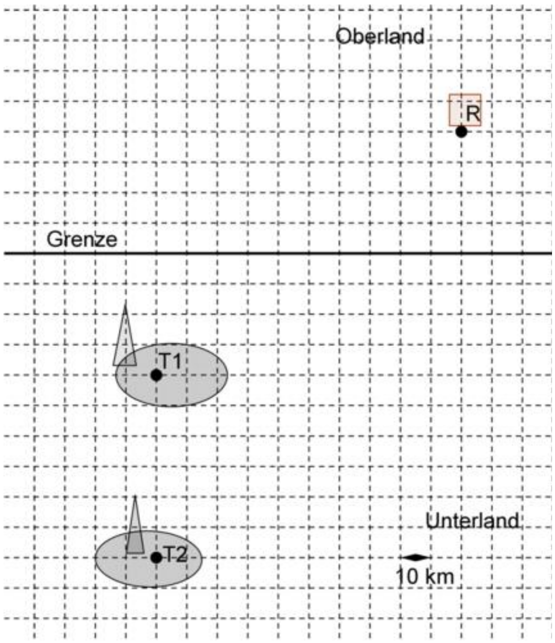
5.3 Öl-Pipeline

Titel	V2 – 5-3 Öl-Pipeline
Version	Mai 2011
Themenbereich	Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung
Themen	Optimierung von Strecken
Rolle des GTR	Lösen von Gleichungen Berechnungen von Ableitungen Umformungen von Termen
Methoden Hinweise	Die Kostenfunktion ist eine (verkettete) Wurzelfunktion und deshalb können Schülerinnen und Schüler diese Funktion mit ihren Kenntnissen noch nicht ableiten. Da aber Streckenoptimierungsaufgaben sehr einsichtig und auch schon im Modul V1 behandelt worden sind, sind sie hier aufgenommen worden. Wichtig ist das Grundprinzip, wie man mithilfe der Differenzialrechnung ein Optimum findet. Das Prinzip ist für Schülerinnen und Schüler schwer genug und wird hier mit dem GTR geübt. Später, wenn dieses Prinzip von den Schülerinnen und Schülern verinnerlicht worden ist, kann auch die Technik des Ableitens mit einbezogen werden.
Quelle	CiMS
Zeitlicher Rahmen	1 Schulstunde

Von der mittleren zur lokalen Änderung



In der Wüste von Unterland wurde ein neues Ölfeld erschlossen. Das geförderte Öl kann in einer bestehenden Raffinerie in Oberland verarbeitet werden (vgl. Karte). Dazu soll eine Pipeline vom Ölturm zur Raffinerie gebaut werden. Die Kosten für den Bau der Pipeline werden mit 1000$ pro Meter in Unterland veranschlagt. In Oberland kostet ein gleich langes Stück nur etwa 600$.

Hinweis: Die Punkte symbolisieren die Orte der Raffinerie und der Bohrtürme der Ölfelder. Eine „Karolinie“ ist in der Realität 10 km lang.

a. Bestimmen Sie für verschiedene Wege die zugehörenden Baukosten für den Bau der gesamten Pipeline.
   Unter diesen Wegen sollten sein:
   - der Weg, dessen Länge in Oberland möglichst kurz ist,
   - der kürzeste Weg,
   - weitere… .

b. Wie muss die Pipeline aussehen, wenn der in Unterland gebaute Abschnitt aus politischen Gründen genauso teuer wie der in Oberland liegende Teil der Pipeline sein soll?
   Bestimmen Sie den entsprechenden Verlauf und geben Sie die Kosten an.

c. Bestimmen Sie unter den Ausgangsbedingungen der Aufgabenstellung den Verlauf der Öl-Pipeline mit dem niedrigsten Kosten und geben Sie diese an.
   Hinweis: Auch hier benutzen Sie bitte zu Übungszwecken Differenzialrechnung.

d. 60 km weiter südlich vom ersten Bohrturm wird ein zweites Ölfeld erschlossen.
   Bestimmen Sie die kostengünstige Anbindung dieses Ölfeldes an die Raffinerie
   - ohne Einbeziehung der Pipeline des ersten Ölfeldes zur Raffinerie,
   - mit Einbeziehung der Pipeline des ersten Ölfeldes zur Raffinerie.

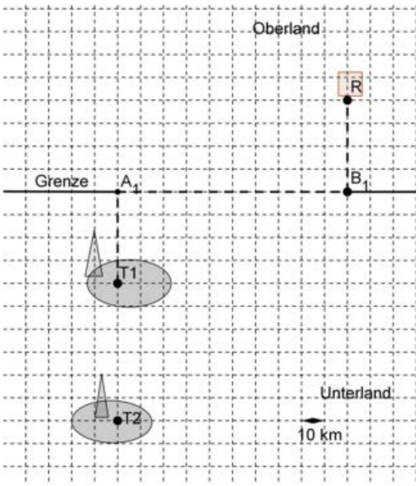
a.

- Der Weg im Oberland ist möglichst kurz.
  Die Kosten für die Strecke von A_1 nach B_1 sind unklar, da sie genau auf der Grenze zwischen Ober-und Unterland läuft.
  Durch Auszählen der Kästchen bekommt man die folgenden Kosten

  $$K_1 = 40 \cdot 0{,}6 \text{ Mio } \$ + 100 \cdot 1 \text{ Mio } \$ + 40 \cdot 1 \text{ Mio } \$ = 164 \text{ Mio } \$$$

  oder

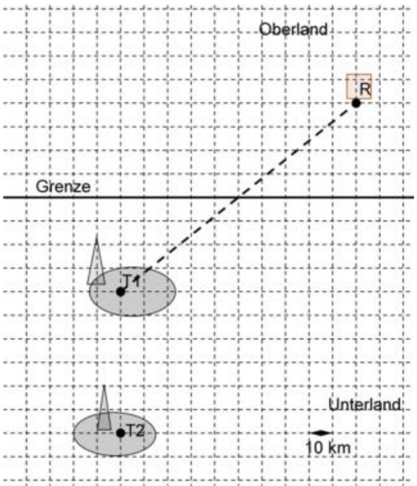
  $$K_1 = 40 \cdot 0{,}6 \text{ Mio } \$ + 100 \cdot 0{,}6 \text{ Mio } \$ + 40 \cdot 1 \text{ Mio } \$ = 124 \text{ Mio } \$$$



- Der Weg ist möglichst kurz.

  Das ist die direkte Verbindung. Die Entfernungen im Ober- und im Unterland sind gleich groß. Mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält man

  $$K_2 = \sqrt{40^2 + 50^2} \cdot 0{,}6 \text{ Mio } \$ + \sqrt{40^2 + 50^2} \cdot 1 \text{ Mio } \$ \approx 102{,}4 \text{ Mio } \$$$



- …….

b.

Die Kosten im Oberland K_O sind gleich denen im Unterland K_U.
Aus den Bezeichnungen der Zeichnung erhält man

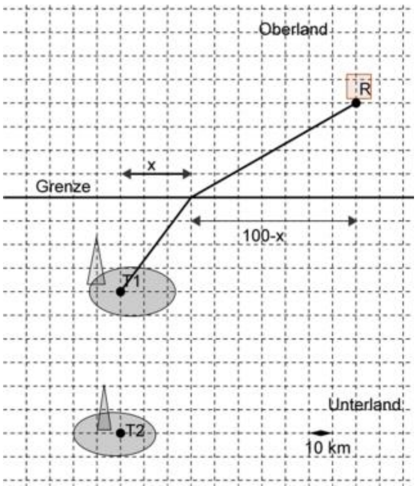
$$K_U(x) = \sqrt{40^2 + x^2} \cdot 0{,}6 \text{ Mio } \$ \text{ und}$$

$$K_O(x) = \sqrt{40^2 + (100 - x)^2} \cdot 1 \text{ Mio } \$.$$

Setzt man beide Kosten gleich und löst z. B. mit dem solve-Befehl, so erhält man die Lösungen

$x_1 \approx 71{,}46$ und $x_2 \approx 241{,}04$.

Die Lösung x_2 ist nicht sinnvoll und man erhält mit x_1 die Kosten $K_U \approx 49{,}1 \text{ Mio } \$$ und als Gesamtkosten ungefähr 98,3 Mio $.



Hinweis: Das Endergebnis setzt sich aus dem gerundeten Endergebnis zusammen. Es wurde mit den Taschencomputerzahlen und nicht mit den gerundeten Werten weiter gerechnet, das hätte andere Werte ergeben.

c.	Mit den Bezeichnungen aus dem Aufgabenteil b) erhält man die Gesamtkosten $K_G(x)$ durch $K_G(x) = K_U(x) + K_O(x)$. Die Kosten sind minimal an der Stelle x_{min}, wenn $K_G{}'(x_{\min}) = 0$ **und** z. B. $K_G{}''(x_{\min}) > 0$. Mithilfe des solveN-Befehls erhält man $x_{\min} \approx 75$ und $K_G{}''(x_{\min}) \approx 0{,}017$. Also sind die Kosten für $x_{\min} \approx 75$ minimal mit den Gesamtkosten von ungefähr 98,2 Mio $
d.	Ohne Einbeziehung der Pipeline: Mit $K_U(x) = 0{,}6 \cdot \sqrt{(100^2 + x^2)}$ und $K_O(x)$ aus Aufgabe b) erhält man analog zu Aufgabe c) die Gesamtkosten $K_G(x)$ durch $K_G(x) = K_U(x) + K_O(x)$. Die Kosten sind minimal an der Stelle $x_{\min}$, wenn $K_G{}'(x_{\min}) = 0$ und $K_G{}''(x_{\min}) > 0$. Mithilfe des solveN-Befehls erhält man $x_{\min} = 83{,}4$ und $K_G{}''(x_{\min}) = 0{,}007$. Also sind die Kosten für $x_{\min} = 83{,}4$ minimal mit den Gesamtkosten von ungefähr 121,4 Mio $. Mit Einbeziehung der Pipeline: Hier erhält $K_U(x) = 0{,}6 \cdot \sqrt{(100^2 + x^2} + (0{,}6 \cdot 60)$ einen additiven Term, welcher beim Ableiten jedoch wegfällt. Somit ändert sich die Lösung aus Aufgabe b) nicht in Bezug auf $x_{\min} = 75$ und $K_G{}''(x_{\min}) = 0{,}016$, lediglich die Gesamtkosten erhöhen sich von 98,2 Mio $ um 36 Mio $ (60x0,6) für das gerade Pipelinestück zwischen den beiden Bohrtürmen auf 134,2 Mio $.