2.7 Funktionslupe

Titel	V2 – 2-7 Funktionslupe
Version	Mai 2010
Themenbereich	Von der Sekanten- zur Tangentensteigung
Themen	Vergrößern (Zoomen) von Funktionsgraphen
Rolle des GTR	Funktionenplotter mit Zoomfunktion
Methoden & Hinweise	Jeder Graph erscheint bei hinreichender Vergrößerung (Zoom) als Gerade. Vergrößert man den Graphen in der Umgebung eines Punktes, so nähert sich das Aussehen dieses Graphen einer Geraden. Diese Gerade kann mit der Tangente (in diesem Punkt) identifiziert werden. Das Auseinanderziehen des Graphen in y-Richtung kann mit dem *Auto-Zoom*-Befehl ausgeführt werden. Die Bestimmung der unterstellt Näherungsgeraden kann über die minimalen und maximalen x- und y-Werte der Fenstereinstellung berechnet werden. Bei dieser Aufgabe ist eine Erarbeitung im Klassengespräch auch eine sinnvolle Möglichkeit. Schülerinnen und Schüler würden dann anschließend entsprechende Aufgaben, eventuell als Hausaufgabe, (nach-) machen. Eine Alternative wäre es, mithilfe des GTR die Tangente einzeichnen zu lassen, zu zoomen und dann zu sehen, dass sich Graph und Tangente ab einem bestimmten Zoomfaktor nicht mehr unterscheiden.
Quelle	CiMS
Zeitlicher Rahmen	30 Minuten (ohne zusätzliche Aufgaben)

Von der mittleren zur lokalen Änderung

Gegeben ist die Funktion *f* mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 \cdot (x-3) \cdot (x-5)$.

In dieser Aufgabe geht es darum, die Steigung an einer Stelle auf eine andere Art und Weise als bisher, nämlich mithilfe der Zoom-Funktion zu bestimmen.

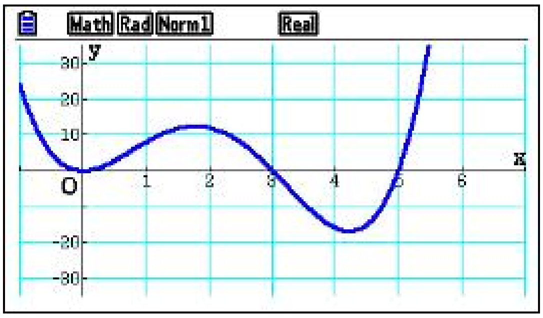
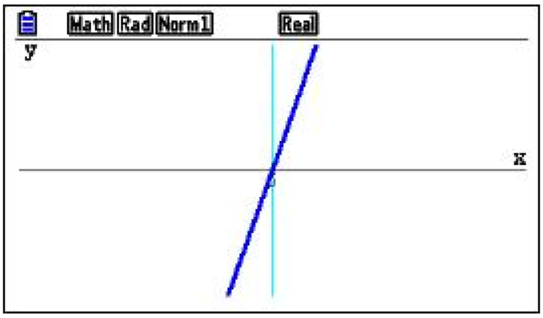
a. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *f* mit Ihrem GTR im Intervall $[-1\,;\ 7]$.

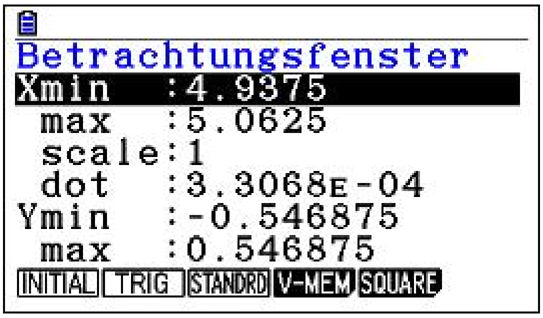
b. Nun wird die Steigung an der Stelle $x = 5$ untersucht:

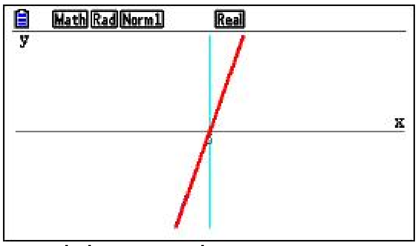
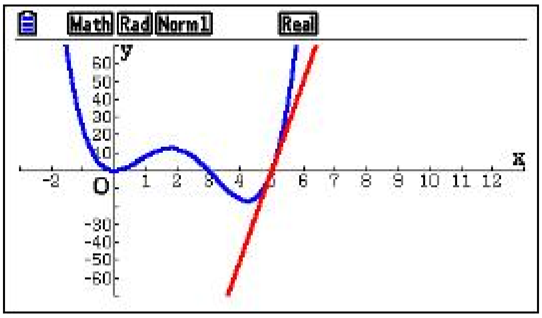
- Zoomen Sie das Grafikfenster derartig, dass
  - o die Stelle $x = 5$ in der Mitte liegt, in y-Richtung „automatisch“ zoomen,
  - o der Bildausschnitt vergrößert wird.
- Zoomen Sie so lange, bis sich das Aussehen des Graphen nicht mehr verändert. Beschreiben Sie den Graphen.
- Wählen Sie sich zwei beliebige Punkte auf dem Graphen und bestimmen Sie die (durchschnittliche) Steigung m_d zwischen diesen beiden Punkten.
- Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der Gerade (der linearen Funktion) mit der Steigung m_d, die durch den Punkt $(5\,|\,f(5)) = (5\,|\,0)$ verläuft und zeichnen Sie diese ebenfalls mit dem GTR.
  Was stellen Sie fest?
- Zoomen Sie nun rückwärts, d. h. umgekehrt zu dem ersten Zoomen.
  Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen dem Graphen von *f* und der eingezeichneten linearen Funktion.
- Bestimmen Sie die Steigung der Funktion *f* an der Stelle $x = 5$ rechnerisch entsprechend den vorherigen Aufgaben. Was stellen Sie fest?

c. Beschreiben Sie die in dieser Aufgabe vorgestellte Bestimmung der Steigung an der Stelle $x = 5$ in einem Text. Erläutern Sie, warum diese Aufgabe wohl Funktionslupe heißt.

d. Bestimmen Sie mit der Funktionslupen-Methode die Steigung an den Stellen $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$ und $x = 6$.

<table>
<tr><td>a.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>



Der Graph sieht wie eine Gerade aus.

$m_d = \frac{0{,}50451201-(-0{,}49551199)}{0{,}02} = 50{,}0012$.
$t(x) = 0 + (x-5)\cdot 50{,}0012 = 50{,}12\cdot x + 250{,}006$
Es gibt keinen erkennbaren Unterschied
zwischen dem gezeichneten und dem (gezoomten) Funktionsgraphen.


Die neu gezeichnete Gerade sieht wie die Tangente der Funktion im Punkt $(5\,|\,f(5)) = (5\,|\,0)$ aus. Mit der Methode aus den vorigen Aufgaben ergibt sich $f'(5) = 50$.
Also stimmt die mit der Zoomfunktion bestimmte Steigung in guter Genauigkeit mit der rechnerisch bestimmten Steigung überein.
Bemerkung: Diese Genauigkeit ist gut und ausreichend. Aufgrund der Pixelgröße des Bildschirms wird man bei verstärktem Zoom nicht notwendig eine größere Genauigkeit erhalten. Die Genauigkeit hängt auch vom verwendeten Gerät ab.</td></tr>
<tr><td>c.</td><td>Der Graph der Funktion *f* um den Punkt $(5\,|\,f(5))$ wurde (mithilfe der Zoom-Funktion immer weiter vergrößert, bis der Graph wie eine Gerade aussah und sich die Form</td></tr>
</table>

	nicht mehr veränderte. Diese Gerade wird als Tangente von f im Punkt $(5\,\vert\, f(5))$ angesehen. mithilfe der Spurfunktion bestimmt man nun 2 Punkte auf der Geraden (auf dem Graphen). Die Steigung der Verbindungsgeraden wird bestimmt und als als Steigung der Tangenten und damit als Steigung der Funktion im Punkt $(5\,\vert\, f(5))$ angesehen.
d.	Die anderen (genauen) Steigungswerte sind $f'(0) = 0$; $f'(3) = -18$ $f'(4) = -8$ $f'(6) = 180$