varianten, wenn das Verhalten der Besucher sich ändert. So könnte z. B. am Ort A ein Angebot geschaffen werden, das einen bestimmten Prozentsatz der Besucher von A zu Lasten anderer Optionen bis zum Abend aus den Berechnungen herausnimmt. Wie wirkt sich das auf die Orte insgesamt aus?

Der Umgang mit Matritzen gehört in den Bereich der Linearen Algebra. Markow-Ketten bieten die Chance, dieses Gebiet mit anderen Gebieten (Analysis, Stochastik) zu verknüpfen. Es bleibt abzuwarten, ob der durch den ClassPad erleichterte Umgang mit Matritzen auch weitere Algorithmen im Bereich der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie im Unterricht nutzen lässt, die bisher wegen des Rechenaufwandes nicht zweckmäßig erschienen. Ansätze zu diesem Thema finden Sie im nächsten Abschnitt.

Beispiele aus der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Dieter Haß

Kurzfassung des Inhalts:
An einigen Beispielen wird der zweckmäßige Einsatz des ClassPad bei Rechnungen mit Geraden, Ebenen, Vektoren usw. erklärt. Diese und weitere Beispiele können unter http://casmu.dieterhass.de heruntergeladen werden.

Der Begriff Matrix, deren Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl sollen in Grundzügen bekannt sein.

Klassenstufe(n):
Leistungs- oder Grundkurs Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen Darstellungen für geometrische Objekte in der Linearen Algebra einüben und in weiteren Aufgabenstellungen einsetzen können.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Es sind keine Vorkenntnisse notwendig. Im Artikel „Empfehlungen zum Umgang mit eActivities“ werden Hinweise gegeben, die bei der Erstellung von eActivities hilfreich sind.

Zeitbedarf:
Diese Beispiele stellen keine Unterrichtsreihe dar, sondern können dann eingeführt werden, wenn der Stoffplan die entsprechenden Themen aufgreift.

Sonstige Materialien:
Keine

Für Zeljko, Billy, Jannika, Johann, Nele, Paul, Lara, Alice,
Simon, Julius, Nina, Jan, Franziska, und Jean-Marc,
sowie Omid, Niklas, Sophia, Celia, Denise
Jakob, Damian, Alina und Leonard

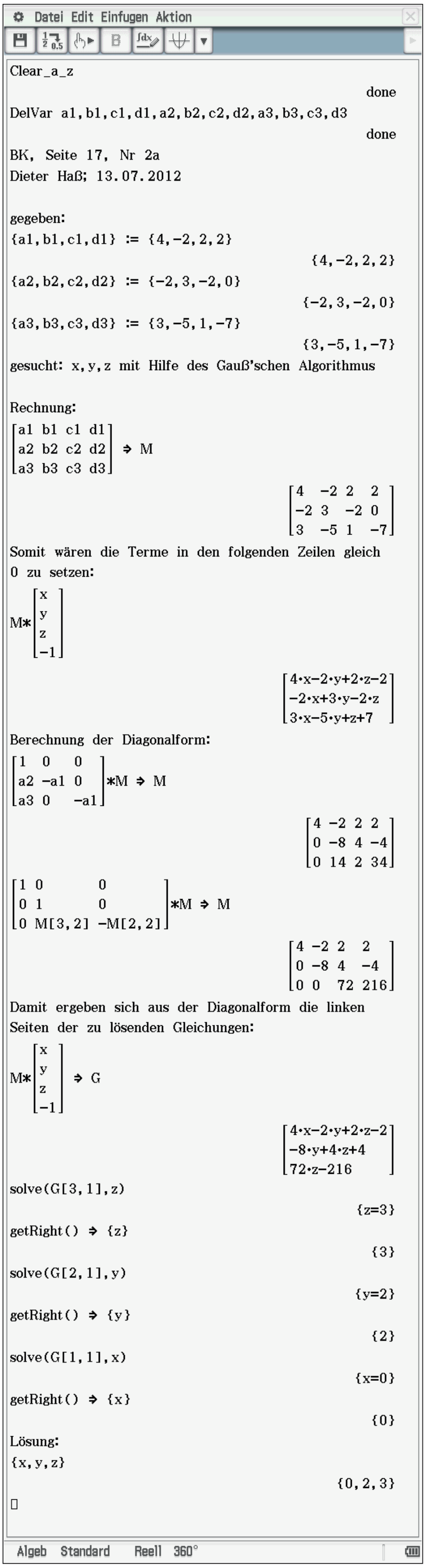
Beispiele aus der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Gauß’scher Algorithmus ausführlich und direkt

Als einführendes Beispiel betrachten wir den Gauß‘schen Algorithmus zur Lösung eines Gleichungssystems mit drei Unbekannten. Dabei lösen wir das Gleichungssystem so, wie man dies ohne Rechnerunterstützung tun würde.

Zum Ende der Sekundarstufe I werden heute häufig nur noch lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten behandelt, daher wird der Gauß’sche Algorithmus oft erst in der Anfangsphase des Kurses zur Linearen Algebra in der Sekundarstufe behandelt. Allerdings ist es durchaus zweckmäßig, diesen bereits in der Analysis einzuführen, um z. B. die Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion aus gegebenen Eigenschaften zu bestimmen.

Diese *eActivity* zeigt zunächst, wie man den Einsatz eines CAS-Rechners als reine Rechenhilfe mit der Lösung einer Aufgabe in traditioneller Weise verbinden kann. Hierbei werden die Koeffizienten und die absoluten Glieder der Gleichungen in einer Matrix zusammengefasst. Durch geeignete Multiplikation von Matrixzeilen und anschließender Addition verschiedener Zeilen mit Hilfe einer Steuermatrix werden zunächst in der zweiten und dritten Zeile die Werte der ersten Spalte auf den Wert 0 gebracht, dann im nächsten Schritt erfolgt dies auch für den Wert in der dritten Zeile und der zweiten Spalte. Man erhält somit die Diagonalform, die in der letzten Zeile eine Gleichung enthält, die direkt lösbar ist. Anschließend erhält man durch Einsetzen in der zweiten und dann auch in der ersten Zeile die Werte der weiteren Unbekannten. Bei einer programmierten Lösung würde man auch oberhalb der Diagonalen in weiteren Schritten durch geeignete Umformungen jeweils den Wert 0 erhalten, um dann die Unbekannten direkt zeilenweise bestimmen zu können, worauf hier aber verzichtet wird.

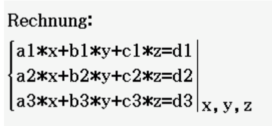


bk_s17n2a

Im „gegeben"-Teil kann man viele Zeilen einsparen, wenn man die Schreibweisen für Listen mit geschweiften Klammern verwendet. Die Zuweisung $\boxed{:}\boxed{=}$, die „wird definiert als" bedeutet, findet in den Zuweisungen ihren Einsatz, in denen die Werte bei einer Variation der Rechnung auch geändert werden können. Das in ClassPad-Rechnungen gleichwertige Zeichen $\Rightarrow$ wird bei Zuweisungen eingesetzt, die sich automatisch im Ablauf einer Rechnung ergeben, wie in Kapitel „Empfehlungen für den Umgang mit eActivities" erläutert wird. Die Matrix G besteht dann aus drei Zeilen, die den linken Seiten von Gleichungen entsprechen, die gleich 0 zu setzen sind. Deshalb wurden die absoluten Glieder mit dem Faktor -1 von der rechten zur linken Seite der Gleichungen verschoben. In der Anweisung *solve(G[3,1],z)* wird zuerst die dritte Zeile der Matrix G ausgewählt. Der zweite Index 1 ist erforderlich, da G als einspaltige Matrix zu behandeln ist. Auf die komplette und mathematisch eigentlich korrekte Schreibweise *solve(G[3,1]=0,z)* kann verzichtet werden, wenn man sich der Bedeutung der abkürzenden Darstellung bewusst ist. Da bei der Lösung von Gleichungen vom ClassPad den unbekannten Variablen nicht automatisch ein Wert zugewiesen wird, muss dies mit dem Befehl *getRight(ans)⇒{z}* oder noch kürzer *getRight()⇒{z}* veranlasst werden, wobei sich wiederum die Listenschreibweise anbietet, auch wenn es sich hier nur um eine einzelne Variable handelt.

Es ging bei diesem Beispiel nur um das Verfahren des Gauß'schen Algorithmus bis zur Diagonalform. Während man bei der schriftlichen Berechnung bei Bedarf in einzelnen Zeilen kürzen würde, kann dies beim CAS entfallen, weil es für den Rechenweg keine Vorteile bringt, sondern nur zusätzliche Arbeitsschritte erzeugt.

Natürlich lässt sich die Aufgabe als LGS mit dem ClassPad noch einfacher mit der *eActivity* lösen: Aber darum ging es in dem Beispiel nicht.



Übung: Ergänzen Sie die Rechnung rechts zu einer vollständigen *eActivity*! (Musterlösung zum Beispiel „bk_s17n2a_LGS“ unter http://casmu.dieterhass.de)

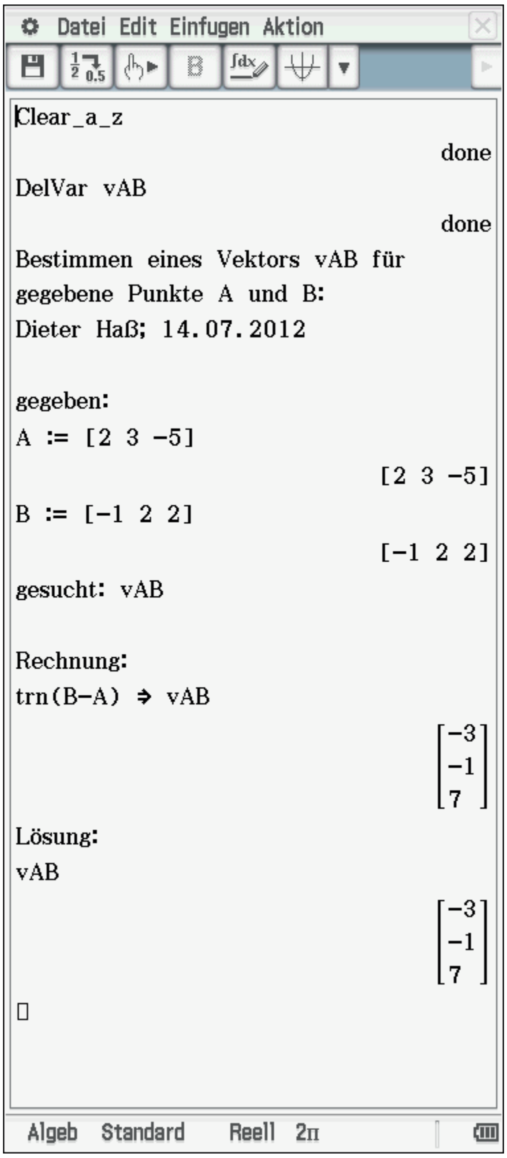
Unberücksichtigt bleiben dabei Sonderfälle mit leerer oder unendlich großer Lösungsmenge, die aber hier nicht einbezogen werden können, da in eine *eActivity* keine Fallunterscheidungen wie in einem Programmablauf eingefügt werden können. Diese Sonderfälle müssen gesondert interpretiert werden. Das ClassPad-Ergebnis *No Solution* darf nicht nur als „keine Lösung“ gedeutet werden!

Vektoren und Punkte

Für Vektoren und Punkte (Spalten-, bzw. Zeilenvektor) gibt es beim ClassPad keine besondere Darstellung. Sie sind jedoch wichtige Elemente der analytischen Geometrie. Es ist deshalb notwendig, von Anfang an einen Umgang mit diesen Elementen einzuüben, der universell einsetzbar ist. Dazu fasst man sie in der ClassPad-Darstellung als Spezialfall einer Matrix auf. Damit lassen sich alle gängigen Problemstellungen einfach bearbeiten, auch wenn die Schreibweise manchmal umständlich erscheinen mag.

Im Beispiel rechts („vAB“) soll der Vektor $\overrightarrow{AB}$ für gegebene Punkte A und B bestimmt werden. Dabei benötigen wir auch die Funktion *trn()*, die die Zeilen und Spalten einer Matrix vertauscht und damit aus einem Zeilenvektor einen Spaltenvektor erzeugt und umgekehrt.

Da das Display des ClassPad eine Schreibweise wie $\overrightarrow{AB}$ nicht ermöglicht, wird der Vektorpfeil durch ein vorangestelltes v ersetzt. Es erleichtert so auch die Leseweise „Vektor AB“. Addition und Subtraktion von Vektoren sind wie die entsprechenden Matrixoperationen durchführbar. Auch die Skalarmultiplikation mit einer reellen Zahl ist möglich.

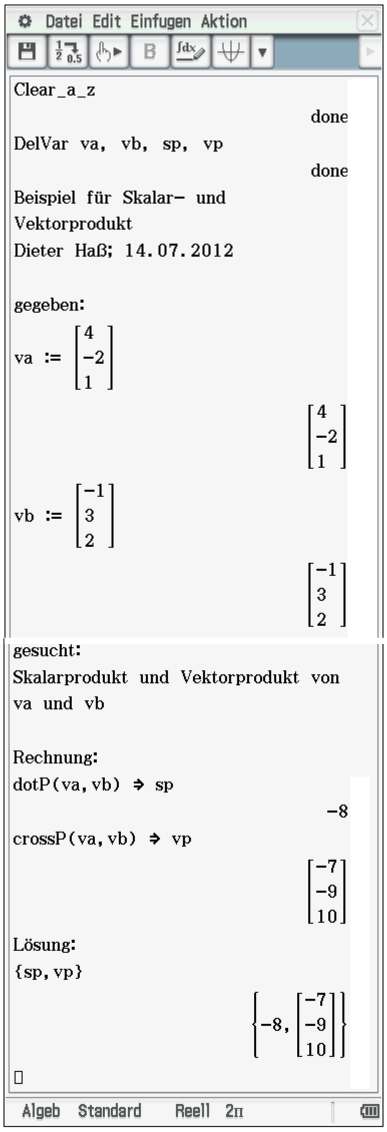


vAB

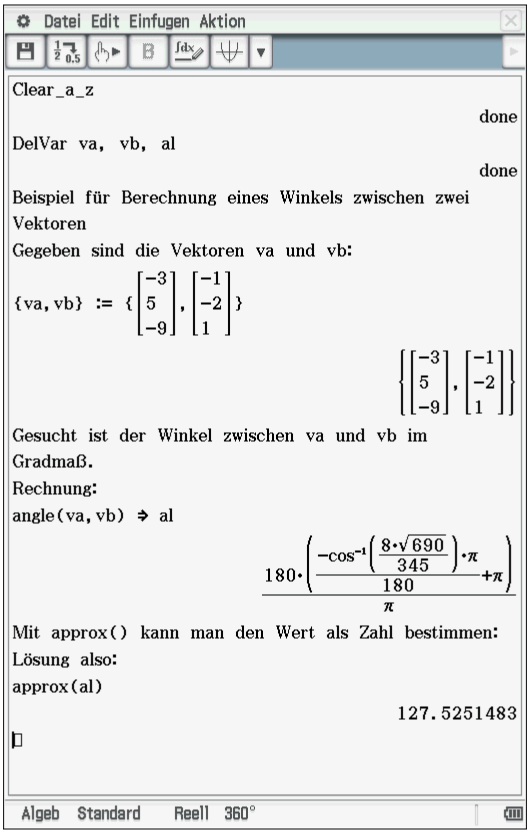
Einfache Vektorfunktionen

Die Skalarmultiplikation ist mit *dotP()*, die Vektormultiplikation mit *crossP()* einfach auszuführen. Das Beispiel „skalar_vektor“ zeigt zusätzlich in der Lösung, dass in einer Liste verschiedene Datentypen gemischt werden können. Beide Funktionen liefern auch für Zeilenvektoren entsprechende Ergebnisse.

Mit *norm(va)* kann man die Länge des Vektors va berechnen, mit *angle(va,vb)* den Winkel zwischen va und vb, wobei man auf die Einstellung Bogenmaß/Grad/Neugrad (2π/360°/400) achten muss. Im Beispiel „angle“ soll ein Winkel im Gradmaß berechnet werden, wobei der *Standardmodus* voreingestellt ist. Die Variable al steht hier für α. Auf dem ClassPad könnte man α auch direkt als Variablennamen verwenden, jedoch ist die Verwendung der Abkürzungen mit lateinischen Buchstaben (al, be, ga, de usw.) wesentlich schneller einzugeben. Die Anwendung von *approx()* wird dann wichtig, wenn solche Ergebnisse in einer umfangreichen Liste *list,* z. B. zur Berechnung von Mittelwerten *mean(list),* oder Standardabweichungen *stdDev(list)* verwendet werden sollen, weil es sonst zur Fehlermeldung „Unzureichender Speicher“ kommen kann, da dann nicht jeweils der Zahlenwert, sondern der gesamte Formelterm zur Berechnung herangezogen und hierzu zuvor gespeichert wird.



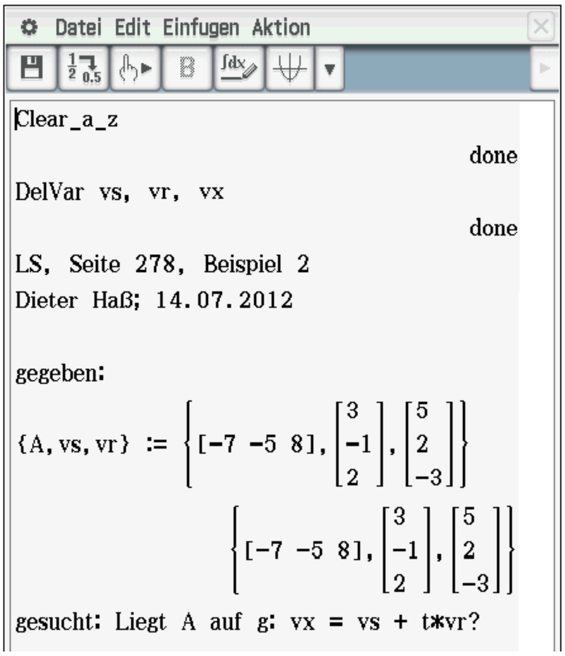
skalar_vektor

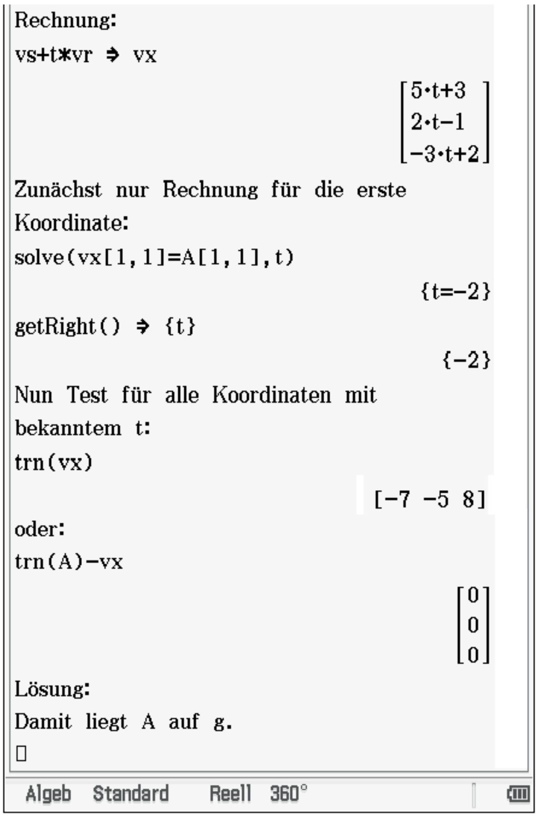


angle

Punkt und Gerade

Hier werden nur Beispiele im R^3 betrachtet, da diese sich leicht in den R^2 übertragen lassen. Es soll untersucht werden, ob der Punkt A auf der Geraden g liegt. Eine häufig benötigte Darstellung einer Geraden ist die Parameterform. Da oft Stütz- und Richtungsvektor unabhängig voneinander zu betrachten sind, ist es zweckmäßig, diese auch getrennt als vs und vr zu definieren. Im folgenden Beispiel ist dies zwar nicht zwingend erforderlich, aber zur Vereinheitlichung der Vorgehensweise beim Umgang mit Geraden sinnvoll. Die Berechnungszeile *trn(vx)* liefert deshalb ein verwendbares Ergebnis, weil inzwischen dem Paramter t ein Wert zugewiesen wurde. Beim zweiten Lösungsvorschlag hätte man den Befehl *trn()* statt auf A auch auf vx anwenden können, da nur geprüft wird, ob das Ergebnis ein Nullvektor ist.





Lage zweier Geraden

Bei der Untersuchung der Lage zweier Geraden g und h im R^3 zueinander können sich vier Möglichkeiten ergeben:

1. ein eindeutiger Schnittpunkt S,
2. Parallelität von g und h, aber nicht identisch,
3. Identität von g und h,
4. g und h windschief zueinander.

Hierzu liefert diese *eActivity* je ein Beispiel („g_und_h"), die sich selbst erklären. Die Untersuchung der gegenseitigen Lagen von verschiedenen Geraden erfolgt im folgenden Beispiel (LS, Seite 281). Auf Formalitäten wie „gegeben – gesucht" wurde verzichtet.

Datei Edit Einfugen Aktion

Clear_a_z

done

DelVar vsg, vrg, vsh, vrh

done

Untersuchung der Lage von Geraden g und h zueinander g wird fest vorgegeben, h wird variiert, um alle Möglichkeiten zu zeigen

allgemein gegeben:
vsg: Stützvektor für g
vrg: Richtungsvektor für g
(für h im Folgenden analog!)

$\{vsg,\ vrg\} := \left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\4\\-6\end{bmatrix}\right\}$

$$\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\4\\-6\end{bmatrix}\right\}$$

vsg+t*vrg ⇒ g

$$\begin{bmatrix}4\cdot t+2\\4\cdot t-1\\-6\cdot t+3\end{bmatrix}$$

Gesucht ist jeweils die Lage von g und h zueinander.

Beispiel 1:
gegeben:

$\{vsh,\ vrh\} := \left\{\begin{bmatrix}7\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$

$$\left\{\begin{bmatrix}7\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

Rechnung:
vsh+s*vrh ⇒ h

$$\begin{bmatrix}s+7\\-s+2\\2\cdot s-1\end{bmatrix}$$

$\left\{\begin{array}{l}g[1,1]=h[1,1]\\g[2,1]=h[2,1]\\g[3,1]=h[3,1]\end{array}\right|_{s,t,u}$

$$\{s=-1, t=1, u=u\}$$

u ist hier eine "Dummy"-Variable
getRight() ⇒ {s, t, u}

{-1, 1, u}

trn(g) ⇒ S

[6 3 -3]

Probe
trn(h)

[6 3 -3]

Lösung: der Schnittpunkt S ist S

[6 3 -3]

Beispiel 2:
zunächst Variable aus Teil 1 außer denen zu g löschen, dann Gerade h neu gegeben:
DelVar s, t, h, vsh, vrh

done

$\{vsh,\ vrh\} := \left\{\begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\-6\\9\end{bmatrix}\right\}$

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\-6\\9\end{bmatrix}\right\}$$

Rechnung:
vsh+s*vrh ⇒ h

$$\begin{bmatrix}-6\cdot s-1\\-6\cdot s-2\\9\cdot s+3\end{bmatrix}$$

$\left\{\begin{array}{l}g[1,1]=h[1,1]\\g[2,1]=h[2,1]\\g[3,1]=h[3,1]\end{array}\right|_{s,t,u}$

No Solution

Also gibt es keinen Schnittpunkt!
Vergleich der Richtungsvektoren:
(u und v als Dummies)

$\left\{\begin{array}{l}x*vrg[1,1]=vrh[1,1]\\x*vrg[2,1]=vrh[2,1]\\x*vrg[3,1]=vrh[3,1]\end{array}\right|_{x,u,v}$

$$\left\{x=-\frac{3}{2}, u=u, v=v\right\}$$

Also sind die Richtungsvektoren parallel.
Punktprobe mit vsg in h:

Zunächst nur Rechnung für die erste Koordinate:
solve(vsg[1,1]=h[1,1],s)

$$\left\{s=-\frac{1}{2}\right\}$$

getRight() ⇒ {s}

$$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Nun Test für alle Koordinaten mit bekanntem s:
vsg−h

$$\begin{bmatrix}0\\-2\\\frac{9}{2}\end{bmatrix}$$

Lösung:
Da sich nicht der Nullvektor ergibt, sind die Geraden zwar parallel, aber nicht identisch

Beispiel 3:
zunächst Variable aus Teil 1 außer zu g löschen,
dann Gerade h neu gegeben:
DelVar s,t,h,vsh,vrh

done

$\{vsh,\ vrh\} := \left\{\begin{bmatrix}6\\3\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\-6\\9\end{bmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{bmatrix}6\\3\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\-6\\9\end{bmatrix}\right\}$

Rechnung:
vsh+s*vrh ⇒ h

$\begin{bmatrix}-6\cdot s+6\\-6\cdot s+3\\9\cdot s-3\end{bmatrix}$

$\left\{\begin{matrix}g[1,1]=h[1,1]\\g[2,1]=h[2,1]\\g[3,1]=h[3,1]\end{matrix}\right|_{s,t,u}$

$\left\{s=\frac{-(2\cdot t-2)}{3},t=t,u=u\right\}$

Also gibt es einen Schnittpunkt, aber t ist unbestimmt und s von t abhängig.
Zur Kontrolle Vergleich der Richtungsvektoren:
(u und v als Dummies)

$\left\{\begin{matrix}x*vrg[1,1]=vrh[1,1]\\x*vrg[2,1]=vrh[2,1]\\x*vrg[3,1]=vrh[3,1]\end{matrix}\right|_{x,u,v}$

$\left\{x=-\frac{3}{2},u=u,v=v\right\}$

Also sind die Richtungsvektoren parallel.
Punktprobe mit vsg in h:

Zunächst nur Rechnung für die erste Koordinate:
solve(vsg[1,1]=h[1,1],s)

$\left\{s=\frac{2}{3}\right\}$

getRight() ⇒ {s}

$\left\{\frac{2}{3}\right\}$

Nun Test für alle Koordinaten mit bekanntem s:
vsg−h

$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Lösung:
Da sich der Nullvektor ergibt, sind die Geraden nicht nur parallel, sondern sogar identisch.

Beispiel 4:
zunächst Variable aus Teil 1 außer zu g löschen,
dann Gerade h neu gegeben:
DelVar s,t,h,vsh,vrh

done

$\{vsh,\ vrh\} := \left\{\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-6\\7\end{bmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-6\\7\end{bmatrix}\right\}$

Rechnung:
vsh+s*vrh ⇒ h

$\begin{bmatrix}2\cdot s-1\\-6\cdot s+3\\7\cdot s-2\end{bmatrix}$

$\left\{\begin{matrix}g[1,1]=h[1,1]\\g[2,1]=h[2,1]\\g[3,1]=h[3,1]\end{matrix}\right|_{s,t,u}$

No Solution

Also gibt es keinen Schnittpunkt.

Vergleich der Richtungsvektoren:
(u und v als Dummies)

$\left\{\begin{matrix}x*vrg[1,1]=vrh[1,1]\\x*vrg[2,1]=vrh[2,1]\\x*vrg[3,1]=vrh[3,1]\end{matrix}\right|_{x,u,v}$

No Solution

Also sind die Richtungsvektoren nicht parallel.

Lösung:
Demnach sind die Geraden g und h windschief.

Algeb Standard Reell 360°

Ebenen

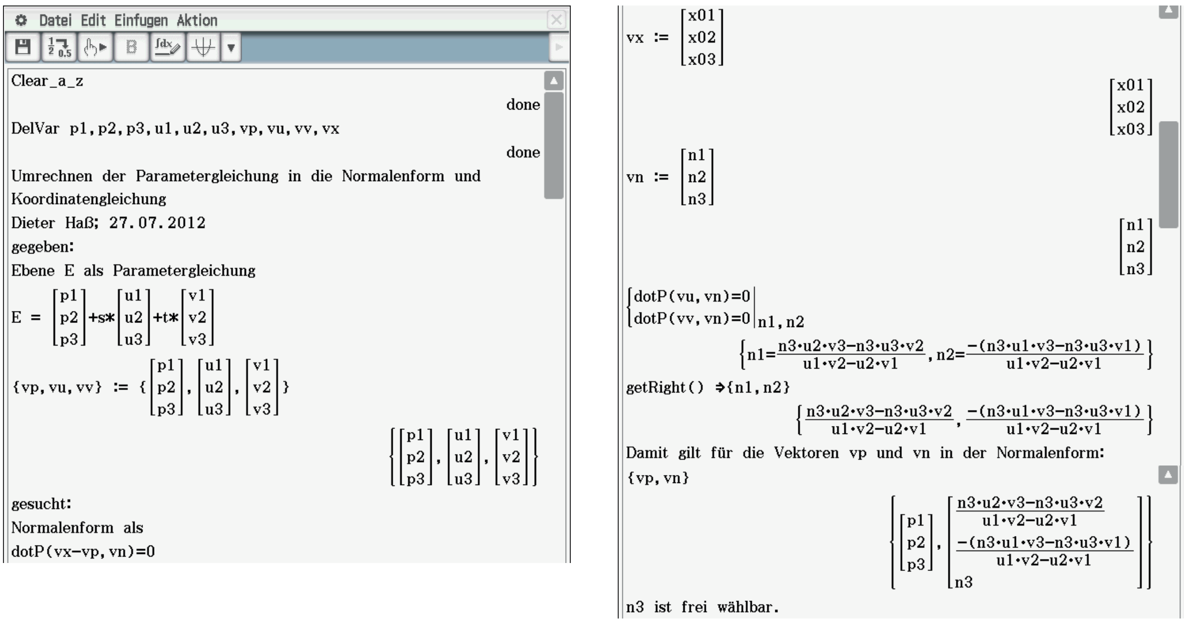
Ebenen können mit der Zuordnung $E := a1 * x01 + a2 * x02 + a3 * x03 = b$ definiert werden; dabei wird der Variablen E die Gleichung einer Ebene zugewiesen. Aus mathematischer Sicht ist dies eine ungewöhnliche Darstellung, aber sie ist mit dem ClassPad möglich! Man spart sich damit bei weiteren Rechnungen viel Schreibarbeit, weil man bei folgenden Berechnungen (z. B. mit *solve(E,x01)*) statt der ausgeschriebenen Gleichung einfach nur E eingeben muss.

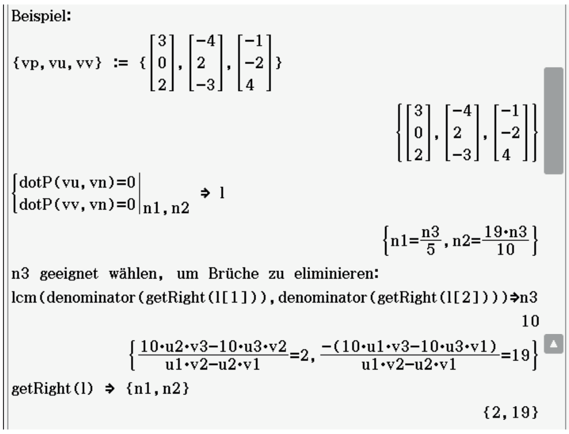
An dieser Stelle ist ein kritischer Hinweis erforderlich: Etwas umständlich erscheint die hier angewandte Schreibweise für die indizierten x-Werte. Aber Variablen wie $x1, x2, y1, y2, z1, z2, r1$ u. a. werden leider vom Betriebssystem verwendet und stehen deshalb nicht zur Verfügung. Man muss sich als Anwender hier wirklich die Frage stellen, warum solche Systemvariablen nicht z. B. mit einem Unterstrich beginnen, also z. B. als $\_x1$ notiert werden. Für den ClassPad-Anwender gibt es noch die Möglichkeit, eine andere Schreibweise als Index zu wählen, indem man im Keyboard den Reiter „*Math*“ im abc-Menü anwählt. Dort stehen alle Ziffern in der hoch- und tiefgestellten Schreibweise zur Verfügung und können im Variablennamen verwendet werden. Scrollt man die Zeichenseite hinunter, kann man auch verkleinerte Ziffern auf gleicher Höhe anwählen. Diese Schreibweisen sind mit dem ClassPad-Manager auf einem PC gut zu handhaben, wenn man im *Resizable Mode* arbeitet und sich im CPM-Menü unter dem Reiter *Window* die benötigten Paletten zur Verfügung stellt. Die Auswahl der Paletten bleibt gespeichert, kann also den eigenen Wünschen angepasst werden. Nur wenn man auch das *Keyboard* verwenden will, muss man es bei jedem Neustart zusätzlich aufrufen. Aber wenn man den ClassPad selbst verwendet, ist das Hin- und Herspringen zwischen den Variationen des *Keyboard-Menüs* recht umständlich; deshalb empfiehlt sich hier eine zunächst etwas befremdliche Schreibweise wie $x01$, da man diese sehr zügig und auch tippsicher mit dem ClassPad verwenden kann. Eine ganz andere Möglichkeit ist es noch, sich auf die Variablen x, y und z zu beschränken, wenn die Dimension der Aufgabe dies zulässt. In der Unterrichtspraxis ist es hilfreich, sich auf eine der angebotenen Schreibweisen zu einigen. Das erhöht die Lesbarkeit der *eActivities* von Mitschülern.

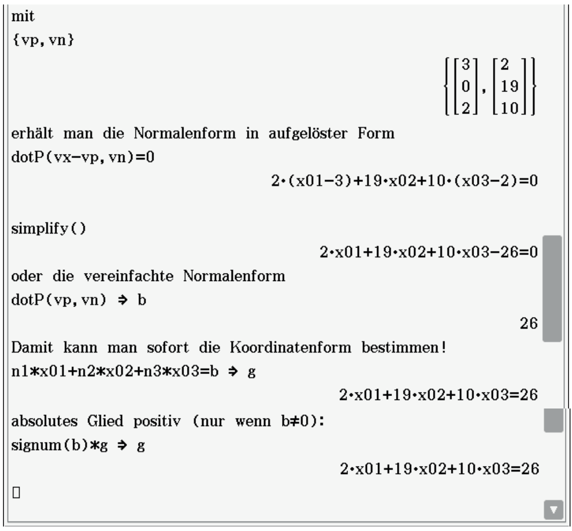
Doch nun zurück zu den Ebenen: Als erstes Beispiel wird die Umrechnung einer Koordinatengleichung in die Normalenform gezeigt („KG-NF“):

KG-NF

Nun betrachten wir als nächstes Beispiel die Umformung von einer Parametergleichung in die (vereinfachte) Normalenform und dann auch gleich in die Koordinatengleichung.





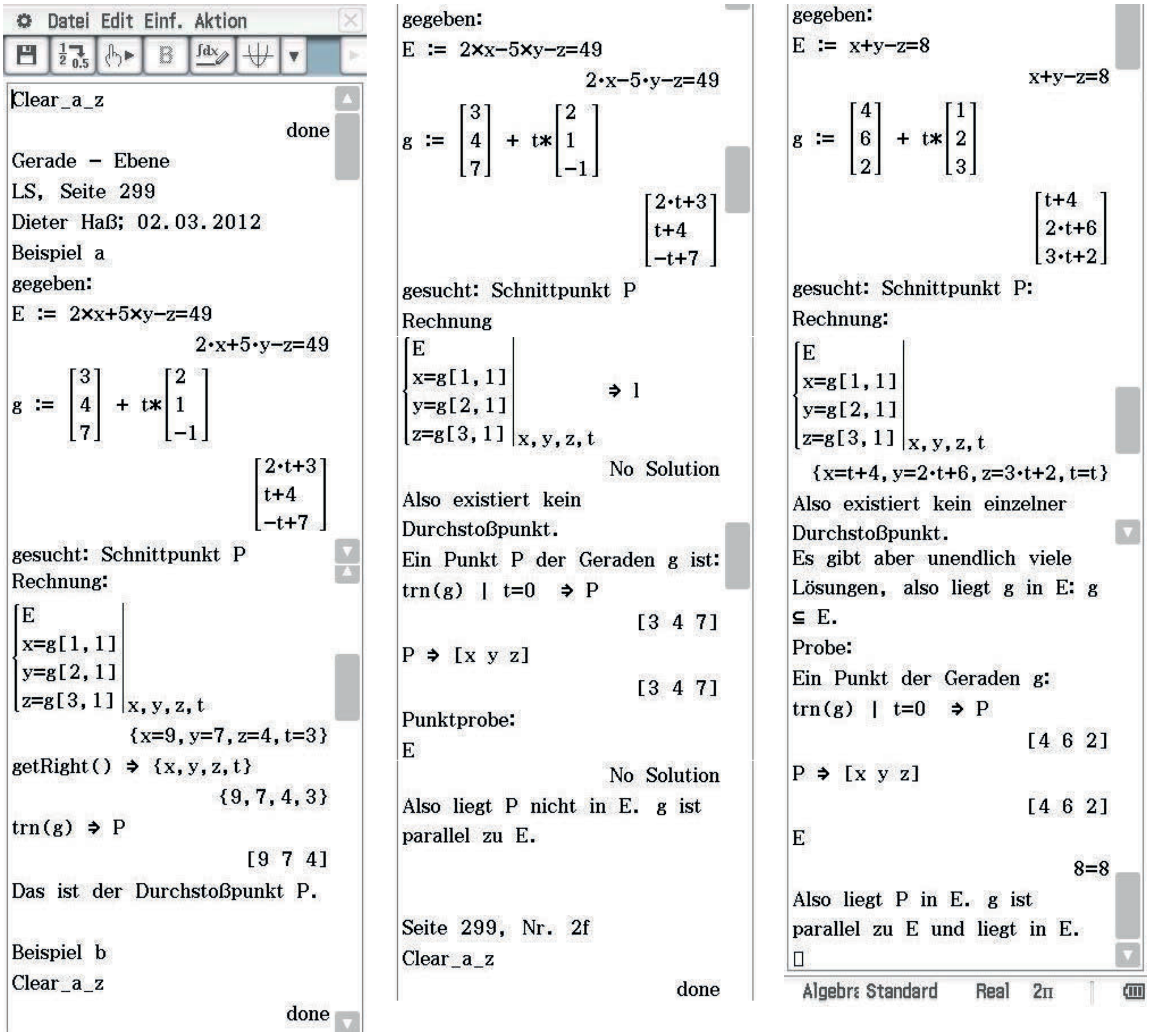


PF-NF

Hierzu sind einige Erläuterungen erforderlich: Zunächst wird die Aufgabe ohne Belegung der Variablen gelöst. Das Ergebnis für $\overrightarrow{vp}$ ist trivial, das für $\overrightarrow{vn}$ nur für theoretische Überlegungen zur Lösbarkeit interessant. Im Zahlenbeispiel ist es zweckmäßig, für $n3$ den Wert 10 zu wählen, damit die Komponenten des Vektors ganzzahlig werden. In der Praxis wird man den Wert für $n3$ oft von Hand einsetzen; in diesem Beispiel wird der günstigste Wert über das kgV der Nenner der vorläufigen Belegungen von $n1$ und $n2$ bestimmt. Nun kann man die Vektoren $\overrightarrow{vp}$ und $\overrightarrow{vn}$ angeben. Gibt man anschließend die Gleichung zur Normalenform ein, wird automatisch die Koordinatengleichung (aufgelöst nach 0) als Rechenergebnis ausgegeben. Zweckmäßiger erscheint es, hier gleich auf die vereinfachte Normalenform zuzugreifen, wobei dann zur besseren Vergleichbarkeit von Ergebnissen noch sichergestellt werden soll, dass das absolute Glied nicht-negativ ist.

Ebene-Gerade

Im dreidimensionalen Raum kann eine Gerade eine Ebene in einem Punkt schneiden oder zu ihr parallel verlaufen, wobei in der letzteren Möglichkeit noch zu unterscheiden ist, ob die Gerade in der Ebene liegt oder keinen gemeinsamen Punkt mit der Ebene hat. Diese drei Möglichkeiten werden in der folgenden *eActivity* zusammengefasst. Grundlage für dieses Beispiel ist das Lehrbuch Lambacher-Schweitzer, S. 299f:



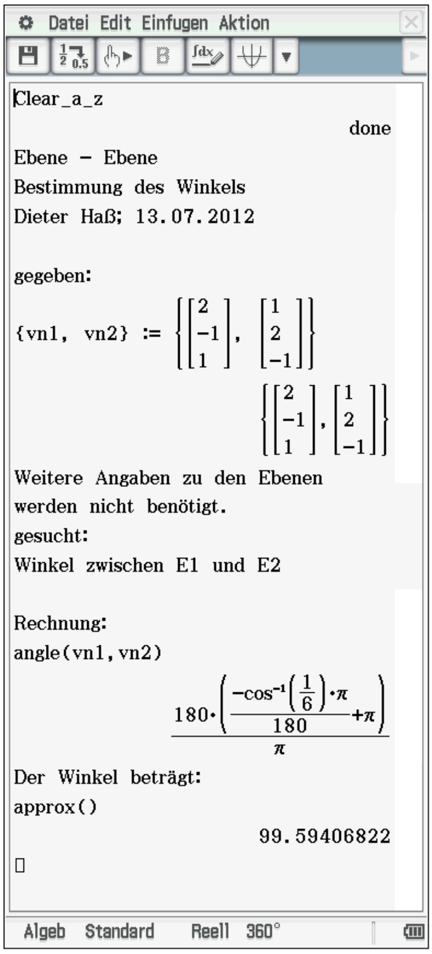
ls_s299

Besonders interessant ist hier die vierdimensionale Gleichung, die nicht nur die Koordinaten des möglichen Schnittpunktes, sondern auch den Koeffizienten t in der Geradengleichung ermitteln lässt. Auf die umständliche Schreibweise der Koordinaten mit $x01, x02$ und $x03$ wurde hier zu Gunsten der einfacheren Schreibweise mit x, y und z verzichtet. Im zweiten Beispiel zeigt der Hinweis *No Solution*, dass auch ein solcher Hinweis zu einem Ergebnis führen kann, nämlich dass kein gemeinsamer Punkt existiert. Liegt die Ebene in der Normalenform vor, empfiehlt es sich, diese in die Koordinatenform umzuwandeln und dann wie oben zu verfahren. Das kann man auch bei gegebener Parameterform so durchführen, doch gibt es da auch direkte Lösungswege, die der Leser als Übung bearbeiten sollte.

Ebene-Ebene

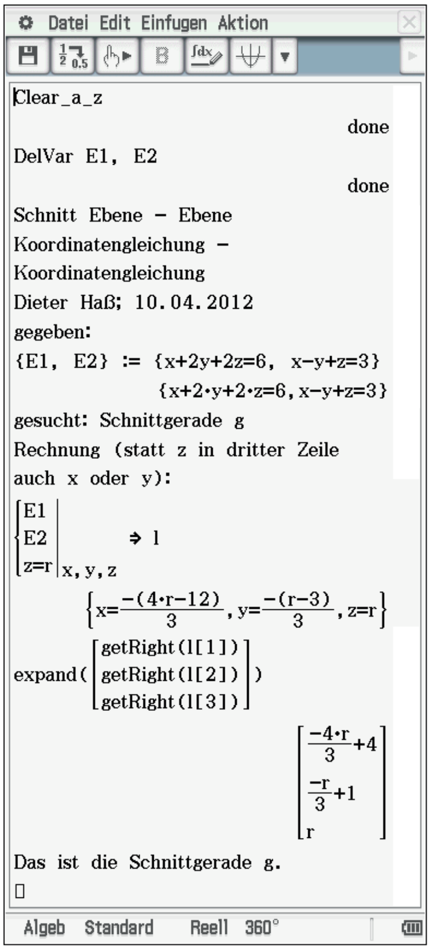
Zunächst soll der Winkel zweier Ebenen zueinander bestimmt werden. Wenn die Normalenvektoren $vn1$ und $vn2$ der Ebenen bekannt sind, kann man den Winkel schnell berechnen. Hierzu ist rechts ein kurzes Beispiel „Ebene-Winkel“ aufgeführt.

Die traditionellen Aufgaben in diesem Bereich beschäftigen sich mit der Berechnung von Schnittgeraden zweier Ebenen.



In dem nächsten Beispiel ergeben sich je nach Wahl der gegeben Werte nicht immer eindeutige Schnittgeraden. Sollte man auf ein *No Solution* treffen, liegen die Ebenen parallel, bei zweidimensionalen Lösungen sind die beiden Ebenen identisch. Hier erfolgt zunächst die Rechnung, wenn beide Ebenen in der Koordinatenform vorliegen.

Die genaue Darstellung der Geradengleichung $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$ in Parameterform mit Stütz- und Richtungsvektor muss noch aus dem Ergebnis der Rechnung abgelesen werden; eine ausführliche Berechnung mit dem ClassPad erscheint hier zu aufwendig. Allerdings sollte man dann noch das Ergebnis ganzzahlig angeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + r' * \begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}$.



Die Bearbeitung dieses Aufgabentypes, bei dem beide Ebenen als Parametergleichung oder eine in der Koordinatenform und die zweite als Parametergleichung vorliegen, soll dem Leser zur Übung überlassen werden.

Vorschläge für Übungen

1. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der drei Ebenen
   $E1: 2x - 3y + z = 4$
   $E2: 3x - 2y + 3z = 5$
   $E3: x + y - z = 1$

2. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreieckes, das als Eckpunkte die Spurpunkte der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ besitzt!

3. Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Ebene
   $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S und den Winkel zwischen der Geraden und der Ebene!

Der etwas andere Einstieg in die Integralrechnung

Arnold Zitterbart

Kurzfassung des Inhalts:
Aus vorhandenen momentanen Änderungsraten lassen sich Rückschlüsse auf die zugrunde liegende Funktion ziehen. Diese Funktion kann symbolisch durch „Aufleiten“ oder numerisch durch ein entsprechendes Rekonstruktionsverfahren gefunden werden.

Klassenstufe(n):
11-12 Jahrgangsstufe

Lernziele:
- Umkehrung elementarer Ableitungsregeln;
- Bedeutung der Integrationskonstante;
- Mit der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten einen benachbarten Funktionswert rekonstruieren.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
- Graphen zeichnen lassen;
- Solve-Befehl;
- Arbeiten mit Listen.

Zeitbedarf:
- Erarbeitungsphase 4 Doppelstunden;
- Vertiefungsphase mit ergänzenden Aufgaben mindestens 5 Doppelstunden.

Sonstige Materialien:
Visualisierung der Zwischenwertsumme mit GeoGebra

Begleittext

Aufgaben zur Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Ableitung haben in der Schulmathematik inzwischen den gleichen Stellenwert wie Flächenberechnungen als Anwendungen des Integrals. Allerdings ist bei den meisten Aufgaben dieser Art sehr leicht erkennbar, von welcher Funktion die Ableitungsfunktion angegeben ist. Das Problem reduziert sich daher schnell darauf, eine geeignete „Aufleitung“ zu finden, mit der dann die entsprechenden Fragen beantwortet werden können. Die additive Konstante der Stammfunktion spielt dann keine Rolle mehr, wenn man aus der momentanen Änderungsrate die Gesamtänderung einer Größe bestimmen will, weil sich diese als Differenz der Stammfunktion an Beginn und Ende des Intervalls berechnet. Diese Aufgabe – Bilden der Stammfunktion und Berechnung der Differenz – kann der Casio ClassPad übernehmen.

Für den Fall, dass das CAS keine Stammfunktion findet, können Näherungsverfahren verwendet werden, von denen sich eines direkt aus der Definition der Ableitung herleiten lässt. Die Idee dabei ist es, dass das Aufsummieren vieler kleiner Veränderungen zur Gesamtveränderung führt. Die geometrische Interpretation dieses Näherungsverfahrens zeigt, dass dabei die Fläche zwischen Kurve und x-Achse berechnet wird, das Integral also auch zur Flächenberechnung verwendet werden kann.

Voraussetzungen
Die Schülerinnen und Schüler kennen die Bedeutung der Ableitung als Steigung der Tangente und als momentane Änderungsrate und beherrschen die Ableitungsregeln für Polynomfunktionen.

Der Begriff der momentanen Änderungsrate sollte an vielen Beispielen verdeutlicht worden sein, insbesondere ist die Geschwindigkeit als momentane Änderungsrate des zurückgelegten Weges behandelt worden.

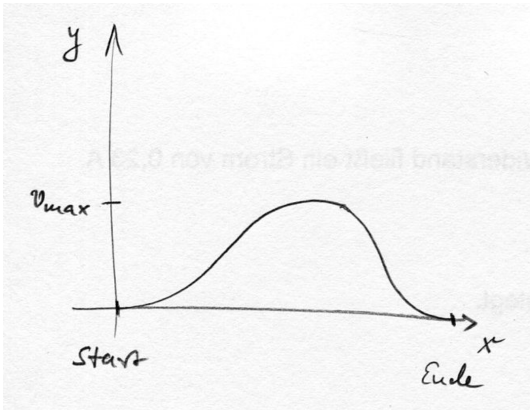
Ziele der Unterrichtseinheit
Ausgehend von Funktionen, die momentane Änderungsraten beschreiben, werden zunächst begrifflich die Größen rekonstruiert, deren momentane Änderungsraten vorliegen. Dann werden die entsprechenden funktionalen Beschreibungen dieser Größen bestimmt.

1. Zum Einstieg eine Fahrt mit dem Motorrad

Für den Einstieg in die Thematik ist eine Wiederholung des Begriffs der momentanen Änderungsrate notwendig. Dafür hat sich in der Unterrichtspraxis bewährt, den Schülerinnen und Schülern die Geschwindigkeit als momentane Änderungsrate des zurückgelegten Weges in Erinnerung zu bringen. Dabei sollte auch die Frage geklärt werden, warum bei einer 10-minütigen Fahrt mit dem Auto die Aussage „Ich fahre gerade mit einer Geschwindigkeit von 45 Kilometern pro Stunde!“ durchaus sinnvoll ist.

Momentan-Geschwindigkeiten können mit einem Fahrtenschreiber aufgezeichnet werden. Die mathematische Auswertung eines derartigen Geschwindigkeitsdiagramms soll zunächst im Fokus der folgenden Überlegungen stehen. Dazu kann z. B. eine Testfahrt modelliert werden. Beim Start ist die Geschwindigkeit $0\,m/s$, dann soll langsam beschleunigt werden, bis eine maximale Geschwindigkeit erreicht ist. Danach wird die Bewegung abgebremst und das Fahrzeug soll sanft zum Stillstand kommen.

Eine qualitative Skizze eines Geschwindigkeits-Weg- (oder Geschwindigkeits-Zeit-) Graphen verdeutlicht dies:



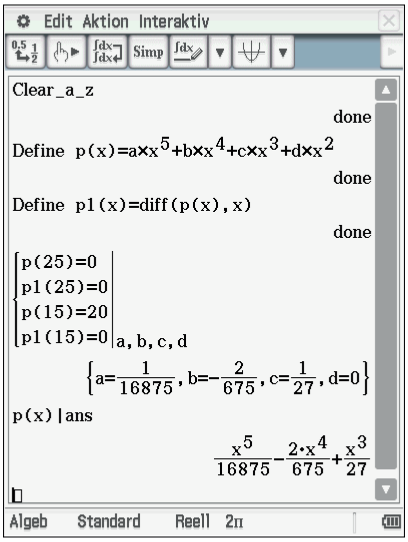
Im Folgenden gehen wir von diesen Daten aus. Als unabhängige Variable nehmen wir die Zeit:

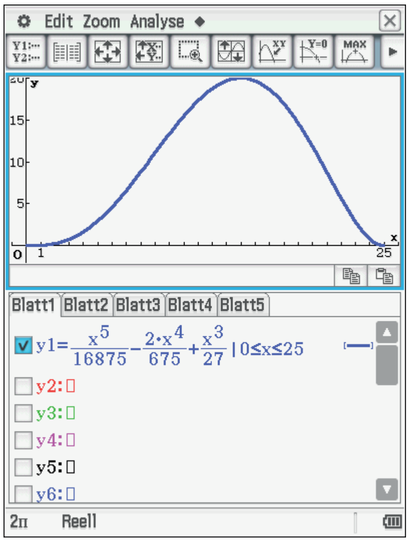
Start aus dem Stand:	$v(0) = 0$
Sanfte Beschleunigung zu Beginn:	$v'(0) = 0$
Maximale Geschwindigkeit 20 m/s nach 15 Sekunden:	$v(15) = 20,\ v'(15) = 0$
Sanfter Stillstand nach 25 Sekunden:	$v(25) = 0, v'(25) = 0$

Je nach zur Verfügung stehendem Repertoire an Funktionen könnte im Unterrichtsgespräch vereinbart werden, dass diese Situation durch ein Polynom 5. Grades modelliert oder dargestellt werden kann:

$$p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f.$$

Wegen $p(0) = 0$ und $p'(0) = 0$ wird man die Definition des Polynoms gleich entsprechend vereinfachen: $p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2$.





2. Die Motorradfahrt wird genauer untersucht

Wir gehen nun von der 1. dargestellten Situation aus und lassen ein Motorrad auf einer Teststrecke fahren. Dabei gehen wir weiter davon aus, dass sich seine Geschwindigkeit für etwa 25 Sekunden näherungsweise durch die Funktion v_M mit

$v_M(x) = \frac{1}{16875} \cdot x^5 - \frac{2}{675} \cdot x^4 + \frac{1}{27} \cdot x^3$ beschreiben lässt.

(x in s nach dem Start, $v_M(x)$ in m/s)

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion v_m.
   Bestimmen Sie die größte Geschwindigkeit.
   Wann bremst das Motorrad am stärksten ab?
   Wann beschleunigt das Motorrad am stärksten?

b) Welchen Weg legt es während seiner Fahrt zurück?

Aufgabenteil a) dient als "WarmUp" und der Wiederholung zur Erreichung von Nachhaltigkeit, kontrolliert aber auch die Gültigkeit der angestrebten Modellierung.

Aufgabenteil b) bringt eine neue Fragestellung. Aus dem Physikunterricht und durch die oben erwähnte einführende Wiederholung des Begriffs der momentanen Änderungsrate ist den Schülerinnen und Schülern bekannt, dass die Geschwindigkeit die momentane Änderungsrate des zurückgelegten Weges ist.
Es geht bei dem Problem also darum, eine Funktion zu finden, deren Ableitung bekannt ist. In der Sprache der Schülerinnen und Schüler: „Ableitung rückwärts" oder „Aufleitung".
Da die Schülerinnen und Schüler mit den einfachen Ableitungsregeln vertraut sind, ist das Finden einer entsprechenden Funktion, deren Ableitung durch $v_{M(x)}$ gegeben ist, einfach:

$$s_M(x) = \frac{1}{16875} \cdot \frac{x^6}{6} - \frac{2}{675} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{27} \cdot \frac{x^4}{4}$$

Bem.: An dieser Stelle erscheint es sinnvoll, den Begriff der Stammfunktion für eine Vereinfachung der Sprechweise einzuführen

Damit kann die Frage der Aufgabe beantwortet werden: $s_M(25) = 241$, d. h. das Motorrad legt in den 25 Sekunden seiner Fahrt ca. 241 m zurück.

In der Unterrichtspraxis kam sehr schnell von Seiten der Schüler der Hinweis, dass die gefundene Funktion für den zurückgelegten Weg durch eine additive Konstante ergänzt werden kann, weil diese beim Ableiten „wegfällt". Diese additive Konstante wurde bislang nicht berücksichtigt, so dass die gefundene Lösung kritisch überprüft werden muss, bzw. die physikalische Bedeutung einer additiven Konstante geklärt werden muss.

Berücksichtigt man diese Konstante, so erhält man:

$$s_M(x) = \frac{1}{16875} \cdot \frac{x^6}{6} - \frac{2}{675} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{27} \cdot \frac{x^4}{4} + C.$$

Es gilt $s_M(0) = C$, d. h. die additive Konstante gibt bei der betrachteten Motorradfahrt den bis zum Zeitpunkt $t = 0$ zurückgelegten Weg an. Bei einem ersten Herangehen an die Problematik des zurückgelegten Weges wird man natürlich davon ausgehen, dass der vom Zeitpunkt $t = 0$ aus zurückgelegte Weg gemeint ist.

Es muss also gelten $s_M(0) = 0$. Dies wird durch die vom ClassPad gelieferte Stammfunktion erfüllt, die Konstante ist in diesem Fall also 0, d. h. die Konstante wird durch die Anfangsbedingung der in Frage stehenden Stammfunktion festgelegt.

3. Ein zweites Beispiel: Dauerregen

Die Niederschlagsrate während eines Dauerregens, d. h. die Regenmenge, die pro Zeiteinheit auf eine bestimmte Fläche fällt, kann messtechnisch durch die Geschwindigkeit eines Turbinenrades erfasst werden, durch das der Regen, der auf die Messfläche gefallen ist, abläuft. Nach einer entsprechenden Normierung, kann dann zu jedem Zeitpunkt angegeben werden, wie viele Liter Wasser pro Zeiteinheit auf einen Quadratmeter gefallen sind. Man erhält dadurch ein Diagramm, dessen Kurvenpunkte durch eine mathematische Funktion beschrieben werden.

Die Niederschlagsrate während eines Dauerregens, der von Montag bis Mittwoch andauerte, soll modellhaft durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}0001 \cdot (x-5) \cdot (x-70)^2$ zwischen ihren beiden Nullstellen beschrieben werden (x in Stunden seit Montag $0:00$ Uhr, $f(x)$ in Litern, die pro Stunde auf einen Quadratmeter fallen).

a) Wann beginnt der Regen, wann hört er auf?
Wann ist der Regen am stärksten?
Wann gehen die Niederschläge am stärksten zurück?

b) Welche Wassermenge geht insgesamt auf jedem Quadratmeter Fläche des betroffenen Gebietes nieder?
Wie viele Stunden nach Beginn des Regens sind 100 Liter Wasser auf einen Quadratmeter gefallen?

c) Fließgewässer, Versickerung usw. tragen zum Wasserabfluss bei.
Wegen der Sättigung des Bodens kann im Laufe der Zeit immer weniger Wasser aufgenommen werden. Die maximal mögliche Wasserabflussrate soll daher durch die Funktion a mit $a(x) = \frac{1}{1500} \cdot x^2 - \frac{1}{10} \cdot x + 5$ modelliert werden, die in dem betrachteten Zeitintervall monoton fallend ist (x in Stunden seit Montag 0:00 Uhr, $a(x)$ in Litern, die pro Stunde aus einem Quadratmeter abfließen).
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem das Wasser nicht mehr vollständig abfließt. Begründen Sie, warum die Überschwemmung beim zweiten Schnittpunkt der Graphen f und a am größten ist. Bestimmen Sie den entsprechenden Zeitpunkt auf Minuten gerundet.
Wie viele Liter stehen dann über einem Quadratmeter?

d) Das ganze Wasser ist erst einige Stunden, nachdem der Regen aufgehört hat, versickert. Wann ist das ganze Wasser versickert?

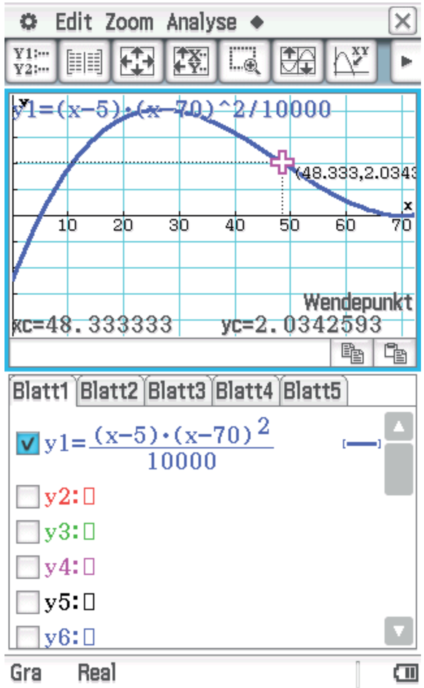
Die Funktion f kann als momentane Änderungsrate der Wassermenge, die in dem betrachteten Zeitraum pro Quadratmeter fällt, aufgefasst werden.
Eine Funktion, von der f die Ableitung ist, bezeichnet man üblicherweise mit dem entsprechenden Großbuchstaben F; d. h. $F'(x) = f(x)$. F heißt „Stammfunktion von f“.

Bearbeitung der Aufgabe mit dem ClassPad

a) Grafische Analyse / Nullstelle liefert eine Nullstelle bei $x = 5$ und $x = 70$;
d. h. der Regen beginnt am Montag um 5:00 Uhr und hört am Mittwoch um 22:00 Uhr auf.

Grafische Analyse / Maximum liefert den Zeitpunkt des stärksten Niederschlags $x \approx 22{,}7$.

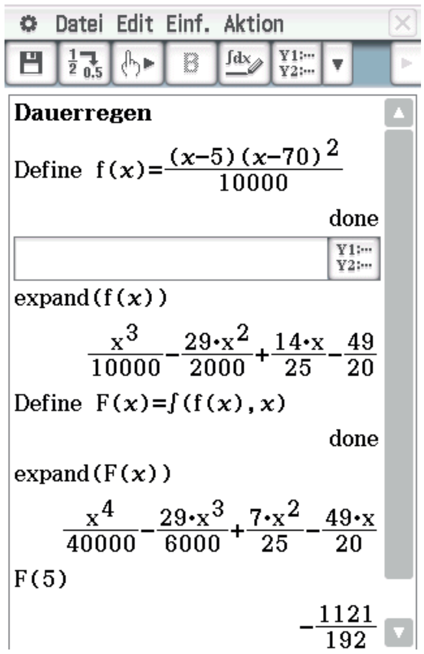
Grafische Analyse / Wendepunkt liefert den Zeitpunkt, an dem der Niederschlag am stärksten zurückgeht
$x \approx 48{,}3$.



b) Da die Funktion f als die momentane Änderungsrate der Wassermenge interpretiert werden kann, die insgesamt auf jeden Quadratmeter Fläche des betroffenen Gebietes niedergeht, ist eine Stammfunktion F gesucht.

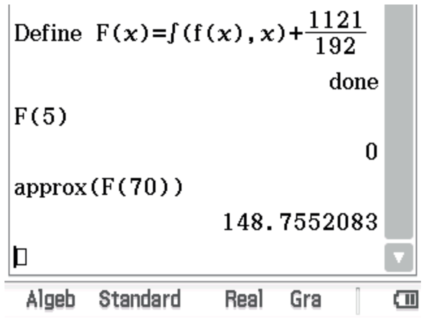
$$f(x) = \frac{1}{10000} \cdot x^3 - \frac{29}{2000} \cdot x^2 + \frac{14}{25} \cdot x - \frac{49}{20}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{10000} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{29}{2000} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{14}{25} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{49}{20} \cdot x$$



Diese Stammfunktion liefert der ClassPad auch mit dem Befehl $\int (f(x), x)$.
Allerdings muss bei diesem speziellen Problem $F(5) = 0$ gelten, weil der Niederschlag montags erst um 5:00 Uhr beginnt.
Es gilt aber $F(5) = -\frac{1121}{192} \approx -5{,}839$.
Die vom ClassPad gelieferte Stammfunktion muss also durch eine additive Konstante korrigiert werden.

Die gesamte Niederschlagsmenge berechnet sich nach der Korrektur der Stammfunktion durch die Konstante, also $F(70) = 149$.
D. h. pro Quadratmeter fielen ca. 149 Liter Wasser.



Analysiert man die bisherigen Rechnungen, so erkennt man:

- Zuerst wurde eine (möglichst leichte) Stammfunktion F gebildet.
- Diese musste noch durch eine additive Konstante korrigiert werden.
- Für die – bezüglich des Problems geeignete – Stammfunktion F^* gilt:
$$F^*(x) = F(x) - F(5).$$
- $F^*(x)$ berechnet die vom Beginn ($x = 5$) bis zum Zeitpunkt x gefallene Niederschlagsmenge.

Das lässt sich verallgemeinern:

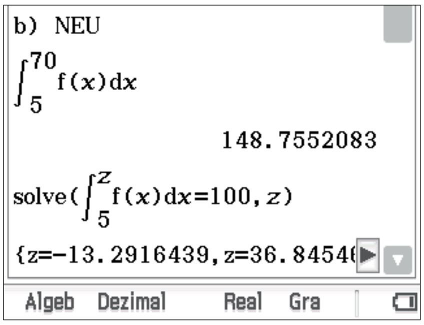
- Zuerst wird eine (möglichst leichte) Stammfunktion F gebildet.
- Diese muss eventuell noch durch eine additive Konstante korrigiert werden.
- Für die – bezüglich des Problems geeignete – Stammfunktion F^* gilt:
$$F^*(x) = F(x) + C.$$
- Für die Gesamtveränderung von F^* zwischen $x = a$ und $x = b$ gilt:
$$F^*(b) - F^*(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

Ergebnis: Will man die Gesamtveränderung einer Größe berechnen, deren momentane Änderungsrate f' bekannt ist, so

- bestimmt man eine Stammfunktion f von f' und
- berechnet $f(b) - f(a)$.

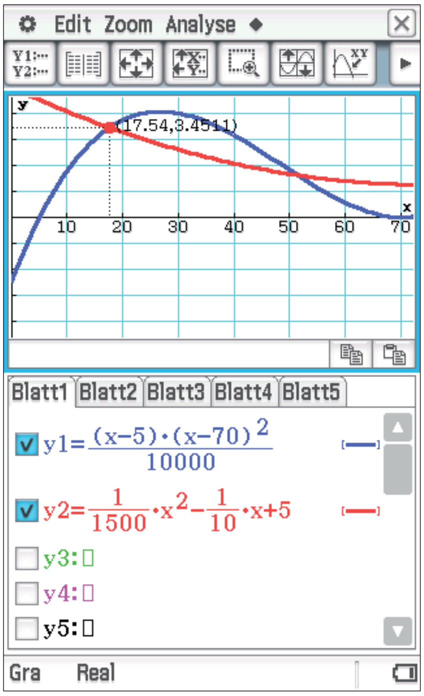
Der ClassPad bestimmt die Gesamtveränderung mit dem Befehl $\int_a^b f'(x)\,dx$ aus dem *2D-Menü*.

Damit lässt sich Aufgabenteil b) einfach lösen:



Nach 37 Stunden – von Montag 0:00 Uhr bis Dienstag ca. 13:00 Uhr – waren 100 Liter Regen pro Quadratmeter gefallen.

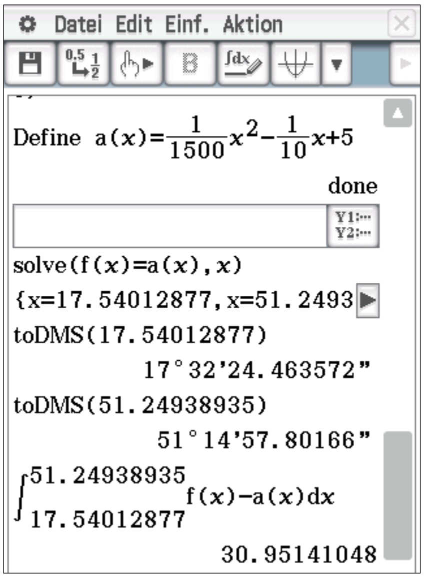
c) Der Zeitpunkt, ab dem das Wasser nicht mehr vollständig abfließt, lässt sich graphisch oder algebraisch bestimmen. Die Überschwemmung beginnt demnach am Montag etwa um 17:30 Uhr.



Ab $x \approx 17{,}54$ ist die Zuflussrate größer als die Abflussrate, d. h. der Wasserspiegel steigt. Nach der zweiten Schnittstelle fließt pro Stunde wieder mehr Wasser ab als hinzukommt. Daher ist der Wasserspiegel zu dem Zeitpunkt, den die zweite Schnittstelle markiert, am größten.

Die Schnittstellen der Graphen werden zur besseren Verfügbarkeit im *Main-Screen* bestimmt.

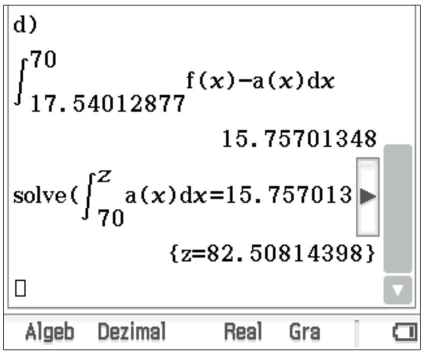
Die größte nicht abgeflossene Wassermenge erhält man als Differenz des Niederschlags und der abgeflossenen Wassermenge in dem Zeitraum von Beginn der Überschwemmung bis zum Zeitpunkt des höchsten Wasserspiegels.



d) Zunächst wird die Wassermenge ausgerechnet, die nach dem Ende des Regens noch abfließen muss.

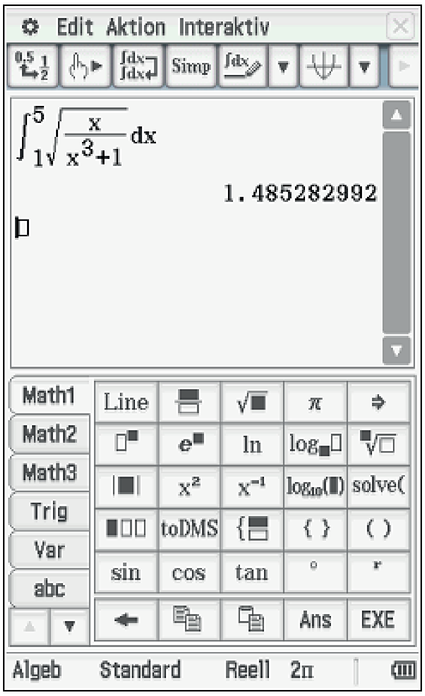
Der Abfluss dieser Restmenge wird durch die Funktion a geregelt.

Am Donnerstag gegen 10:30 Uhr sollte man nach diesem Modell wieder trockenen Fußes durch die Gegend marschieren können.



Weitere Aufgaben dieser Art findet man im Mathematik-Abitur von Baden-Württemberg aus den Jahren 2013, 2011, 2010 und 2007. Die Aufgaben sind im Internet veröffentlicht (z. B. matheAbi-BW.de).

Approximative Berechnung des Integrals



Liefert der ClassPad im *Standard-Mode* eine Dezimalzahl als Ergebnis, so deutet dies darauf hin, dass er ein Näherungsverfahren benutzt hat.

Es stellt sich also die Frage:
„Was arbeitet der ClassPad, wenn er keine Stammfunktion findet?“.
Da auch GTR, die nicht symbolisch rechnen können, Integrale berechnen können, muss es ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung eines Integrals geben. Dies soll im Folgenden beschrieben werden.

Die Ableitung ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

d. h. falls x sehr nahe bei x_0 liegt, gilt $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

bzw. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \left(x - x_0\right)$.

Falls $f(x_0)$ bekannt ist, kann man also für einen nahe bei x_0 liegenden Wert x den Funktionswert $f(x)$ näherungsweise mithilfe der Ableitung berechnen. Wiederholt man das

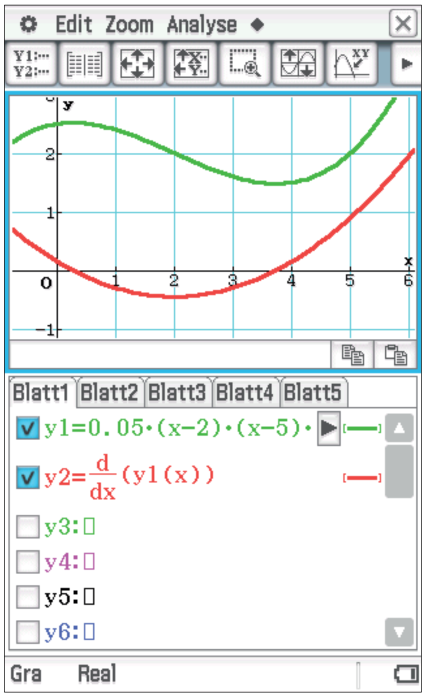
Verfahren, so kann man für weiter entfernte x-Werte schrittweise einen Näherungswert des entsprechenden Funktionswertes bestimmen.

Ob dieses Verfahren funktioniert, soll an dem folgenden Beispiel überprüft werden.

Gegeben ist die Funktion $y1$ mit

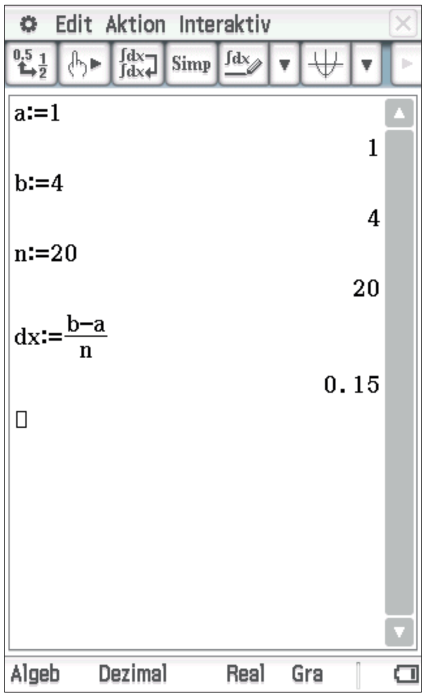
$$y1(x) = 0.05 \cdot (x-2)(x-5)(x+1)+2$$

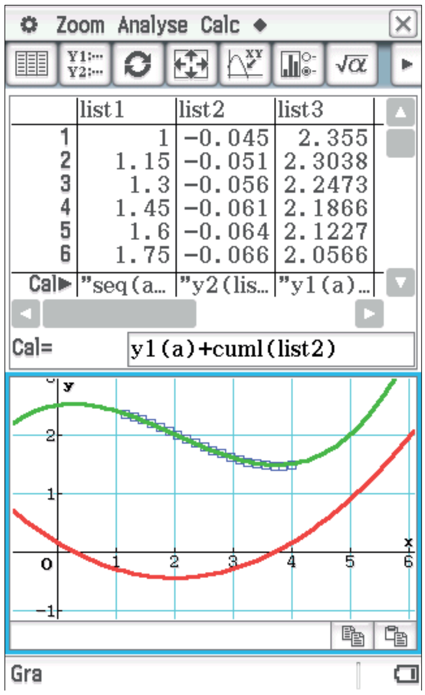
und ihre Ableitung $y2$.



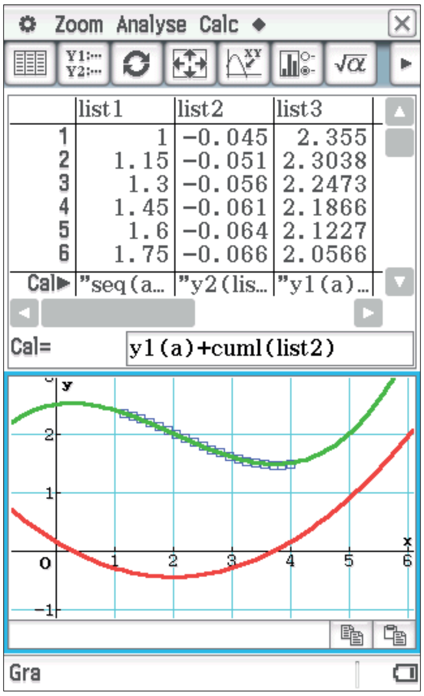
Ausgehend von $x_0 = 1$ sollen mithilfe der Ableitung $y2$ weitere Punkte des Graphen von $y1$ bis $x = 4$ konstruiert werden.

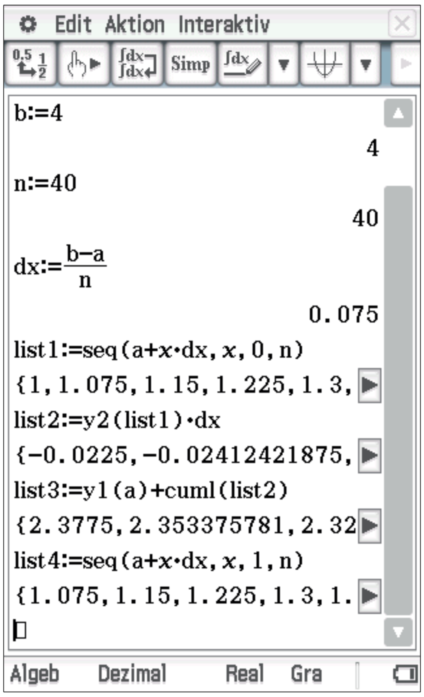
Da aufeinanderfolgende x-Werte möglichst nahe beieinander liegen sollen, wird das Intervall [1; 4] zunächst in 20 Abschnitte unterteilt, für jeden Abschnitt wird die Veränderung des Funktionswertes und damit werden 20 weitere Punkte des Graphen berechnet.

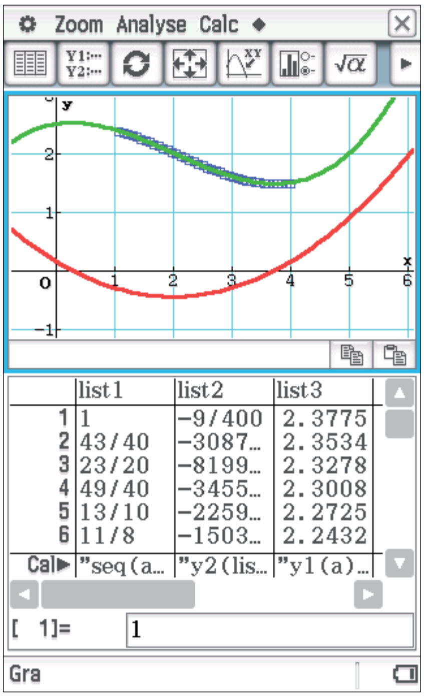




- In der Statistik-Applikation werden mit:
  $$seq(a + x \cdot dx, x, 0, n - 1)$$
  zunächst die Anfänge der jeweiligen Abschnitte in die Liste *list1* gelegt.
- Mit $y2(list1) \cdot dx$ werden die Veränderungen der Funktionswerte in den einzelnen Abschnitten in die Liste l*ist2* gelegt.
- $y1(a) + cuml(list2)$ berechnet in Liste *list3* die y-Koordinaten der weiteren Kurvenpunkte.
- In Liste *list*4 werden schließlich mit:
  $$seq(a + x \cdot dx, x, 1, n)$$
  die passenden x-Koordinaten berechnet.
- Die Kurvenpunkte werden dann als Punkte-Plot dargestellt.
- Schon bei $dx = 0.15$ sieht man, dass mit diesem Verfahren die Originalkurve mithilfe der Ableitung ziemlich gut rekonstruiert wird.
- Arbeitet man in der *Main-Applikation*, so lässt sich durch Vergrößern der Anzahl der Abschnitte erreichen, dass aufeinanderfolgende Kurvenpunkte noch näher beieinander liegen. Man sieht, dass die Rekonstruktion der Originalkurve dabei besser wird.







Ein großer Vorteil des ClassPad besteht darin, dass in diesem *Worksheet* leicht die Anzahl der Abschnitte verändert werden kann und durch Drücken der EXE-Taste sämtliche anschließende Berechnungen durchgeführt werden. Dadurch kann gut visualisiert werden, dass die Approximation mit größer werdender Anzahl der Abschnitte immer besser wird.

Bei diesem Verfahren wurde der Funktionswert an der Stelle $x = b$ näherungsweise mit folgender Formel berechnet: $f(b) \approx f(a) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(a + i \cdot dx) \cdot dx$.

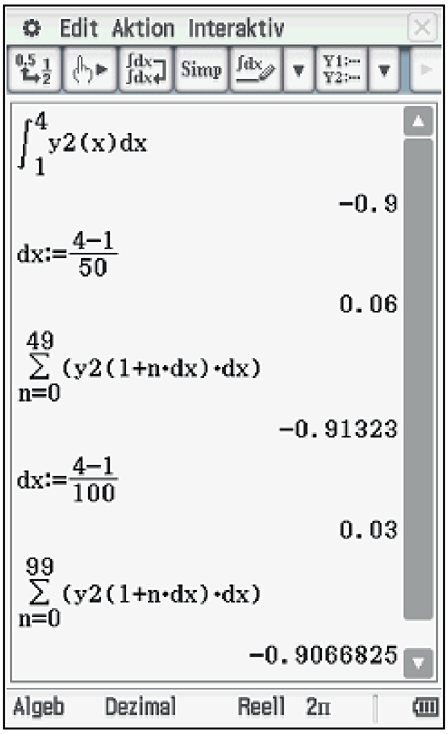
Als Ergebnis erhält man, dass

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)\,dx$$

näherungsweise durch eine Summe von Produkten der Gestalt $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ berechnet werden kann.

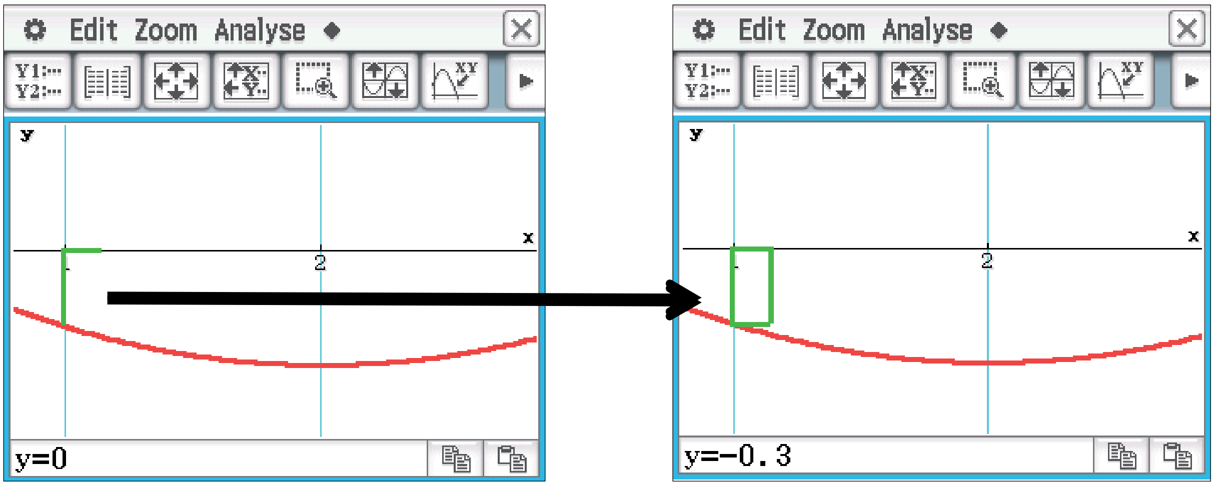
Die Approximation wird umso besser, je kleiner die Abschnitte sind, in die das Intervall zwischen a und b zerlegt wird.

Dies lässt sich mit dem ClassPad nachprüfen:



Geometrische Interpretation des Integrals

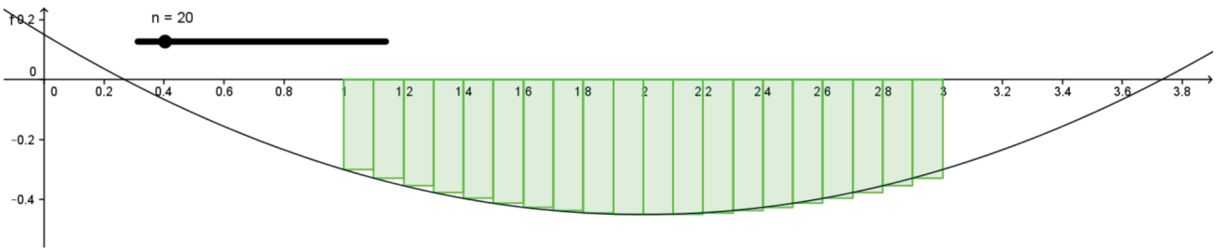
Die geometrische Bedeutung des Produkts $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ kann im Unterricht sehr gut durch eine Handskizze veranschaulicht werden, die im Unterrichtsgespräch vervollständigt wird.



Das Produkt $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ berechnet die Fläche eines Rechteckstreifens über dem betreffenden Teilintervall.

Die Produktsumme berechnet also den Inhalt einer Fläche, die von vielen (sehr schmalen) Rechteckstreifen gebildet wird. Für $\Delta x \to 0$ wird diese Streifenfläche zur Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

Zur dynamischen Veranschaulichung dieses Prozesses eignet sich der Einsatz von TurboPlot oder GeoGebra:



Ergebnis: $\int_a^b f'(x)\,dx$ berechnet auch den Inhalt der Fläche

zwischen dem Graphen von f' und der x-Achse.

analog: $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet den Inhalt der Fläche

zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.

Es folgen Übungsaufgaben zur Flächenberechnung, wobei auch der Begriff des orientierten Inhalts erarbeitet wird. Es bereitet erfahrungsgemäß keine Schwierigkeiten zu verstehen, dass das Integral bei einer Kurve, die unterhalb der x-Achse liegt, einen negativen Wert hat.

Herleitung der Formel für die Krümmung von Funktionsgraphen mit Hilfe der Beispiele $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$

Jens Weitendorf

Kurzfassung des Inhalts:
In dem Artikel wird in einer kurzen Einheit dargestellt, wie man über einen experimentellen Ansatz zur Bestimmung von Krümmungen von Funktionsgraphen an ausgewählten Stellen gelangen kann. Dies geschieht exemplarisch für die beiden genannten Funktionen im Koordinatenursprung. Aus dem experimentellen Ansatz ergibt sich die Möglichkeit, die allgemeine Formel für die Krümmung herzuleiten.

Klassenstufe(n):
Sekundarstufe II

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler ...

- lernen, dass man über einen experimentellen Zugang zu Begründungen mathematischer Sachverhalte gelangen kann;
- erfahren, dass ein CAS verständnisfördernd ist, da man den Rechenaufwand minimieren und leicht die Darstellungsebene wechseln kann.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Keine

Zeitbedarf:
1 - 2 Doppelstunden

Sonstige Materialien:
Keine

Einführung

Für Trassierungsprobleme ist in der Regel die Krümmung einer Kurve von Bedeutung, da damit eine maximale Geschwindigkeit verbunden ist, mit der die Kurve von einem Auto bzw. einem Zug durchfahren werden kann. Die Krümmung ist definiert als Grenzwert des Verhältnisses des Winkels $\Delta\alpha$ zwischen den positiven Richtungen der Tangenten in den Punkten P und P' und der Bogenlänge $\Delta s = |PP'|$ für $P \to P'$:

(1) $\mathrm{K} = \lim\limits_{P \to P'} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$. Für $y = f(x)$ erhält man: (2) $\mathrm{K} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

Der Radius für den Krümmungskreis ergibt sich zu $R = \frac{1}{K}$. Aus dem Obigen geht hervor, dass man zunächst die Formel für die Bogenlänge, die im Nenner des Ausdrucks steht, benötigt. Dies erklärt aber noch nicht die 2. Ableitung im Zähler. Insgesamt wird die Komplexität deutlich.

Die Krümmung des Graphen von $f(x) = x^2$ in $(0/0)$

Beschränkt man sich zunächst auf ein Beispiel, so lässt sich mit Rechnerunterstützung vieles vereinfachen und man kann – zunächst – auf der graphischen Ebene arbeiten. Ich diskutiere im Folgenden die Bestimmung des Krümmungsradius für die Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt (0/0).
Im Geometriebereich des ClassPad wird zunächst eine Normalparabel gezeichnet. Nun geht es darum, an die Parabel einen Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse anzupassen. Dabei ist der Kreis so zu konstruieren, dass der Mittelpunkt auf der y-Achse und ein Randpunkt im Koordinatenursprung liegt. Der Mittelpunkt des Kreises ist so zu verschieben, dass der gesuchte Kreis und die Parabel nur diesen einen Punkt, den Koordinatenursprung gemeinsam haben (Abb. 1).

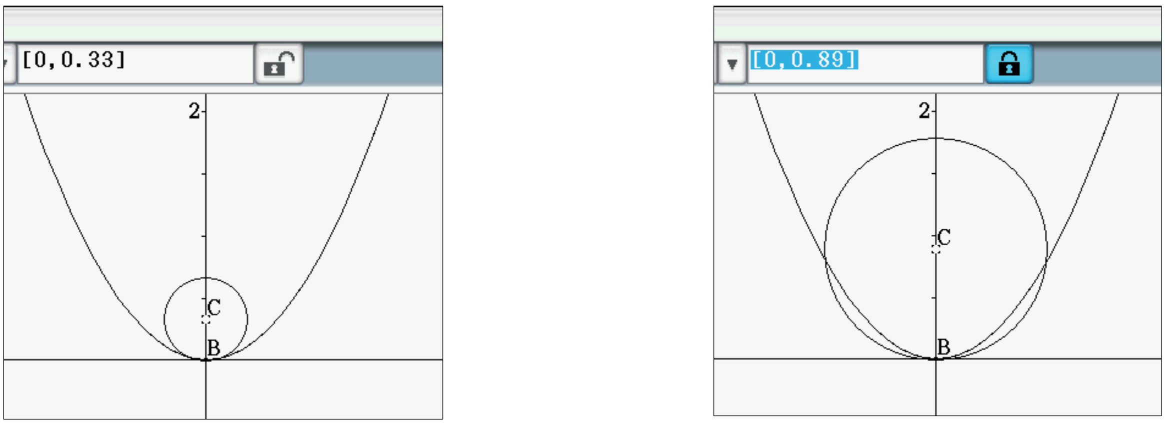


Abb. 1 Anpassung eines Kreises an die Normalparabel im Punkt (0/0)

Der Punkt C (Mittelpunkt des Kreises (s. Abb. 1)) muss also zum einen so verschoben werden, dass Kreis und Parabel nur den einen Punkt B gemeinsam haben, zum anderen müssen die beiden Kurven im Ursprung in ihren Krümmungen zunächst in anschaulicher Weise übereinstimmen, damit der Kreis sich optimal an die Parabel anschmiegt.

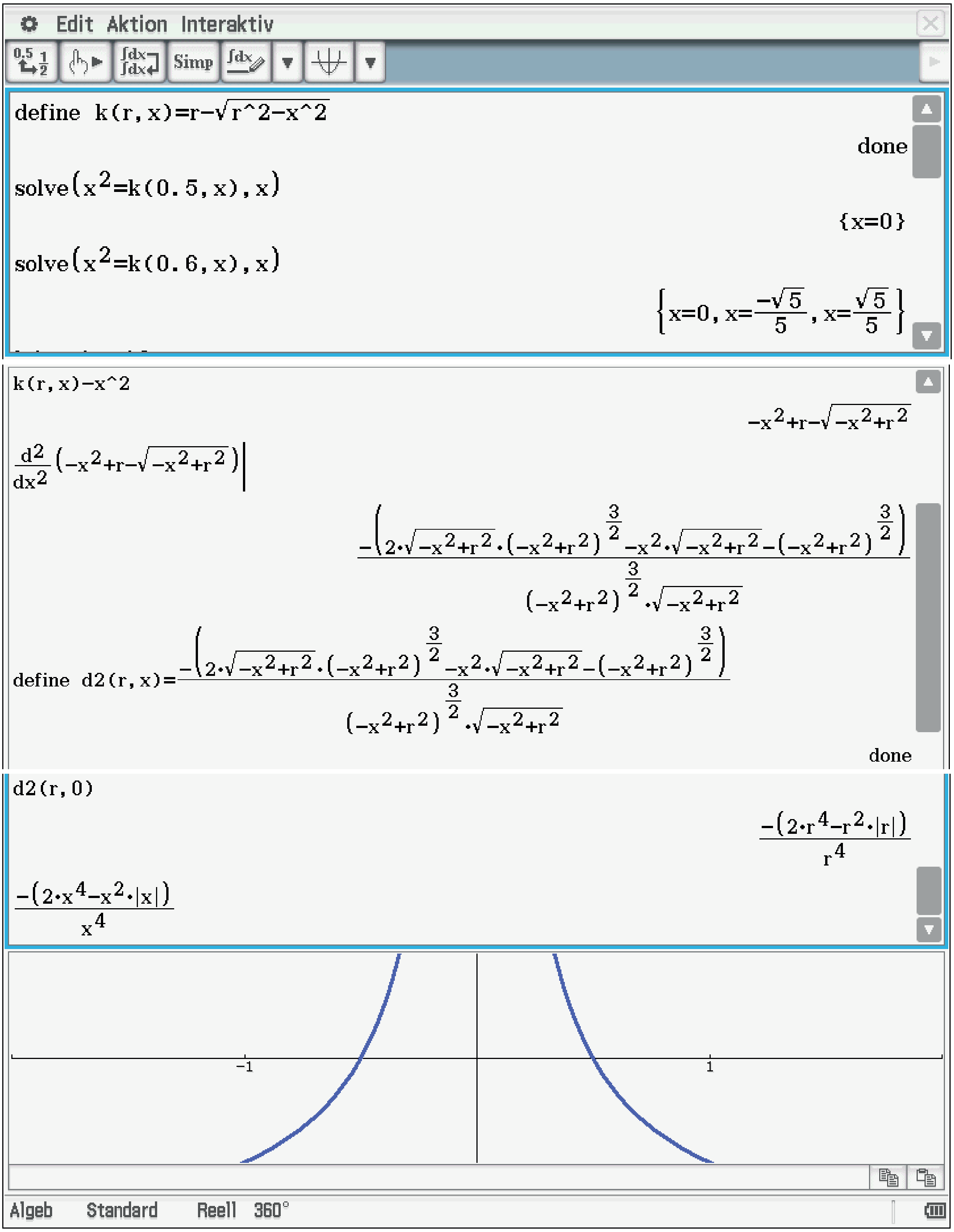
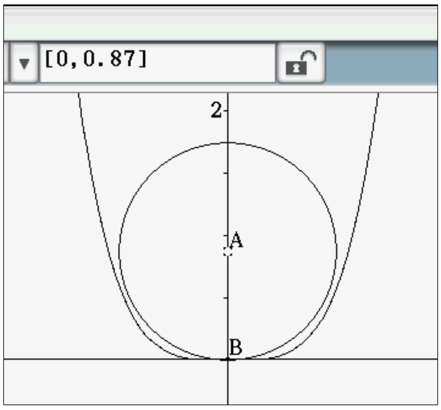


Abb. 2 Berechnung des Krümmungskreises und Graph der zweiten Ableitung der Differenzfunktion von Kreis und Parabel

Zunächst wird eine Funktion definiert, die den unteren Halbkreis beschreibt. In den nächsten Zeilen wird gezeigt, dass es für $r = 0{,}5$ genau eine und für $r = 0{,}6$ drei Schnittstellen zwischen Kreis und Parabel gibt. Im Folgenden wird die Differenzfunktion zwischen unterer Kreishälfte und Parabel definiert. Damit diese Funktion nur genau eine Nullstelle hat, muss die 2. Ableitung an der Stelle $x = 0$ einen positiven Wert haben; die Differenzkurve hat dann eine Linkskrümmung. Deswegen wird die zweite Ableitung dieser Differenzfunktion gebildet und der Wert dieser zweiten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ($d2(r, 0)$) bestimmt. Um den Graphen dieser Funktion darzustellen, muss die Variable r durch die Variable x ersetzt werden (Abb. 2). Die Abbildung 2 zeigt die Abhängigkeit des Krümmungsverhaltens im Koordinatenursprung vom Radius des Kreises; das heißt die Funktion $d2(r, 0)$.
Aus Abbildung 2 ist zu erkennen, dass $r = 0{,}5$ der gesuchte Wert für den Radius ist, da sich genau für diesen Wert das Krümmungsverhalten in $x = 0$ ändert.
Der oben beschriebene Weg zur Bestimmung des Krümmungsradius bietet Schülerinnen und Schülern vor allem durch die Unterstützung durch die dynamische Geometrie-Software die Möglichkeit, ein Verständnis für den Sachverhalt aufzubauen. Das CAS entlastet den Unterricht, da die formalen Umformungen, die in diesem Zusammenhang nicht zentral sind, nicht thematisiert werden müssen.

Die Krümmung des Graphen von $f(x) = x^4$ in $(0/0)$

Wir betrachten als nächstes den Graphen der Funktion $f(x) = x^4$ und interessieren uns für die Krümmung im Punkt (0/0).



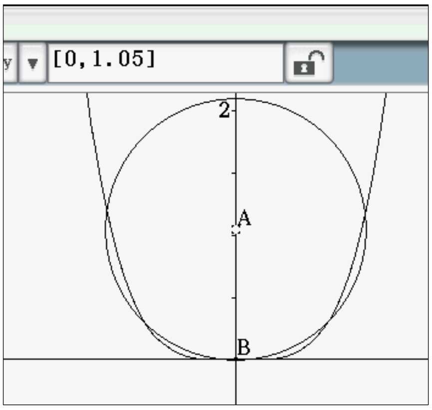


Abb. 3 Anpassung eines Kreises an den Graphen von $f(x) = x^4$ im Punkt (0/0)

Im Vergleich mit Abbildung 1 wird ein deutlicher Unterschied sichtbar. Für kleine Radien gibt es einen gemeinsamen Punkt; für größere in der Regel fünf gemeinsame Punkte; das heißt, es muss einen Radius geben, für den es genau drei gemeinsame Punkte gibt (vgl. Abbildung 4). Wie findet man den Radius des Kreises, wenn es nur einen gemeinsamen Punkt von Kreis und Parabel geben soll?

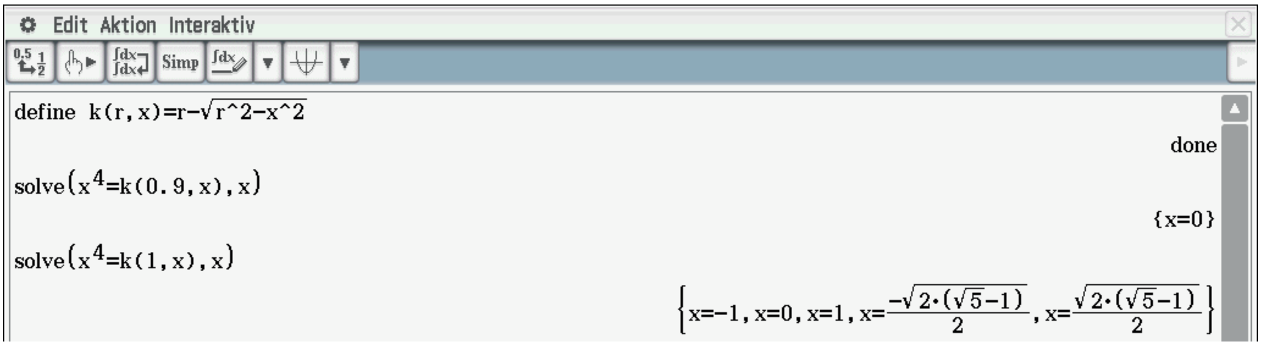


Abb. 4 Erste Annäherung für den Radius, für den es genau 3 Schnittstellen gibt

Man wählt zunächst größere Radien und erkennt aus der grafischen Darstellung (s. Abb. 5), dass es für große Radien 3 Schnittpunkte gibt und dass die beiden Kurven in der Nähe des Koordinatenursprungs nahezu identisch sind.

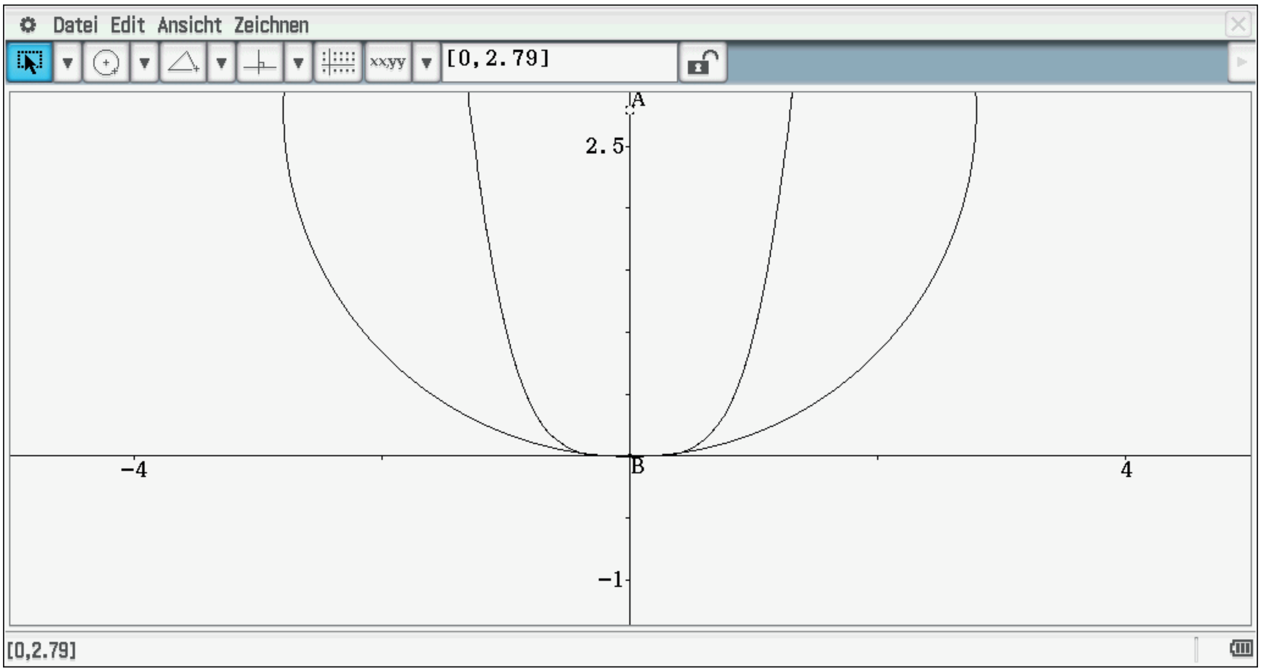


Abb. 5 Darstellung für „große“ Radien

Für eine genauere Betrachtung führen wir die entsprechenden Berechnungen für die Funktion $f(x) = x^4$ durch. Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis.

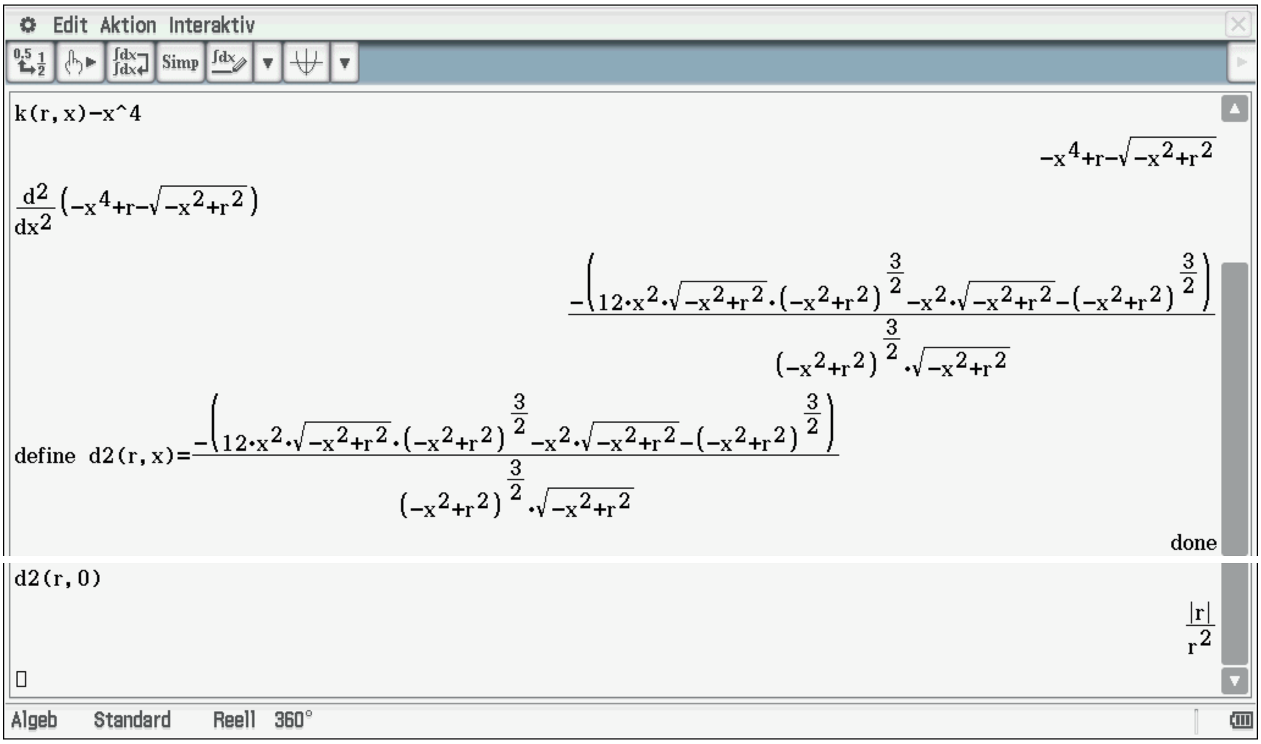


Abb. 6 Diskussion der Differenzfunktion für den Punkt (0/0)

Die 2. Ableitung der Differenzfunktion zeigt, dass es für den Fall $f(x) = x^4$ keine Nullstelle und damit auch keine Änderung des Krümmungsverhaltens gibt. Daraus folgt, dass es keinen Kreis mit einem endlichen Radius gibt, der im Koordinatenursprung die gleiche Krümmung wie der Graph von $f(x) = x^4$ besitzt; bzw. die Krümmung hat im Punkt (0/0) den Wert 0.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wie der Radius zu wählen ist, so dass es genau drei gemeinsame Punkte gibt. Dazu ist es erforderlich, dass in diesen Punkten sowohl die Funktionswerte als auch die ersten Ableitungen übereinstimmen. Zur Beantwortung ist ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen. Dies bietet somit auch die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit des ClassPad II zu testen.

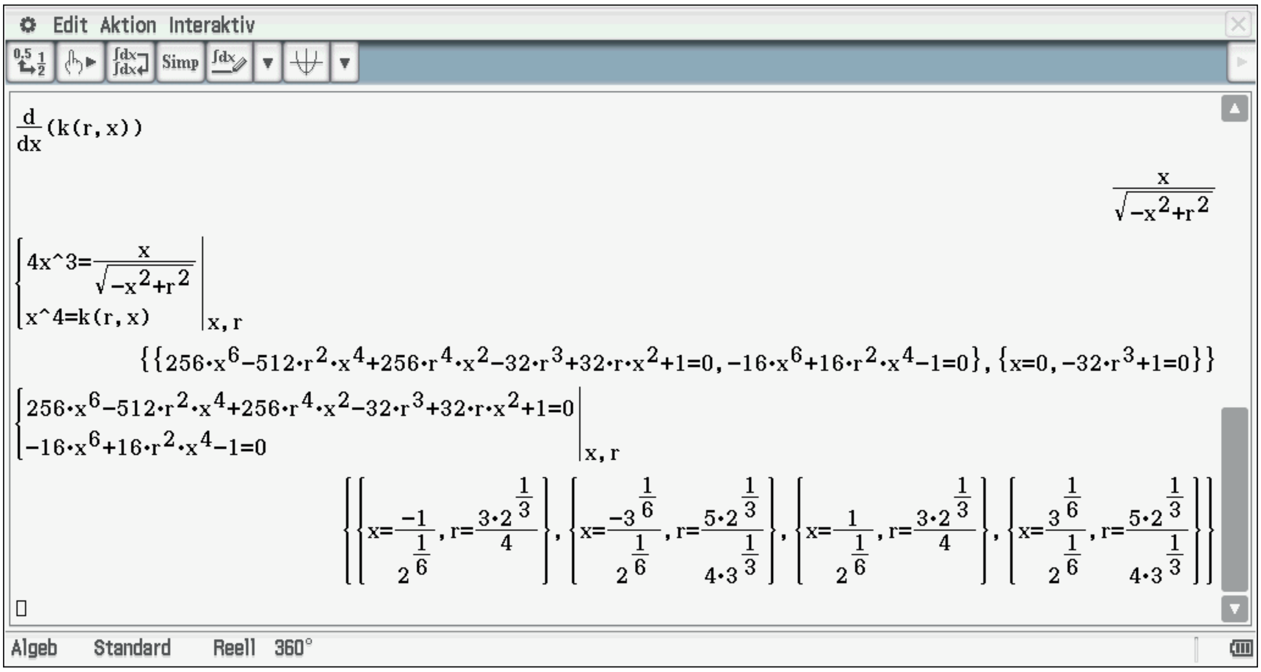


Abb. 7 Bestimmung der 3 gemeinsamen Stellen

Wie die Abbildung 7 zeigt, erhält man die Werte nicht in einem Schritt. Zur besseren Einschätzung sind die gerundeten Werte in Abbildung 8 wiedergegeben. Man erkennt, dass man die vermutete Lösung mit $0{,}9 < r < 1$ erhält. Aus der Abbildung 3 ergibt sich, dass die beiden anderen „Lösungen“ (Abb. 8) als Lösung für das Problem nicht in Frage kommen. Zu bedenken ist, dass das zweite Gleichungssystem aus einem mit einer Wurzelgleichung hervorgegangen ist und es sich deswegen nicht um Äquivalenzumformungen handelt.

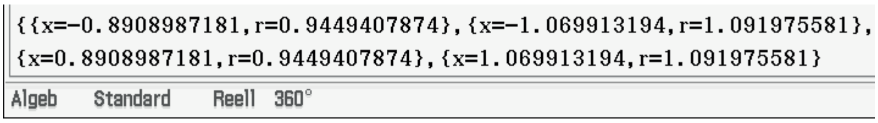


Abb. 8 Übertragung der exakten Werte in Dezimalzahlen

Auf der anderen Seite vermisst man die triviale Lösung $(0/0)$. Der sich für r ergebende Wert, wenn $x = 0$ ist (s. Abb. 7 zweites Lösungspaar für das erste System), kann nicht stimmen.

Herleitung der allgemeinen Formel

Aus den beiden Beispielen lassen sich allgemeine Gleichungen zur Bestimmung des Kreises herleiten. Gesucht sei der Kreis, der sich dem Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion f an der Stelle x_0 optimal anschmiegt. Es ist offensichtlich, dass der Punkt $(x_0/f(x_0))$ sowohl ein Punkt des Funktionsgraphen als auch des gesuchten Kreises sein muss. Das heißt:

$$(x_0 - x_M)^2 + (f(x_0) - y_M)^2 = r^2.$$

Wegen der optimalen Anpassung müssen auch die Steigungen des Kreises und des Funktionsgraphen gleich sein. Für die Bestimmung des Radius im ersten Beispiel haben wir die Nullstelle der 2. Ableitung der Differenzfunktion bestimmt; das heißt auch die 2. Ableitungen müssen übereinstimmen. Zur Vereinfachung sei der Mittelpunkt des Kreises $M(m/n)$.

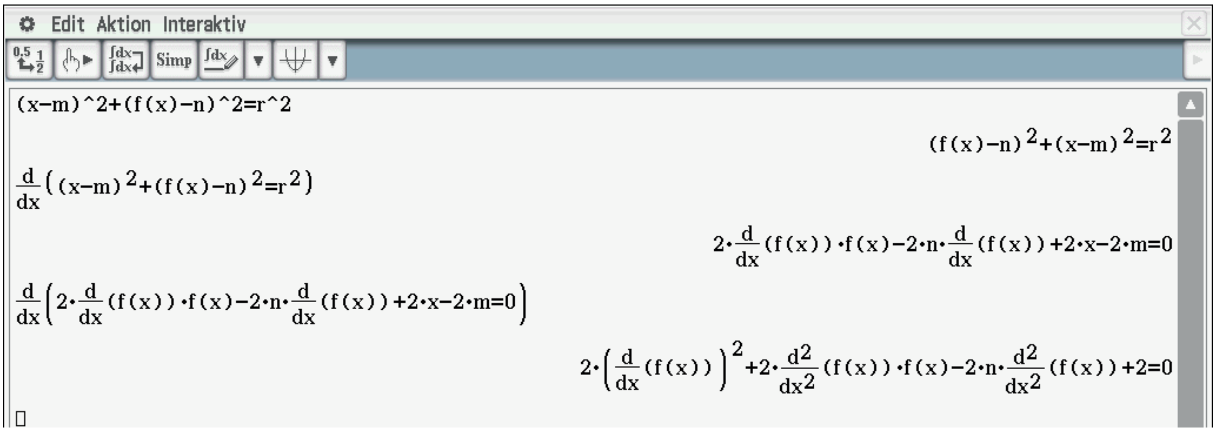


Abb. 9 Bestimmung der Ableitungen

Die letzte Gleichung lässt sich nach n auflösen:

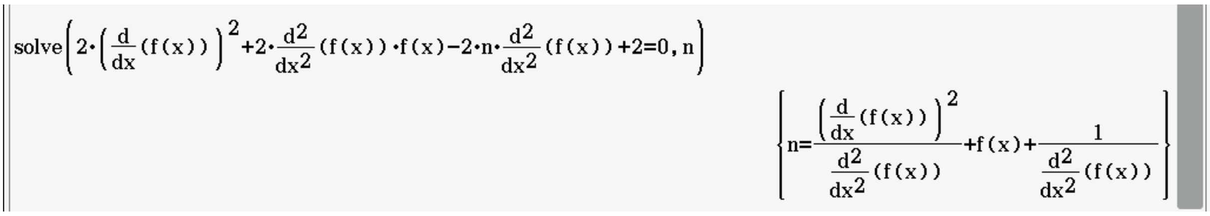
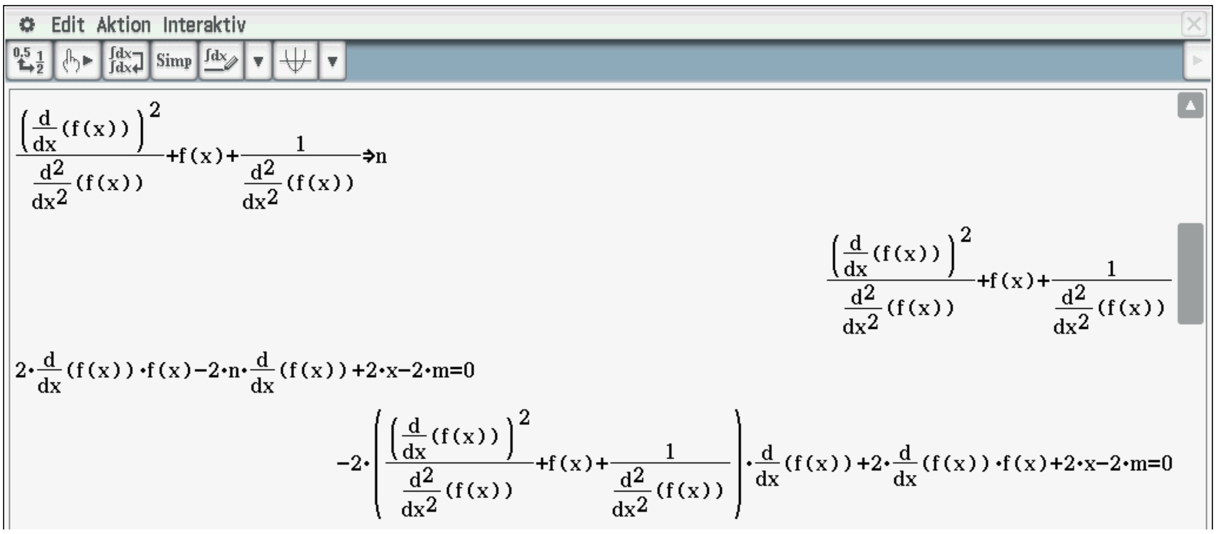


Abb. 10 Bestimmung von y_M

Die weiteren Umformungen lassen sich alle mit dem ClassPad durchführen. Es wird der Wert für n in die zweite Gleichung eingesetzt und diese dann nach m aufgelöst. Die so erhaltenen Werte für den Kreismittelpunkt setzen wir dann in die Ausgangsgleichung ein, um einen Wert für den Radius zu erhalten. Zu beachten ist, dass durch das Auflösen nach der Variablen n noch nicht der entsprechende Wert zugewiesen worden ist. Dies muss mit Hilfe des *Zuordnungspfeils* noch extra geschehen. Die folgenden Abbildungen zeigen die entsprechenden Rechnungen.



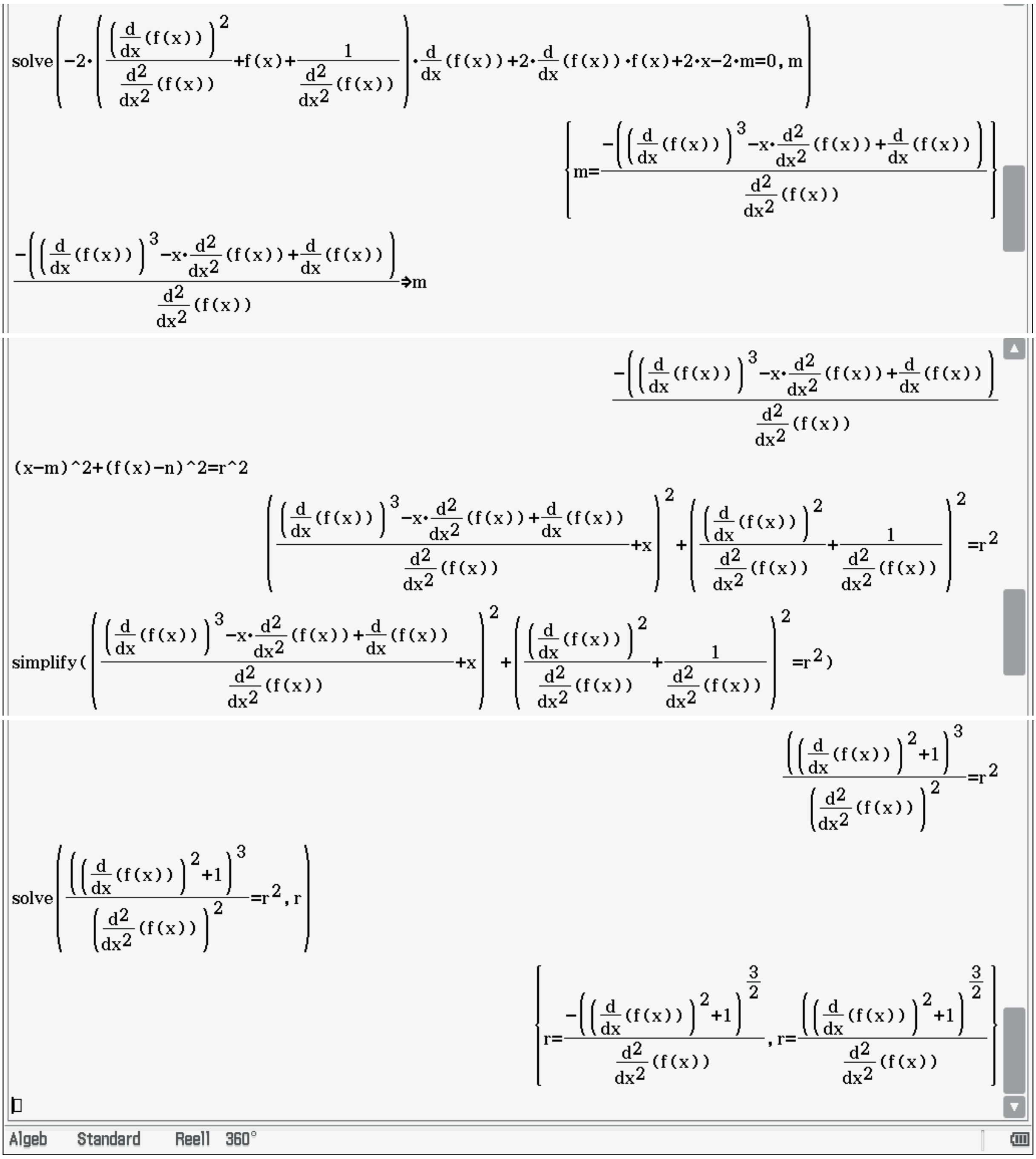


Abb. 11 Bestimmung des Radius

Von den beiden Lösungen aus Abbildung 11 interessiert uns natürlich nur die zweite. Man erkennt den üblichen Ausdruck. Anzumerken ist, dass wir $f''(x) \neq 0$ und die zweimalige stetige Differenzierbarkeit für die Funktion f vorausgesetzt haben.

Literatur

Büchter A., Henn H.-W.(2013): Kurve, Kreis und Krümmung – ein Beitrag zur Vertiefung des Ableitungsbegriffs in: Allmendinger H., Lengnink K., Vohns A. ,Wickel G. Hrsg: Mathematik verständlich unterrichten, Springer Spektrum, Wiesbaden

Untersuchungen zu x^y im Vergleich zu y^x

Jens Weitendorf

Kurzfassung des Inhalts:
In dem Artikel wird ausgehend von der Fragestellung, ob x^y oder y^x größer ist, aufgezeigt, welchen Beitrag der ClassPad zur Klärung dieser Frage beitragen kann. Für Interessierte wird auch der mathematische Hintergrund beleuchtet.

Klassenstufe(n):
Geeignet ist das Thema für gute bzw. sehr gute Mathematikkurse der Sek. II

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler ...
- erkennen, dass man durch einen experimentellen Ansatz zur Lösung von Problemen gelangen kann;
- erfahren an Hand eines Beispiels die Entwicklung einer mathematischen Fragestellung;
- erfahren, dass es zur endgültigen Klärung eines Problems hilfreich sein kann, dass Problem in eine allgemeinere Theorie einzubetten.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Alle erforderlichen Kenntnisse bzgl. der Bedienung des ClassPad werden ausführlich dargestellt. Hilfreich sind Vorkenntnisse:
- beim Zeichnen von Graphen mithilfe des Graphikmenüs;
- zur Veranschaulichung von Daten mit Hilfe des Statistik- und Tabellenkalkulations-Menüs;
- in der Programmierung mit dem ClassPad.

Zeitbedarf:
Der Zeitbedarf hängt davon ab, wie tief in die Problematik eingestiegen werden soll.

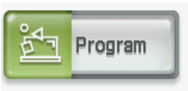
Sonstige Materialien:
Keine

Einleitung

Der Artikel soll Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes des ClassPad aufzeigen. Er bewegt sich inhaltlich an der Grenze dessen, was in der Schule noch behandelt werden kann. Auf der anderen Seite bieten sich aber auch Differenzierungsmöglichkeiten an. Den Ausgangspunkt bildet die Frage, für welche Wertepaare (x, y) $x^y > y^x$ gilt. Für einzelne gegebene Werte ist dies leicht überprüfbar. Es sollen aber alle Paare bestimmt werden, für die die Ungleichung richtig ist. Dies geschieht in einem Wechselspiel zwischen Untersuchungen und Überprüfungen mit dem ClassPad und der Benutzung von mathematischem Hintergrundwissen. Dabei werden neben der Diskussion des Rechnereinsatzes auch mathematische Arbeitsweisen erkennbar.

Ein erster Überblick

Um sich einen Überblick über die Lösungsmenge der obigen Ungleichung zu verschaffen, hilft ein Programm, das in Abbildung 1 wiedergegebenen ist.



Für das Erstellen von Programmen gibt es ein spezielles Modul, das man im Hauptmenü findet. Mit Hilfe solcher Programme lassen sich zum Beispiel Werte erzeugen, die in anderen Modulen des ClassPad weiter verarbeitet werden können. Für die Erstellung eines solchen Programms muss zunächst ein Name gewählt werden; danach gelangt man automatisch in den Editor. Nach der Erstellung kann man diesen mit Hilfe des Symbols verlassen. Die Ausführung wird durch Betätigung von ▶ erreicht.

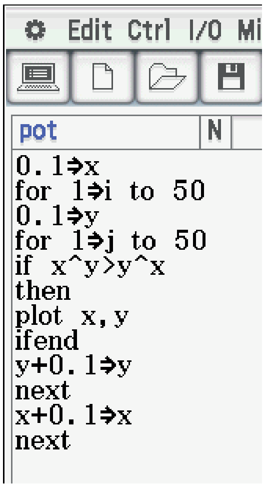


Abb. 1 Programm zur Bestimmung der Punktemenge, für die $x^y > y^x$ gilt

Das Programm ist so aufgebaut, dass die Ungleichung für alle x, y mit $0 < x,\ y \leq 5$ beginnend mit $x = y = 0{,}1$ und einer Schrittweite von 0,1 überprüft wird. Erfüllt ein Wertepaar die Bedingung, wird dies durch einen „Punkt" im Koordinatensystem dargestellt. Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis. Bevor man das Programm laufen lässt, sollte man im *Modul Grafik und Tabelle* über die Schaltfläche einen sinnvollen Bereich einstellen.

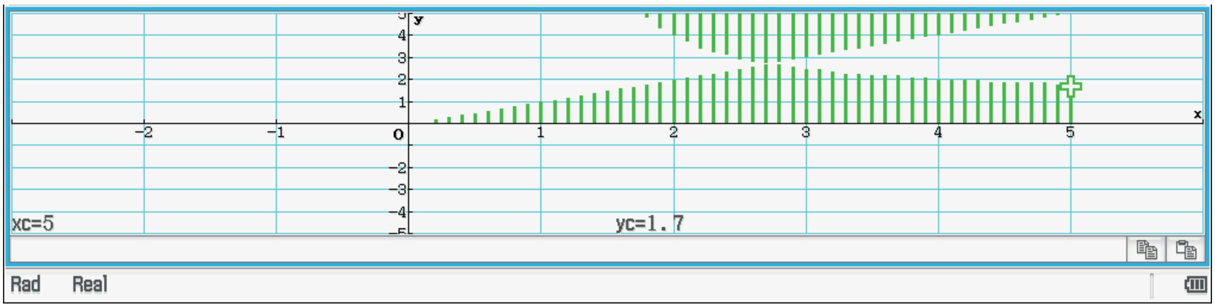


Abb. 2 Wertepaare, für die $x^y > y^x$ gilt

Die erkennbaren Grenzen scheinen zum einen durch den Graphen der Funktion $f(x) = x$ gegeben zu sein, zum anderen durch Wertepaare, die die Gleichung $x^y = y^x$ erfüllen.

Daraus ergibt sich zunächst, dass die Gleichung $x^y = y^x$ in der Regel zwei Lösungen hat. Interessant sind in diesem Zusammenhang zwei Fragen: Für welchen x- bzw. y-Wert gibt es genau eine Lösung und durch welche Funktion ist das Gebiet der Lösungen beschränkt? Diese beiden Probleme sollen im Folgenden diskutiert werden.

Bestimmung des x- bzw. y-Wertes, für den es genau eine Lösung gibt

Durch numerisches sukzessives Probieren kann man vermuten, dass man für $x = e$ genau eine Lösung der Gleichung erhält. Dass es für die Stelle 2,72 sogar eine Lösung im negativen Bereich gibt, soll hier nicht weiter diskutiert werden; im Unterricht ist dies aber natürlich zu klären, um den Schülerinnen und Schülern zu veranschaulichen, dass die Benutzung eines CAS durchaus zu unerwarteten Lösungen führen kann.

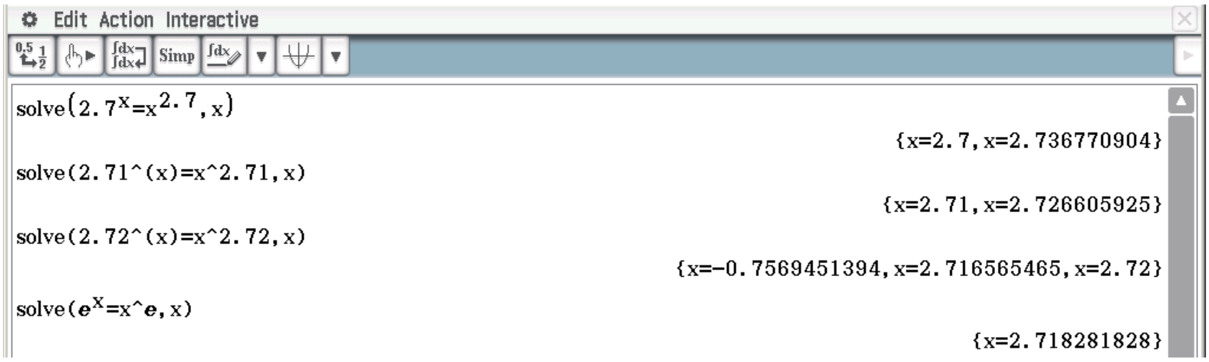


Abb. 3 Beispiele für Lösungen der Gleichung $x^y = y^x$

Zur Bestätigung kann man sich das noch grafisch veranschaulichen. Mit Hilfe der zur Verfügung stehenden analytischen Untersuchungen lassen sich auch im *Grafik-Menü* Schnittpunktberechnungen durchführen. Wie die folgenden Abbildungen zeigen, werden die obigen Ergebnisse bestätigt. Da die Berechnungen deutlich länger dauern, benutzt der ClassPad in diesem Menü offensichtlich ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Schnittpunkts. Vom Graphischen her lassen sich die Schnittpunkte trotz großer Auflösung nicht erkennen. So ist in den Abbildungen in der Regel nur ein Graph zu erkennen. Dies ist der zweite gezeichnete, da der erste überschrieben wird.

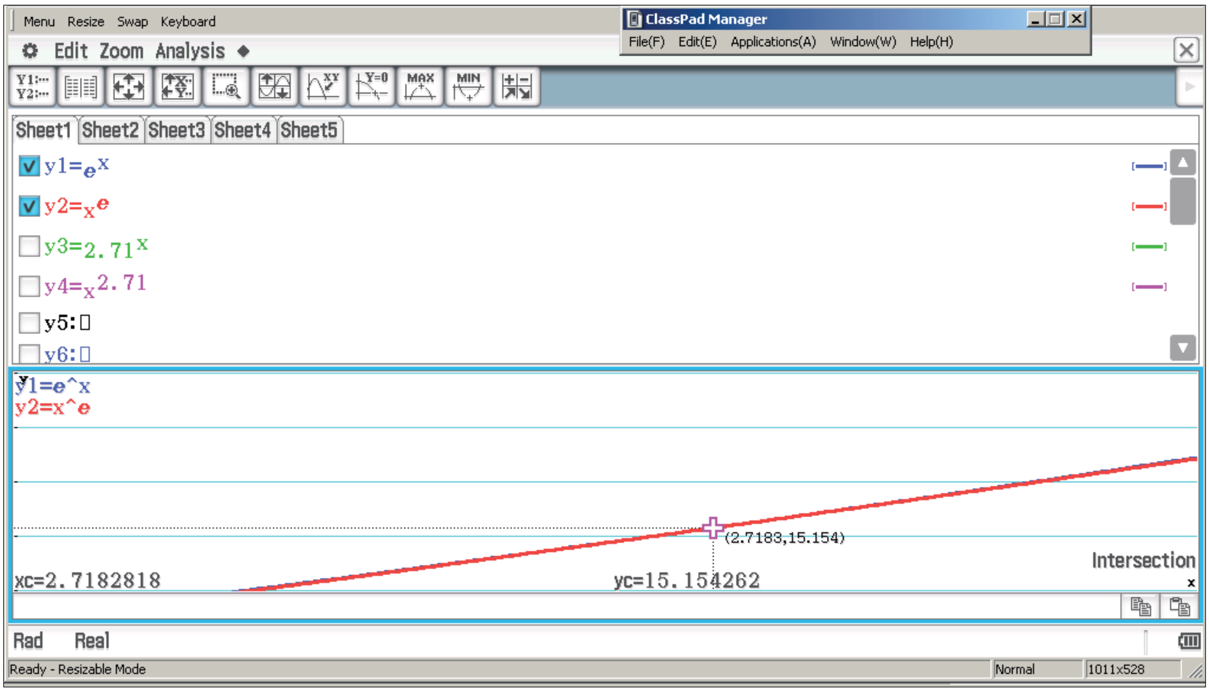


Abb. 4 Graphen der Funktionen $f(x) = e^x$ und $f(x) = x^e$ mit Schnittpunkt

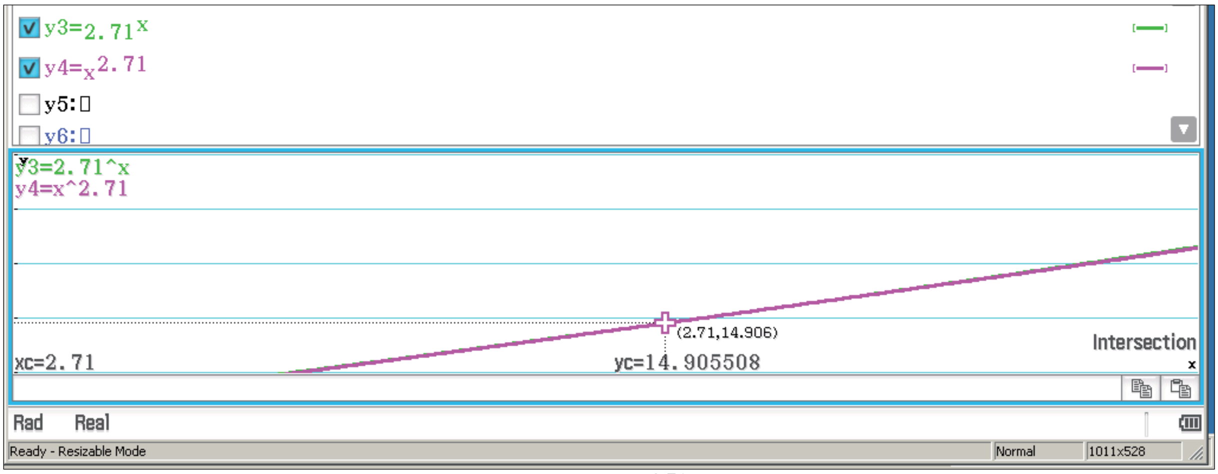


Abb. 5 Graphen der Funktionen $f(x) = 2{,}71^x$ und *f(x)* = $x^{2{,}71}$ mit 1. Schnittpunkt

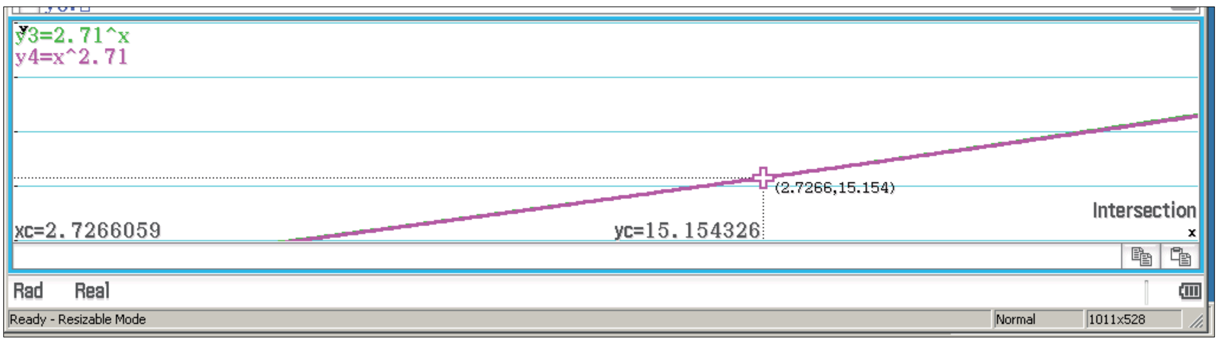


Abb. 6 Graphen der Funktionen $f(x) = 2{,}71^x$ und $f(x) = x^{2{,}71}$ mit 2. Schnittpunkt

Das Obige ist natürlich noch kein Beweis dafür, dass es für $x = e$ genau eine Lösung gibt.

Für den Beweis wird die Lambertsche W-Funktion benötigt. Diese ist implizit durch die Gleichung $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$ gegeben. Die Lambertsche W-Funktion ist also die Umkehrfunktion zu der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$. Wählt man für die graphische Darstellung den

Parametertyp, so lassen sich die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion in einem Schaubild darstellen.

Aus der Abbildung 7 wird deutlich, dass es in der Regel für die Lambertsche W-Funktion für $x < 0$ zwei Werte gibt, das heißt, man muss sich auf einen „Zweig“ beschränken. Die entsprechende Einschränkung erhält man, indem man das Extremum der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ bestimmt.

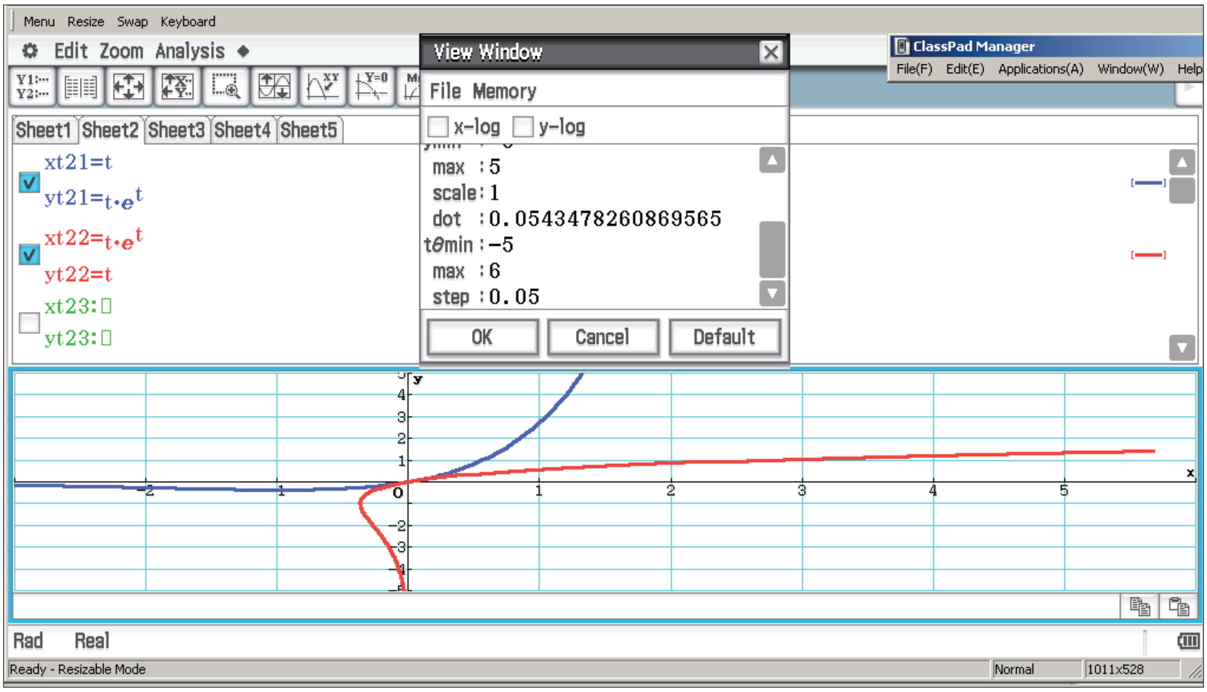


Abb. 7 Graphen von $f(x) = x \cdot e^x$ und der Umkehrfunktion $W(x)$

Für die Erzeugung von Graphen als Parametertyp wählt man diesen Typ entweder über die Einstellung „Typ“ oder über das Untermenü von $\boxed{\text{y=}}$. *Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion erhält man durch Vertauschen der Terme von* x_t *und* y_t.

Abb. 8 Bestimmung des Extremums von $f(x) = x \cdot e^x$

Das Extremum von $f(x) = x \cdot e^x$ ist $E(-1; -1/e)$. Das heißt der kritische Punkt der Lambertschen W-Funktion liegt bei $P(-1/e; -1)$. Es fehlt jetzt noch der Bezug zum obigen Problem. Um diesen Zusammenhang zu erkennen, muss die Gleichung $x^y = y^x$ auf eine Form der Art $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$ gebracht werden. Hierbei hilft einem das CAS leider nicht.

Die im Folgenden dargestellten Umformungen sind für den Unterricht sicher nicht geeignet. Sie werden der Vollständigkeit halber trotzdem angegeben. Für den Unterricht erhält man einen Ansatz durch: $y = k \cdot x$ $(k > 0)$. Dieser Ansatz wird weiter unten durchgeführt.

$$x^y = y^x$$

$$y \cdot ln(x) = x \cdot ln(y)$$

$$\frac{y}{ln(y)} = \frac{x}{ln(x)} \quad bzw. \quad \frac{ln(y)}{y} = \frac{ln(x)}{x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{ln(x)}{x}$$

$$e^{ln(\frac{1}{y})} \cdot ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{ln(x)}{x}$$

Aus der Definition für die Lambertsche W-Funktion folgt dann: $ln\left(\frac{1}{y}\right) = W(-\frac{ln(x)}{x})$ bzw.

$$y = e^{-W\left(-\frac{ln(x)}{x}\right)} = -\frac{x \cdot W\left(-\frac{ln(x)}{x}\right)}{ln(x)} \text{ , da } W\left(-\frac{ln(x)}{x}\right) \cdot e^{W\left(-\frac{ln(x)}{x}\right)} = -\frac{ln(x)}{x}.$$

Wir interessieren uns für den y-Wert für $x = e$

$$y(e) = -\frac{e \cdot W\left(-\frac{ln(e)}{e}\right)}{ln(e)} = -e \cdot W\left(-\frac{1}{e}\right) = -e \cdot (-1) = e.$$

Aus den obigen Berechnungen folgt, dass $P(e; e)$ der gesuchte Punkt ist, das heißt, für $x = e$ gibt es genau eine Lösung.

Bestimmung der zweiten Grenzfunktion

Es sei $y = k \cdot x$ mit $k > 0$. [14]

Durch Variation von k kann man den gesamten 1. Quadranten sozusagen nach Lösungen „durchrastern".

Es sei $x > 0$ und $y > 0$, gesucht sind die Lösungen der Gleichung $x^y = y^x$.

$$x^y = y^x$$

$$\Leftrightarrow y \cdot ln\, x = x \cdot ln\, y$$

$$y = k \cdot x$$

$$\Rightarrow k \cdot x \cdot ln\, x = x \cdot ln(k \cdot x)$$

$$k \cdot x \cdot ln\, x - x \cdot ln(k \cdot x) = 0$$

$$x \cdot (k \cdot ln\, x - ln(k \cdot x)) = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow k \cdot ln\, x - ln(k \cdot x) = 0$$

[14] Diese Idee und die entsprechenden Umformungen stammen von Jürgen Appel

$$\Rightarrow k \cdot ln\, x - (ln\, k + ln\, x) = 0$$

$$k \cdot ln\, x - ln\, x - ln\, k \ = 0$$

$$(k-1) \cdot ln\, x - ln\, k = 0$$

$$(k-1) \cdot ln\, x = ln\, k$$

Fall 1: $k = 1$ ($y = x$, dies ist die zu erwartende erste Lösungsgerade des Problems)

$\Rightarrow (1-1) \cdot ln\, x = ln\, 1$, d. h. *0 = 0* (wahre Aussage für alle $x > 0$)

Fall 2: $k \neq 1$

$(k-1) \cdot ln\, x = ln\, k$

$ln\, x = \frac{ln\, k}{k-1} \Rightarrow x = e^{\frac{ln\, k}{k-1}} = (e^{ln\, k})^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{1}{k-1}}$.

Mit $y = k \cdot x$ folgt: $y = k \cdot k^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{1}{k-1}+1} = k^{\frac{k-1+1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}}$

$x(k) = k^{\frac{1}{k-1}}$ und $y(k) = k^{\frac{k}{k-1}}$.

Aus dem Obigen folgt, dass man diese Grenzfunktion sicher nur indirekt angeben kann. Untermauern lässt sich dieses durch Experimente mit dem *Statistik-Modul*.

Zunächst kann man sich aber Wertepaare der Grenzfunktion grafisch darstellen lassen. Dazu wird das obige Programm ein wenig geändert. (s. Abbildung 9)

```
0.1⇒x
for 1⇒i to 80
0.1⇒y
for 1⇒j to 80
if abs(x^y-y^x)<0.1
then
plot x,y
ifend
y+0.1⇒y
Next
x+0.1⇒x
Next
```

Abb. 9 Programm zum Kennzeichnen der Grenzen

Das Ergebnis zeigt die Abbildung 10. Man erkennt, dass einige Grenzwerte mehrfach belegt sind. Die Werte lassen verschiedene Regressionen zu. Um dieses genauer zu untersuchen, wird eine weitere Änderung vorgenommen, so dass die Punkte nicht geplottet, sondern in Listen gespeichert werden.

Für eine weitere Verarbeitung im Statistik-Modul speichert man die x-Werte am einfachsten in „list1“ und die y-Werte in „list2“. Soll z. B. eine „3“ an 5. Stelle in Liste 1 gespeichert werden, so geschieht das durch: 3 -> list1[5]. Auf diese Listen kann man dann im Statistik-Modul direkt zugreifen, verschiedene Regressionen durchführen oder diese auch mit Hilfe der Import-Funktion in der Tabellenkalkulation weiter bearbeiten.

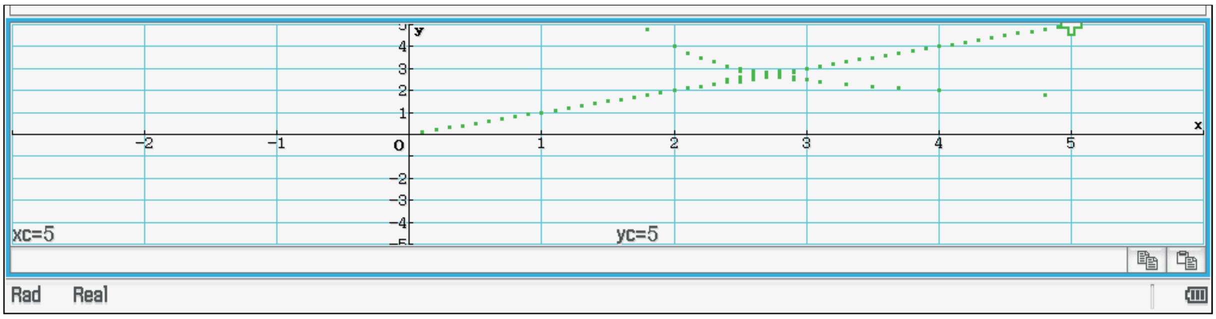


Abb. 10 Die Grenzen des Bereichs für $x^y > y^x$

Die Werte werden noch bereinigt, damit jedem x-Wert nicht mehr als ein y-Wert zugeordnet wird. Die Regressionen lassen sich dann im Statistik-Modul des ClassPads durchführen.

Die folgenden Abbildungen zeigen die „bereinigten Werte“. Weiterhin zeigt sich, dass weder eine *exponentielle* noch eine *Potenzregression* die Werte zufriedenstellend annähern. Die Regression und die dargestellten Werte beziehen sich auf die Listen 4 und 5. Bei der Regression sind die Bezugslisten direkt einzustellen; für die zeichnerische Darstellung muss dies zunächst über das Symbol geschehen. Bzgl. der allgemeinen Potenzregression erkennt man, dass die Punkte im mittleren Bereich gut durch den Graphen angenähert werden.

Bestätigt werden die obigen Feststellungen dadurch, dass man sich die Werte genauer betrachtet. Als allgemeine Potenzfunktion käme sowieso nur $f(x) = \frac{1}{x}$ in Frage, da der Graph achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden im ersten Quadranten sein muss.

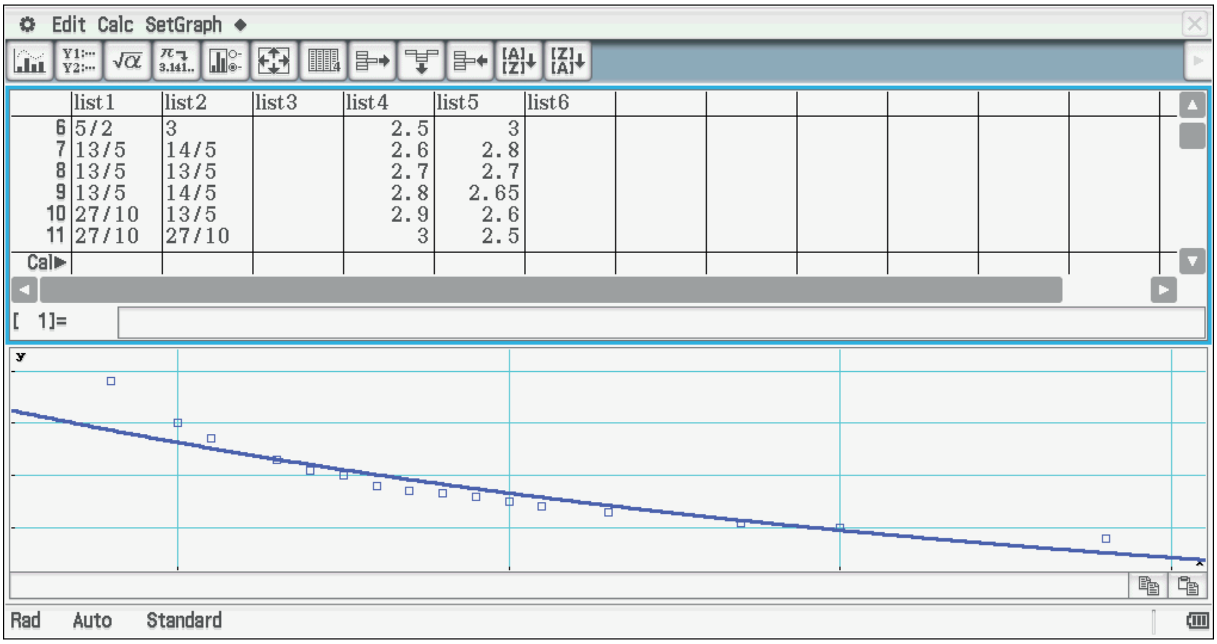


Abb. 11.1 Exponentielle Regression

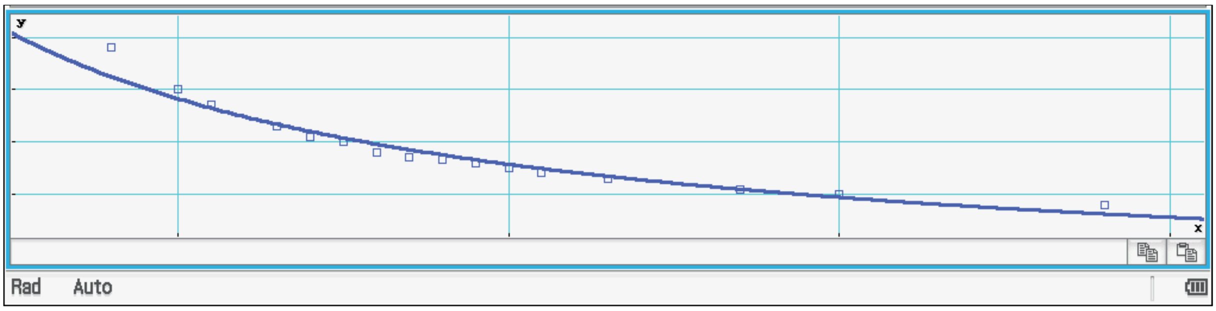


Abb. 11.2 Allgemeine Potenzregression

Berechnung von Werten mit dem Newton-Verfahren

Eine andere Möglichkeit, Wertepaare der Gleichung $x^y = y^x$ zu berechnen, ist zunächst nur mit Hilfe von Näherungsverfahren möglich. Im Folgenden werden Werte mit Hilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise bestimmt. Dazu betrachten wir die Gleichung:

$$f(W) = W \cdot e^W - x = 0.$$

Für das Newton-Verfahren benötigt man die Ableitung (in diesem Fall nach W, x ist als Parameter zu verstehen):

$$f'(W) = (1 + W) \cdot e^W.$$

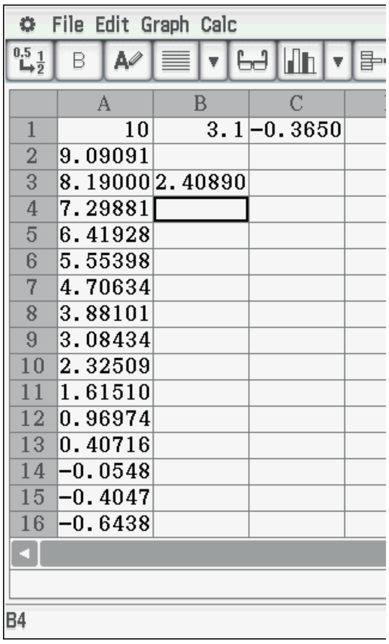
Mit Hilfe des Newton-Verfahrens ergibt sich dann:

$$W_{n+1} = W_n - \frac{f(W_n)}{f'(W_n)}$$

$$W_{n+1} = W_n - \frac{W_n \cdot e^{W_n} - x}{e^{W_n} \cdot (1 + W_n)}$$

$$W_{n+1} = \frac{W_n^2 \cdot e^{W_n} + x}{e^{W_n} \cdot (1 + W_n)}$$

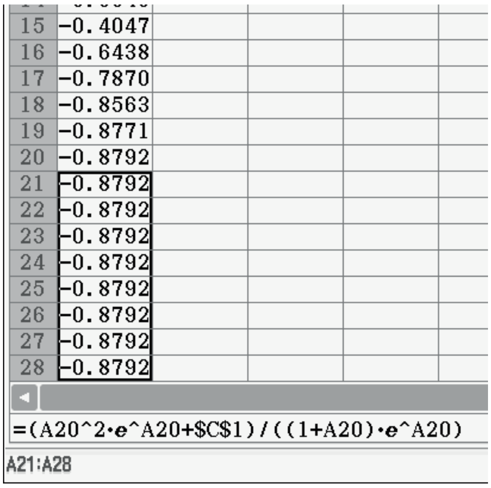
Da $y = e^{-W(-\frac{ln(x)}{x})}$, muss man zunächst x durch $-\frac{\ln(x)}{x}$ ersetzen, dann wendet man das Newton-Verfahren an und erhält den gesuchten y-Wert durch $e^{-W_{n+1}}$. Die Abbildung 12 zeigt die Umsetzung des Prozesses mit Hilfe der Tabellenkalkulation.



	A	B	C
1	10	3.1	−0.3650
2	9.09091		
3	8.19000	2.40890	
4	7.29881		
5	6.41928		
6	5.55398		
7	4.70634		
8	3.88101		
9	3.08434		
10	2.32509		
11	1.61510		
12	0.96974		
13	0.40716		
14	−0.0548		
15	−0.4047		
16	−0.6438		

Abb. 12 Newton-Verfahren zur Berechnung von Lösungen der Gleichung $x^y = y^x$

In der Zelle A1 steht der Startwert. In B1 steht der x-Wert und dessen Umrechnung ist in C1aufgeführt. Das Verfahren wird 20-mal durchlaufen. Den gesuchten y-Wert erhält man dann aus der Zelle B3. Die Konvergenz ist relativ langsam. Lässt man noch einige weitere Näherungswerte bestimmen, so ist die Konvergenz aber gut abzulesen (s. Abbildung 13). Man erkennt, dass sich ab dem 21. Wert im Prinzip nichts mehr verändert.



	A
15	−0.4047
16	−0.6438
17	−0.7870
18	−0.8563
19	−0.8771
20	−0.8792
21	−0.8792
22	−0.8792
23	−0.8792
24	−0.8792
25	−0.8792
26	−0.8792
27	−0.8792
28	−0.8792

Abb. 13 Konvergenz des Newton-Verfahrens

Das Verfahren zur Berechnung ist so aufgebaut, dass durch die Veränderung des x-Wertes (B1) die anderen Werte automatisch angepasst werden. So lassen sich leicht Untersuchungen in Bezug auf den x-Wert und den Anfangswert durchführen.

So ergibt sich zum Beispiel für $x = 2$ nicht der gewünschte Wert $y = 4$, sondern $y = 2$, was natürlich auch richtig ist. Für $x = e$ ist die Konvergenz noch deutlich langsamer, was aber natürlich wegen des Extremums von $x \cdot e^x$ an der Stelle $x = -1$ verständlich ist. Wählt man einen anderen Anfangswert ($W_0 = 0$), so ist die Konvergenz deutlich schneller.

	A	B	C
1	0	4	-0.3466
2	-0.3466		
3	-0.5663	2	
4	-0.6684		
5	-0.6919		
6	-0.6931		
7	-0.6931		
8	-0.6931		
9	-0.6931		

Abb. 14 Konvergenz des Newton-Verfahrens für $W_0 = 0$ und $x = 4$

Wendet man das Newton-Verfahren auf mehrere Werte an, so erkennt man, dass das Verfahren jeweils gegen den „unteren" Wert konvergiert (s. Abb. 15). Die Abhängigkeit zwischen Anfangs- und Grenzwert soll an dieser Stelle nicht weiter diskutiert werden.

In der ersten Zeile stehen die *x*-Werte und in der zweiten die jeweils transponierten. Als Anfangswert wurde jeweils 0 gewählt. Die Zeilen 12 und 13 geben die gesuchte Funktion wider.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3
2	-0.3121	-0.3378	-0.3533	-0.3621	-0.3665	-0.3679	-0.3671	-0.3650	-0.3618	-0.3579	-0.3536	-0.34
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	-0.3121	-0.3378	-0.3533	-0.3621	-0.3665	-0.3679	-0.3671	-0.3650	-0.3618	-0.3579	-0.3536	-0.34
5	-0.4784	-0.5428	-0.5848	-0.6099	-0.6227	-0.6266	-0.6245	-0.6181	-0.6089	-0.5978	-0.5857	-0.57
6	-0.5268	-0.6271	-0.7034	-0.7548	-0.7829	-0.7921	-0.7871	-0.7728	-0.7527	-0.7295	-0.7051	-0.68
7	-0.5306	-0.6415	-0.7388	-0.8181	-0.8703	-0.8891	-0.8788	-0.8505	-0.8145	-0.7771	-0.7411	-0.70
8	-0.5306	-0.6419	-0.7419	-0.8322	-0.9073	-0.9424	-0.9224	-0.8761	-0.8277	-0.7836	-0.7444	-0.70
9	-0.5306	-0.6419	-0.7419	-0.8329	-0.9158	-0.9703	-0.9363	-0.8791	-0.8283	-0.7838	-0.7444	-0.70
10	-0.5306	-0.6419	-0.7419	-0.8329	-0.9163	-0.9842	-0.9379	-0.8792	-0.8283	-0.7838	-0.7444	-0.70
11												
12	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3
13	1.7	1.9	2.1	2.3	2.50000	2.67577	2.55472	2.40894	2.28944	2.18970	2.10516	2.032
14												
15												
16												

Abb. 15 Das Newton-Verfahren für mehrere Werte

Es wurde bisher gezeigt, dass man die gesuchte Funktion nicht in geschlossener Form angeben kann. Es ist aber die Parameterdarstellung bekannt, die dann natürlich auch graphisch darstellbar ist.

$$x(t) = e^{\frac{ln(t)}{t-1}} \ und \ y(t) = t \cdot e^{\frac{ln(t)}{t-1}}$$

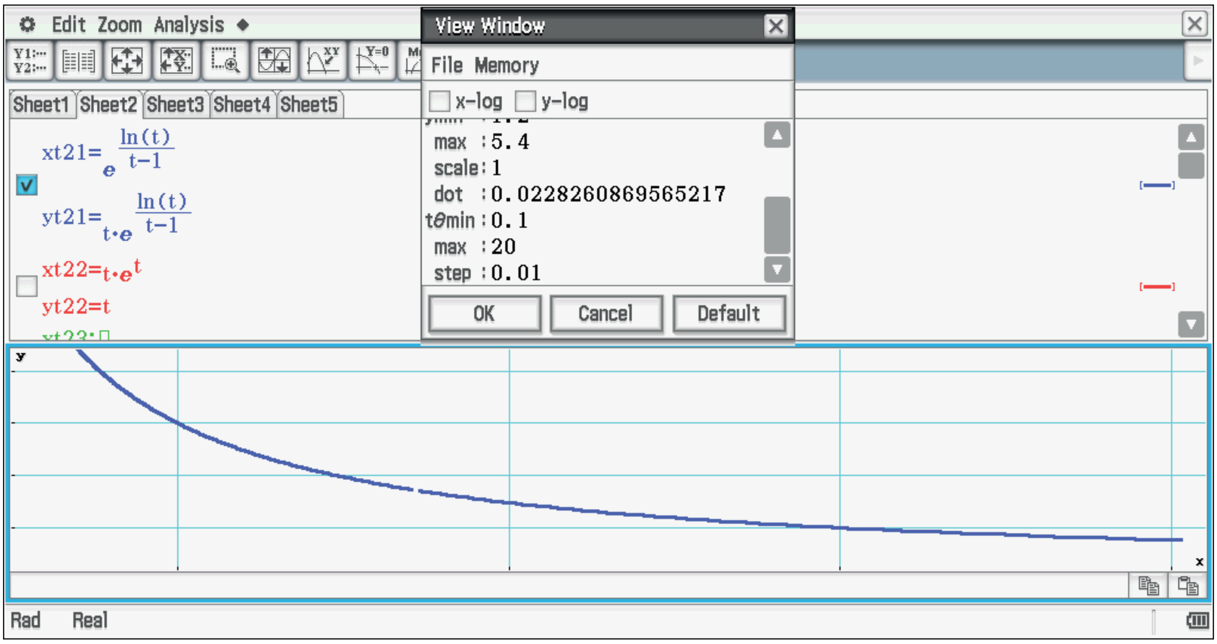


Abb. 16 Darstellung der Grenzfunktion mit den Einstellungen für den Parameter

Auf den ersten Blick vermittelt sich einem der Eindruck, dass nur $y = t \cdot x$ für $x = e^{\frac{ln(t)}{t-1}}$ gilt. Zu berücksichtigen ist dabei aber natürlich, dass sich kein linearer Zusammenhang zwischen x und y ergibt, da die x-Achse ebenfalls einer Abbildung unterliegt. Des Weiteren erkennt man die Definitionslücke für $t = 1$. Die 330-Version des ClassPad hat diese Lücke einfach ignoriert. Ein entsprechend merkwürdiges Bild ergibt sich, wenn man mit Hilfe der Tabellenkalkulation des 330 die Werte für $t = 1$ bestimmt.

Datei Edit Graph Calc

	A	B	C	D
1	0.1	12.915	1.2915	
2	0.2	7.4767	1.4953	
3	0.3	5.5843	1.6753	
4	0.4	4.6050	1.8420	
5	0.5	4	2	
6	0.6	3.5861	2.1517	
7	0.7	3.2835	2.2985	
8	0.8	3.0518	2.4414	
9	0.9	2.8680	2.5812	
10	1	1	1	
11	1.1	2.5937	2.8531	

Abb. 17 Funktionswerte für t (Spalte A), $x = e^{\frac{ln(t)}{t-1}}$ (Spalte B) und $y = t \cdot e^{\frac{ln(t)}{t-1}}$ (Spalte C). Version ClassPad 330

Der für $t = 1$ angegebene Wert kann nicht richtig sein. Der ClassPad II bzw. die entsprechende Managerversion geben für die Stelle $t = 1$ jeweils den Hinweis „Undefiniert“. Dass eine stetige Ergänzung möglich ist zeigt der Graph. Die Abbildung 18 zeigt die Ergebnisse einer genaueren Untersuchung.

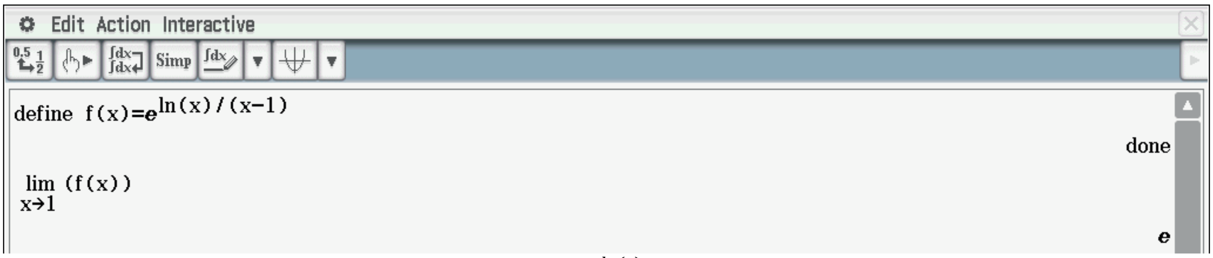


Abb. 18 Stetige Ergänzung für die Funktion $f(x) = e^{\frac{ln(x)}{x-1}}$ an der Stelle $x = 1$

Der obige Grenzwert lässt sich mit Hilfe der Regel von L´Hospital verifizieren.

Literatur

Rolf, J. (2012) Was ist größer: x^y oder y^x? in MNU 02, Jahrgang 65, S. 75 - 79

Kontaktadressen der Autoren (in der Reihenfolge der Artikel)

Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de
Universität Würzburg
Didaktik der Mathematik
Emil-Fischer-Straße 30
97074 Würzburg
Bayern

Ramona Behrens
ramona.behrens@mathematik.uni-wuerzburg.de
Universität Würzburg
Didaktik der Mathematik
Emil-Fischer-Straße 30
97074 Würzburg
Bayern

Christoph Kost
christoph.kost@wiesbaden.de
Werner-von-Siemens-Realschule (Wiesbaden)
Hessen

Karel Tschacher
karel.tschacher@t-online.de
tschacher@math.fau.de
Akademischer Direktor a. D.
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Bayern

Jürgen Appel
juer.appel@t-online.de
Deutschorden - Gymnasium
Kopernikusstraße 11
97980 Bad Mergentheim
Weitere Informationen: Fachberater Mathematik für das RP Stuttgart
Baden-Württemberg

Andreas Schneider
andreas.schneider@ovmg.muenchen.musin.de
Oskar-von-Miller-Gymnasium, Siegfriedstr. 22, 80803 München
Aktuelle Schwerpunkttätigkeit: Seminarlehrer für Physik
Bayern

Dr. Elvira Malitte
elvira.malitte@mathematik.uni-halle.de
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Abteilung für Didaktik der Mathematik
Theodor-Lieser-Str. 5
06120 Halle (Saale)
Sachsen-Anhalt

Prof. Dr. Karin Richter
karin.richter@mathematik.uni-halle.de
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Abteilung für Didaktik der Mathematik
Theodor-Lieser-Str. 5
06120 Halle (Saale)
Sachsen-Anhalt

Thomas Krohn
krohn@mathematik.uni-leipzig.de
Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Abteilung für Didaktik
Augustus-Platz 10
04109 Leipzig
Sachsen

Dr. Jens Weitendorf
JWeitendorf@t-online.de
Gymnasium Harksheide, Norderstedt
IQSH, Schleswig-Holstein
Schwerpunkte: Modellierung, Realitätsbezüge, CAS-Einsatz
Schleswig-Holstein

Sascha Reimers
sascha.reimers@bbz-norderstedt.de
Studienrat am Berufsbildungszentrum Norderstedt
Moorbekstr. 17
22846 Norderstedt
Schleswig-Holstein

Martin Scharschmidt
Martin.scharschmisr@iqsh.de
Landesseminar Berufliche Bildung am IQSH
Schleswig-Holstein

Dieter Haß
casmu@dieterhass.de
Web: casmu.dieterhass.de
Pensionär, bis Sommer 2013 Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik am Wilhelmsgymnasium in Kassel
Hessen

Arnold Zitterbart
zi@schwarzwald-gymnasium.de
Baden-Württemberg