Einsatzmöglichkeiten des ClassPad in den Klassenstufen 9 / 10

CASIO

Einsatzmöglichkeiten des ClassPad in den Klassen 9/ 10

Dr. Jens Weitendorf

1. Auflage - März 2024

Einleitung

Im Land Nordrhein-Westfalen ist der Einsatz eines CAS-Rechners demnächst in der Sek. II verpflichtend. Erfahrungen zeigen, dass es Sinn macht, einen solchen Rechner schon in der Sek. I einzusetzen. Wir plädieren für einen Einsatz im Verlauf der Klasse 7 mit einer Fortsetzung in den weiteren Klassenstufen. Welche Möglichkeiten sich für einen solchen Einsatz von ClassPads der Firma Casio ergeben, soll im Folgenden für die Stufen 9 und 10 dargestellt werden. Dabei geht es überhaupt nicht darum, den ClassPad in jeder Unterrichtsstunde einzusetzen; sondern immer dann, wenn es unter mathematischen und didaktischen Gesichtspunkten sinnvoll erscheint.

Der Lehrplan sieht eine Trennung in die vier Stoffgebiete *Arithmetik, Funktionen, Geometrie* und *Stochastik* vor. Mit den hier vorliegenden Hinweisen beziehen wir uns ebenfalls auf diese vier Gebiete, wobei es aber tlw. zu Überschneidungen kommt. Dies bezieht sich z. B. auf die trigonometrischen Funktionen. Des Weiteren haben wir uns auf Inhalte beschränkt, bei denen es sinnvoll erscheint, den ClassPad einzusetzen.

Die einzelnen Teile des Manuskripts sind tabellenartig aufgebaut. Man findet zunächst Hinweise auf den Lehrplan, die aus diesem direkt übertragen sind, daneben Abbildungen des ClassPad. In der dritten und vierten Spalte gibt es dann technische und didaktische Hinweise. Auch bzgl. der beiden letzten Kategorien kommt es zu Überschneidungen, da einige technische Hinweise einen Zusammenhang zum Verständnis des Rechners haben. Ein solcher Rechner ist nach den Gesetzen der Logik programmiert und insofern weist die Bedienung auch Bezüge zur Mathematik auf.

Diese in Tabellen gefasste Information ist für die unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen gedacht. Die technischen Hinweise sind so gestaltet, dass es auch für Einsteigerinnen und Einsteiger ohne Probleme möglich sein sollte, den ClassPad im Unterricht einzusetzen. Insbesondere wird der Leitfaden für die Klassenstufen 7 und 8 nicht vorausgesetzt. Das Gleiche gilt für die Reihenfolge der einzelnen Gebiete. Diese sind in der Regel unabhängig davon behandelbar. Die dadurch entstehenden Wiederholungen werden in Kauf genommen. Aber auch CAS erfahrenere Kolleginnen und Kollegen werden sicher die eine oder andere Idee für den Einsatz finden.

Im Anschluss an jedes Kapitel findet man Arbeitsblätter für die Schülerinnen und Schüler, die direkt einsetzbar sind. Lösungen sind in der Regel nicht angegeben, da sich die Arbeitsblätter oft direkt auf die im Lehrerteil dargestellten Inhalte beziehen, und sie sich daraus direkt ergeben. Bei einigen Aufgaben wird der Rechner nur zur Kontrolle genutzt, so dass sich auch hier Lösungsblätter erübrigen.

Die Arbeitsblätter sind in der Regel so gestaltet, dass sie entdeckendes Lernen ermöglichen. Ansonsten sollten die Kolleginnen und Kollegen jeweils entscheiden, welche Lösungen händisch und welche mit Hilfe des ClassPad erstellt werden sollen. In der Regel haben wir uns eher auf das rein Mathematische beschränkt und auf Realitätsbezüge verzichtet, es sei denn es besteht ein direkter Zusammenhang zum Einsatz des ClassPads. Ansonsten sollten wünschenswerte Realitätsbezüge im Unterricht hinzugefügt werden. In wie weit diese verständnis- bzw. motivationsfördernd sind, hängt natürlich immer von der Zusammensetzung der jeweiligen Lerngruppe ab.

Vielen Dank an Antonius Warmeling und das Casio-Educational-Team für die Unterstützung bei der Erstellung dieses Materials.

Inhaltsverzeichnis

Arithmetik 8

Arbeitsblatt zu Wurzeln 24

Arbeitsblatt zu linearen Gleichungssystemen 25

Arbeitsblatt zu Potenzen und Wurzeln

Quadratische Funktionen 28

Arbeitsblatt zu quadratischen Funktionen und deren Grafen und quadratische Gleichungen 34

Arbeitsblatt zu geometrischen Konstruktion einer Parabel 35

Exponentielle Funktionen 36

Umkehrfunktion 40

Arbeitsblatt zum exponentiellen Wachstum und Funktionen 42

Arbeitsblatt zur Wurzelfunktion und Umkehrfunktion 43

Arbeitsblatt zum exponentiellen und linearem Wachstum 44

Lösungen zum exponentiellen Wachstum 45

Trigonometrische Funktion 46

Arbeitsblatt zu trigonometrische Funktionen 48

Geometrie Ähnlichkeit 50

Arbeitsblatt zur Ähnlichkeit 54

Arbeitsblatt zum Satz des Pythagoras 55

Der Satz des Pythagoras 58

Geometrie: Der Kreis und π 60

Arbeitsblatt zur Berechnung einer dezimalen Näherung für π 68

Trigonometrie 70

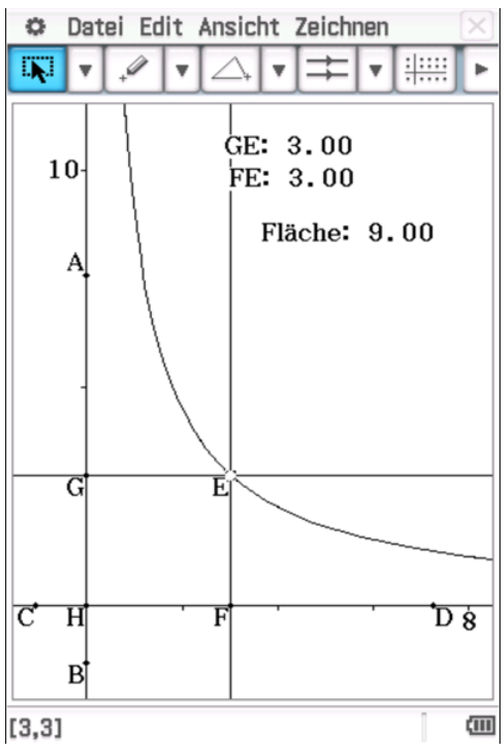
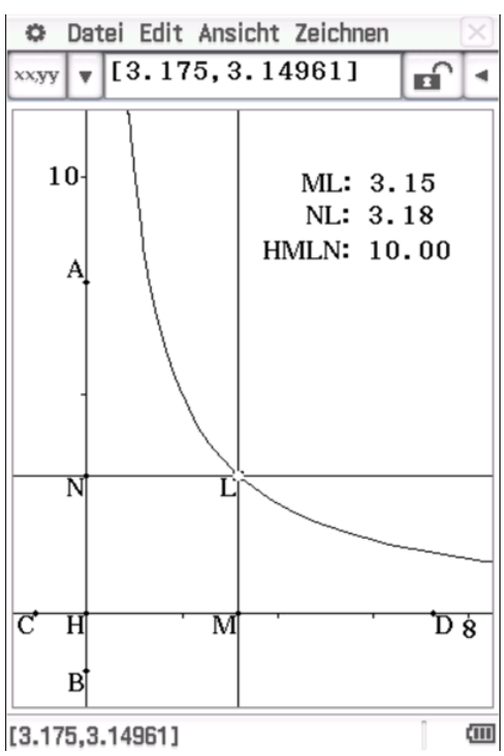
Arbeitsblatt zu trigonometirschen Funktionen 78

Arbeitsblatt zu trigonometirschen Funktionen 79

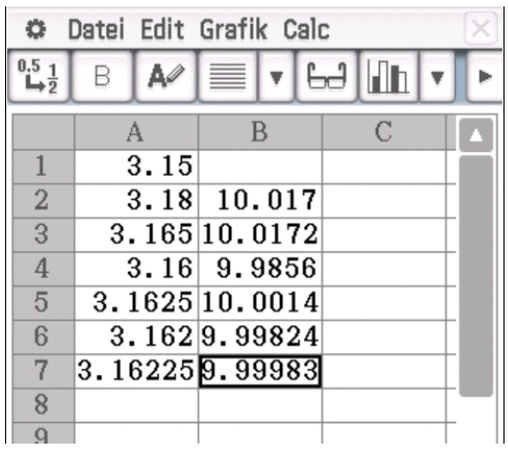
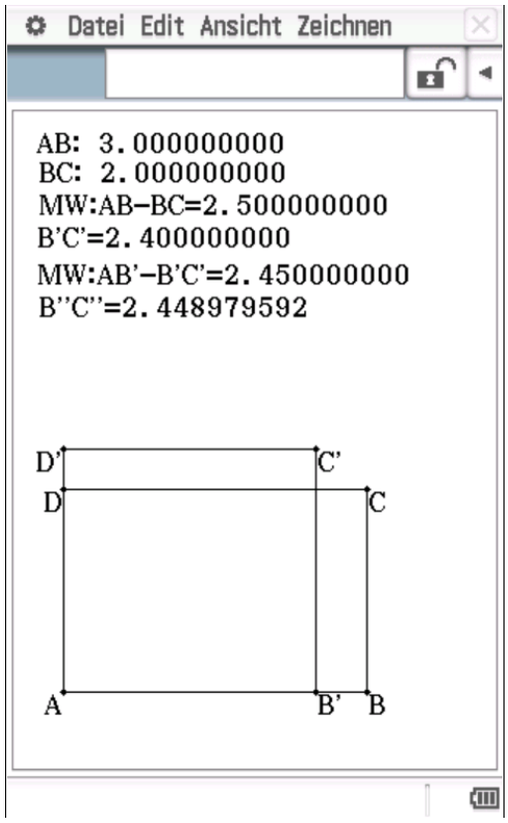
Stochastik 80

Arbeitsblatt zu Stochastik 88

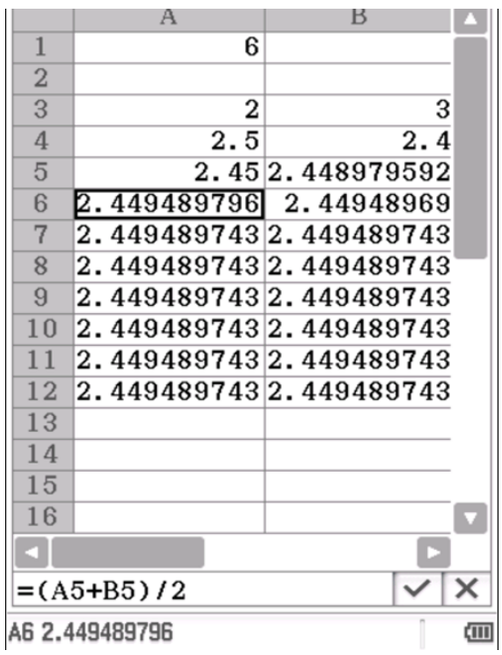
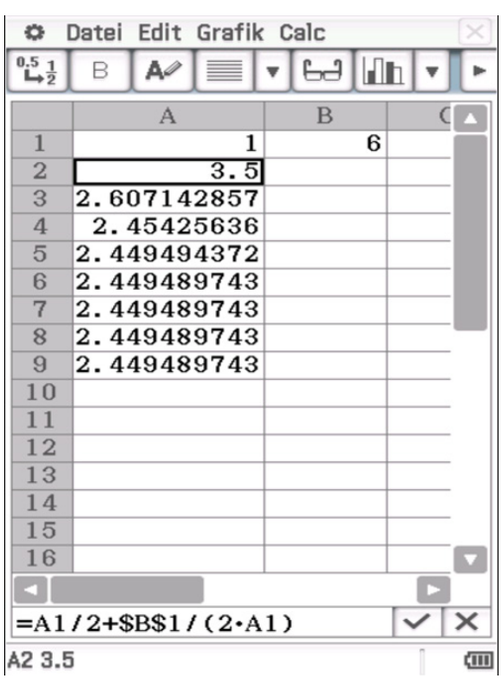
Arithmetik / Algebra

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – Zahlbereichserweiterung: reelle Zahlen – Begriffsbildung: Potenzen, Wurzeln Die Schülerinnen und Schüler (2) **unterscheiden rationale und irrationale Zahlen und geben Beispiele für irrationale Zahlen an**	 

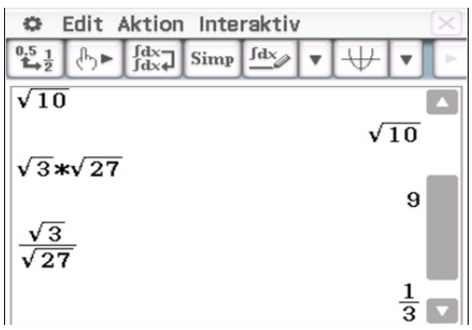
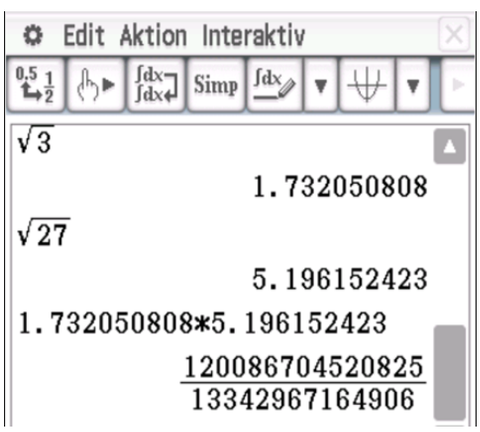
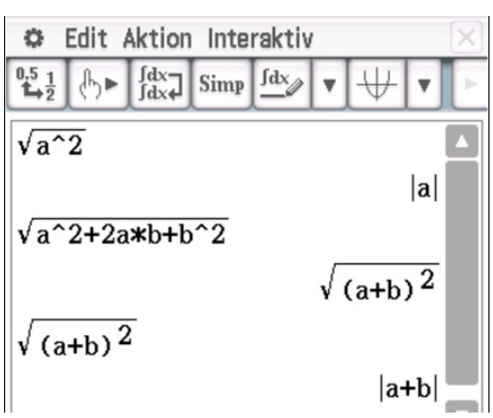
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Im Geometrie Modul lässt sich eine Figur erzeugen, so dass aus beliebigen Rechtecken Quadrate erzeugt werden können, die den gleichen Flächeninhalt haben. Dazu werden zunächst Geraden auf die beiden Achsen gelegt, die als Konstruktionshilfen benötigt werden. Die Koordinatenachsen sind dazu nicht direkt nutzbar. Über den Menüpunkt [y=f(x)] lässt sich der Graf der Funktion $f(x) = \frac{9}{x}$ zeichnen. Auf diesen Grafen legen wir den Punkt E. Zu den Geraden CD und AB werden Parallele durch den Punkt E gelegt und die Schnittpunkte G und F markiert. Zusammen mit dem Punkt H ergibt sich das Rechteck HFEG. Durch die Konstruktion beträgt der Flächeninhalt 9. Der Punkt E wurde so verschoben, dass die Seiten GE und FE gleich lang sind. Die Werte für den Flächeninhalt und die Seitenlängen erhält man über das Messfenster. Der Zahlenwert wird markiert und mit dem Stift in den Grafikbereich gezogen. Die entsprechenden Beschreibungen lassen sich direkt einfügen. Der zweite Screenshot unterscheidet sich vom ersten dadurch, dass als Funktion $f(x) = \frac{10}{x}$ gewählt wurde.	Zur Einführung der reellen Zahlen ist zu zeigen, dass es im Allgemeinen keine rationalen Zahlen mit der Eigenschaft gibt: $y = x^2$, wobei $x \in \mathbb{Q}$. Geometrisch bedeutet dies, dass Rechtecke in flächengleiche Quadrate zu verformen sind. Man kann dies die Schülerinnen und Schüler für Rechtecke mit dem Flächeninhalt 9 bzw. 10 versuchen lassen. In den Abbildungen links sieht man die entsprechenden Konstruktionen. Durch die Anwendung der Funktion $f(x) = \frac{9}{x}$ rückt die Produktgleichheit bzgl. der antiproportionalen Zuordnung nochmal in den Fokus. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass dies für Rechtecke mit dem Flächeninhalt 9 möglich ist; hingegen gelingt es für 10 nicht. Daraus ergibt sich, dass dieses Phänomen genauer zu untersuchen ist.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – Zahlbereichserweiterung: reelle Zahlen – Begriffsbildung: Potenzen, Wurzeln Die Schülerinnen und Schüler **(2) unterscheiden rationale und irrationale Zahlen und geben Beispiele für irrationale Zahlen an,** **(5) nutzen und beschreiben ein algorithmisches Verfahren, um Quadratwurzeln näherungsweise zu bestimmen**	 

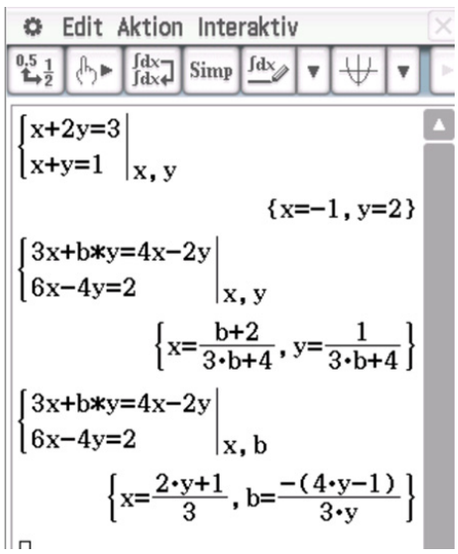
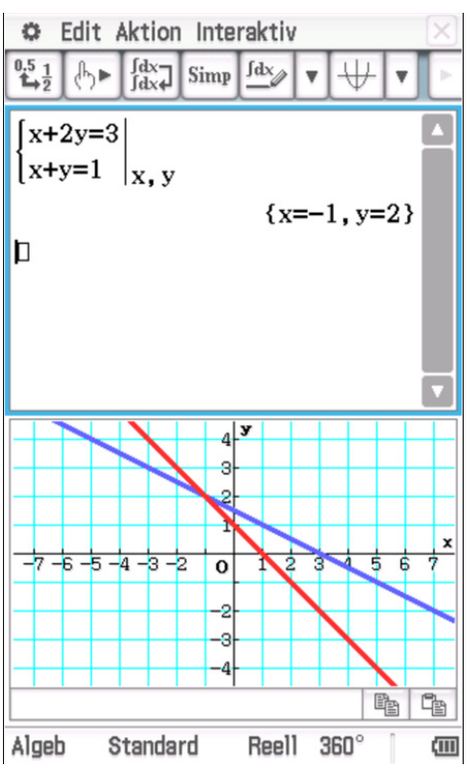
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
In der Spalte A stehen jeweils die Zahlenwerte, deren Quadrat in etwa 10 ergeben. In B2: =A1*A2 A3: =(A1+A2)/2 A4: willkürlich gesetzt A5: =(A3+A4)/2 usw. In B3, B4, … werden die jeweiligen Quadrate bestimmt. Man zeichnet zunächst die Strecke AB mit beliebiger Länge. Im Messfenster lässt sich dann die Länge auf 3 normieren. Im Punkt B errichtet man die Senkrechte zur Strecke AB. Dazu ist der Punkt B und die Strecke AB zu markieren. Die Senkrechte bekommt man dann mit: Auf dieser wählt man einen beliebigen Punkt C. Im Messfenster setzt man durch Markieren von Punkt B und C die Länge auf 2. Die beiden Streckenlängen werden vom Messfenster in den Geometriebereich gezogen und die Bezeichnung entsprechend geändert, so dass AB: und BC: erscheint. Mit Hilfe von Formelterm im Menü Konstruieren können Berechnungen auch direkt im Geometrie Bereich durchgeführt werden. Die einzelnen Terme im Geometrie Bereich werden mit @1, @2 usw. gekennzeichnet. So erhält man z. B. die dritte Zeile durch: (@1+@2)/2. Dieses Verfahren lässt sich natürlich fortsetzen. Um die Übersichtlichkeit zu bewahren, kann man nicht mehr benötigte Rechtecke löschen oder verbergen. Begrenzt wird das Verfahren durch die Auflösung des Geometrie Moduls bzw. durch die Rechengenauigkeit.	Mit Hilfe der Tabellenkalkulation lässt sich dieses für die Zahl 10 nochmals genauer untersuchen. So wird neben dem visuellen Zugang noch ein weiterer diskutiert. Man beginnt mit den Zahlen 3,15 und 3,18 aus dem geometrischen Ansatz und bildet den Mittelwert. Da der Wert des Quadrates zu groß ist, verkleinert man die 3,165 zu 3,16 und bildet wieder den Mittelwert. Es ergibt sich 3,1625. Dieses Verfahren lässt sich bis zur Rechnergenauigkeit fortsetzen. Für den Beweis, dass $\sqrt{10}$ nicht rational ist, empfehlen wir den üblichen, der zu einem Widerspruch hinsichtlich des vollständig gekürzten Ausgangsbruch führt. Dieser Beweis ist für die SuS oft nur schwer nachvollziehbar. Von daher halten wir es für sinnvoll, die obigen Annäherungsversuche durchzuführen, um möglichst vielen Schülerinnen und Schülern einen Zugang zu ermöglichen. Das oben beschriebene Verfahren erscheint doch eher willkürlich. Für eine dezimale Näherung eignet sich das Heron Verfahren, das sich mit Hilfe der Tabellenkalkulation gut durchführen lässt. Die Idee des Heron Verfahrens lässt sich im Geometrie Modul veranschaulichen. Es wird zunächst das Ausgangsrechteck ABCD mit den Kantenlängen AB = 3 und BC = 2 mit dem Flächeninhalt 6 gezeichnet. Dann bildet man den Mittelwert der beiden Seitenlängen und wählt diesen für die eine Seite und bestimmt die andere dadurch, dass man den Flächeninhalt durch die eine Seitenlänge dividiert. Der Flächeninhalt des Rechtecks bleibt so erhalten.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – Zahlbereichserweiterung: reelle Zahlen – Begriffsbildung: Potenzen, Wurzeln Die Schülerinnen und Schüler **(2) unterscheiden rationale und irrationale Zahlen und geben Beispiele für irrationale Zahlen an,** **(5) nutzen und beschreiben ein algorithmisches Verfahren, um Quadratwurzeln näherungsweise zu bestimmen**	 

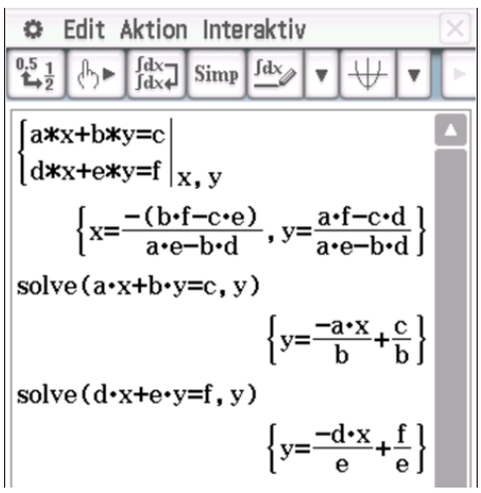
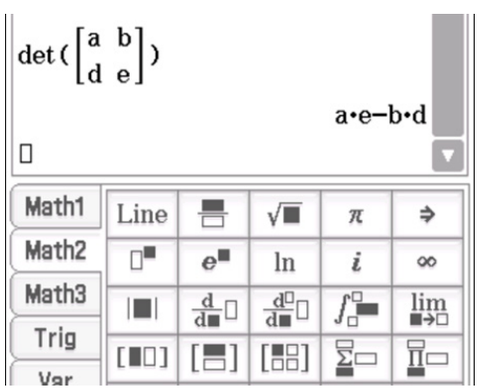
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die Zahl, deren Wurzel näherungsweise als Digitalzahl dargestellt werden soll, steht in A1. Auf diese Zelle wird sich im Verlauf des Verfahrens bezogen. Dies hat den Vorteil, dass man durch Ersetzen der 6 z. B. durch 10 automatisch die dezimale Näherung für √10 erhält. Die 2 in A3 ist ein Näherungswert. Dieser muss nicht besonders genau sein, da man z. B. auch für √10 sehr schnell eine Näherung erhält. Die Spalte B erhält man durch: BN: =*A1/AN*, wobei N die jeweilige Zeilennummer angibt. Man braucht die Befehle nur einmal in Zeile einzugeben. Wenn man sowohl A4 als auch B4 markiert und *Kopieren -> Einfügen* wählt, lässt sich das Verfahren nur in die nächste Zeile übertragen. Einfacher ist es, nur A4 zu markieren, *Kopieren* zu wählen und dann mehrere Zellen der Spalte A zu markieren und *Einfügen*. Entsprechend verfährt man mit Spalte B Auch hier hat man den festen Bezug zur Zelle B1, so dass der Algorithmus für beliebige Wurzeln durchgeführt werden kann.	Das oben angegebene Verfahren zur Berechnung einer dezimalen Näherung für Wurzeln lässt sich in die Tabellenkalkulation übertragen. Als Übertragung von der Visualisierung erscheint es für die Schülerinnen und Schüler übersichtlicher zu sein, wenn man den Algorithmus zunächst zweispaltig ausführt. Man hat dann allerdings die links beschriebenen „Kopieren und Einfügen“ Probleme. Das zweispaltige Vorgehen lässt sich auf eine Spalte reduzieren, wenn man den Algorithmus für die dezimale Näherung von √a folgendermaßen zusammenfasst: $$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + a/(2 \cdot a_{n-1})$$ Der Algorithmus konvergiert schnell, so dass dem Anfangswert keine große Bedeutung beizumessen ist. Das Näherungsverfahren lässt sich für n-te Wurzeln verallgemeinern. Für 3-te Wurzeln kann man es veranschaulichen, indem man interpretiert $\sqrt[3]{a}$ als Kantenlänge eines Würfels mit dem Volumen a, der durch Quader mit quadratischer Grundfläche mit der Kantenlänge x_0 angenähert wird. Die Höhe des Quaders beträgt dann: $h = \frac{a}{x_0^2}$, wobei x_0 ein Näherungswert ist. Bildet man den Mittelwert, so ist $\frac{1}{3}\left(2x_0 + \frac{a}{x_0^2}\right)$ ein besserer Näherungswert. Dies lässt sich für n-te Wurzeln verallgemeinern: Ist x_0 ein Näherungswert, so ist $\frac{1}{n}\left((n-1)x_0 + \frac{a}{x_0^{n-1}}\right)$ ein besserer Näherungswert.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – Zahlbereichserweiterung: reelle Zahlen – Begriffsbildung: Potenzen, Wurzeln Die Schülerinnen und Schüler **(2) unterscheiden rationale und irrationale Zahlen und geben Beispiele für irrationale Zahlen an,**	  

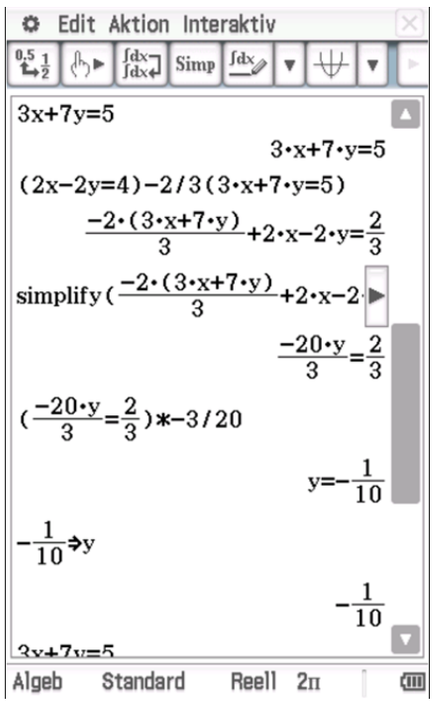
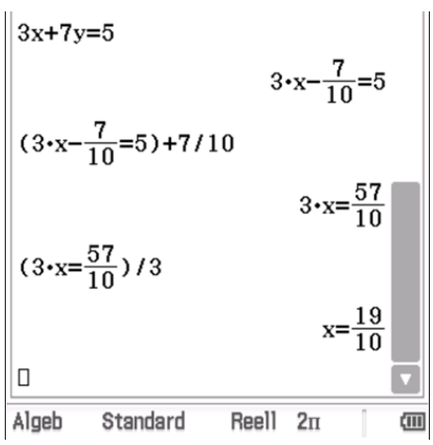
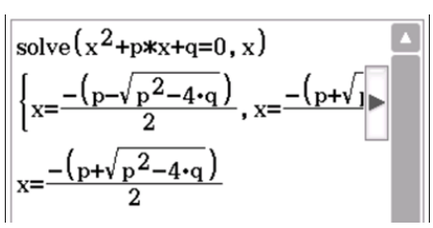
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Dezimale Näherungswerte erhält man, wenn man im Grundformat für die dezimalen Zahlen ein Häkchen setzt oder das Ergebnis auf der rechten Seite markiert und wählt.	Für die Schülerinnen und Schüler ist es wichtig, dass zwischen einer reellen Zahl und ihrer dezimalen Näherung unterschieden wird. Ein CAS „rechnet“ in der Regel mit den exakten Zahlen. Das heißt, dass Wurzeln nicht in der dezimalen Näherung behandelt werden; es sei denn im Grundformat ist ein Häkchen bei den Dezimalzahlen gesetzt. Wenn möglich werden die Wurzeln vereinfacht. Der zweite Screenshot links zeigt, dass man keine exakten Ergebnisse erhält, wenn mit Näherungswerten gerechnet wird. Dies würde der Rechnung mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner entsprechen. Die Gesetze für das Rechnen mit Wurzeln werden natürlich auch im CAS befolgt.
Unter Umständen können Terme nur nach und nach vereinfacht werden.	Da $\sqrt{a} \geq 0$, werden im Screenshot links Betragsstriche gesetzt, da ja nicht $a \geq 0$ vorausgesetzt wurde. Erstaunlich ist, dass die binomische Formel nicht in einem Schritt vereinfacht wurde.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Lineare Gleichungssysteme **(7) ermitteln algebraisch und graphisch Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen unter Verwendung geeigneter Verfahren, deuten sie im Sachkontext und nutzen die Probe als Rechenkontrolle**	 

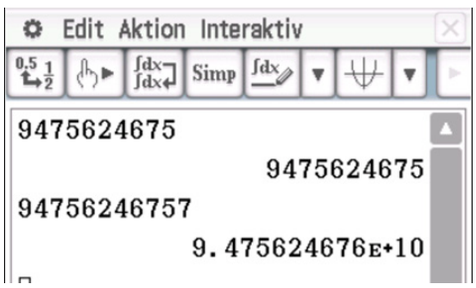
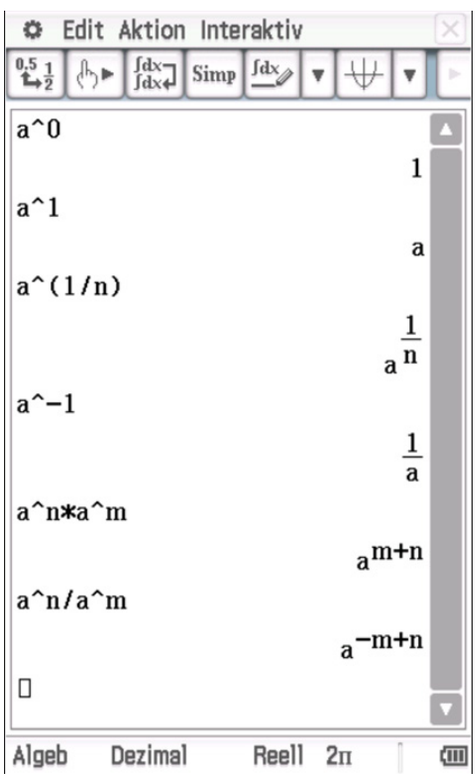
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Lineare Gleichungssysteme lassen sich mit dem CAS direkt lösen. Man wählt dazu . Das Symbol findet man direkt im Keyboard Bereich *Math1.* Neben den Gleichungen sind die Variablen anzugeben, nach denen aufgelöst werden soll. Die Beispiele links zeigen, dass auch Systeme umgeformt werden können, für die die Anzahl der Variablen größer ist als die Anzahl der Gleichungen. Wenn man mehr als zwei Gleichungen behandeln will, betätigt man die Taste entsprechend oft.	Die Frage, welche Rolle in Zukunft das händische Lösen linearer Gleichungssysteme im Unterricht spielt, ist zurzeit nicht beantwortet.
Im Main Bereich des ClassPad lässt sich der Zusammenhang zwischen algebraischer und grafischer Lösung leicht zeigen. Dazu wird mit Hilfe von ein grafisches Fenster in der unteren Hälfte geöffnet. Man erhält die Grafen, indem man eine Gleichung markiert und diese mit dem Stift in das untere Fenster zieht.	Die grafische Bestimmung des Schnittpunktes schließt sich an das Verfahren zur Bestimmung der Lösung linearer Gleichungen an.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Lineare Gleichungssysteme **(7) ermitteln algebraisch und graphisch Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen unter Verwendung geeigneter Verfahren, deuten sie im Sachkontext und nutzen die Probe als Rechenkontrolle**	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Bei der Eingabe ist zu beachten, dass die Variablen a, b, …, f nicht belegt sind. Man sollte eventuell dies vorher im Variablen Manager überprüfen. Die „*“ Zeichen sollten vorsichtshalber mit eingegeben werden, um abzusichern, dass ax usw. nicht als eine Variable vom Rechner verstanden wird.	Mit einem CAS ist es möglich, ein Gleichungssystem allgemein zu lösen. So kann direkt abgelesen werden, wann es eine eindeutige Lösung, bzw. keine oder unendlich viele Lösungen gibt. Man kann auch das allgemeine Gleichungssystem händisch lösen lassen. Es ergibt sich aber dann in der Regel das Problem, dass der Fokus im Unterricht auf den Termumformungen liegt. Eine andere Möglichkeit, die Anzahl der Lösungen zu diskutieren, ergibt sich aus der Lage der Grafen zueinander. Keine oder unendlich viele Lösungen gibt es genau dann, wenn die beiden Funktionsgrafen parallel zueinander sind. Das ist genau dann der Fall, wenn $\frac{-a}{b} = \frac{-d}{e} \leftrightarrow a \cdot e = b \cdot d$
Matrizen lassen sich über das Keyboard Math2 direkt eingeben. Den Befehl für die Determinante erhält man durch: *Interaktiv -> Matrix -> Berechnungen*	Die beiden Geraden sind identisch, wenn zusätzlich: $\frac{c}{b} = \frac{f}{e} \leftrightarrow b \cdot f = c \cdot e$ Das bedeutet, man hat eine Übereinstimmung zwischen der Geometrie der Grafen und der Algebra der Gleichungen. Die Terme der Lösungen im Zähler und Nenner entsprechen den Determinanten, die sich aus den Koeffizienten ergeben. Matrizen und Determinanten sind zwar in der Regel nicht Thema in 9 / 10. Wir weisen aber trotzdem schon jetzt daraufhin, da die Diskussion hinsichtlich der Determinante ist vor allem hilfreich bei der Frage der linearen Ab- bzw. Unabhängigkeit von Vektoren im R^3 ist.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Lineare Gleichungssysteme Die Schülerinnen und Schüler **(7) ermitteln algebraisch und graphisch Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen unter Verwendung geeigneter Verfahren, deuten sie im Sachkontext und nutzen die Probe als Rechenkontrolle**	   **(9) wählen Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen begründet aus, vergleichen deren Effizienz und bestimmen die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung auch ohne Hilfsmittel**

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die beiden Gleichungen sind jetzt getrennt aufzuschreiben. Genau wie beim Lösen linearer Gleichungen setzt man die umzuformende Gleichung in Klammern und dahinter, welche Umformungen vorgenommen werden sollen. Wenn das Ergebnis nicht vereinfacht wurde (s. Zeile 3 und 4 links), geschieht dies, nachdem die Gleichung auf die linke Seite gezogen und markiert wurde, mit *interaktiv -> simplify .* Wie bei den linearen Gleichungen lässt sich dann y bestimmen.	Schon beim Lösen linearer Gleichungen haben wir gezeigt, dass man nur die einzelnen Umformungsschritte angeben muss und der Rechner dann diese ausführt. Entsprechendes lässt sich auch für Systeme durchführen; es ist allerdings deutlich aufwendiger. Schülerinnen und Schüler haben aber so die Möglichkeit, ihre einzelnen Schritte nachzuvollziehen und ggf. Fehler zu korrigieren. Wir haben verschiedene Möglichkeiten für das Lösen linearer Gleichungssysteme diskutiert. Zurzeit gibt es keine Einigkeit darüber, welchen Raum in Zukunft das händische Lösen von Gleichungssytemen einnehmen soll. So bleibt es der Lehrkraft überlassen, welchen Weg sie wählt. Wir haben uns darauf beschränkt, zu diskutieren, inwieweit eine Unterstützung durch den ClassPad möglich ist.
Für die weitere Lösung muss der Wert für y der Variable y zugeordnet werden. Die Zuordnung geschieht mit dem Zuordnungspfeil, den man im keyboard math1 findet. Dadurch vereinfacht sich die erste Gleichung zu einer, in der nur noch die Variable x vorkommt. Die restlichen Umformungen sind genau wie die bei den linearen Gleichungen.	
Gibt man die allgemeine quadratische Gleichung ein, so erhält man automatisch die p-q-Formel. Für die bessere Lesbarkeit wurde die zweite Lösung kopiert und in die nächste Zeile eingefügt.	Bei Benutzung des ClassPad halten wir es für sinnvoll, das Lösen quadratischer Gleichungen zusammen mit den quadratischen Funktionen im Unterricht zu behandeln. Ausführliches findet man im Abschnitt über die Funktionen.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Begriffsbildung: Potenzen, Wurzeln Die Schülerinnen und Schüler **(1) stellen Zahlen in Zehnerpotenzschreibweise dar**	
– Gesetze und Regeln: Potenzieren und Radizieren, Potenzgesetze Die Schülerinnen und Schüler **(3) vereinfachen Terme, bei denen die Potenzgesetze unmittelbar anzuwenden sind,** **(4) wechseln zwischen Bruchdarstellung und Potenzschreibweise,**	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Wenn im Grundformat der ClassPad auf dezimale Zahlen eingestellt ist, werden Zahlen, die größer sind als 10^{10} automatisch in Zehnerpotenzschreibweise dargestellt.	Vor allem in der Physik hat man es mit sehr großen und vom Betrag her sehr kleinen Zahlen zu tun. Für einen besseren Überblick ist es für die Schülerinnen und Schüler einfacher, wenn die Zehnerpotenzschreibweise genutzt wird.
	Ein CAS ist eine elektronische Formelsammlung. Das bedeutet, alle Gesetze und Definitionen für das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln sind direkt abrufbar. Für den Unterricht bedeutet das, dass man die Schülerinnen und Schüler experimentieren lassen kann, und sie so die Gesetze und Definitionen selber finden können. Eine Klärung sollte danach natürlich noch im Unterrichtsgespräch erfolgen. Das CAS bevorzugt für die Darstellung n-ter Wurzeln die Potenzschreibweise Folgende Gesetze können nicht abgerufen werden: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$ $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n \quad b \neq 0$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
Das Symbol für die n-te Wurzel findet man im *Keyboard Math1*	$a \geq 0, \quad b \geq 0$ für die Wurzelgesetze.

Arbeitsblatt zu Wurzeln

1. Das Wurzelzeichen erhältst du über das Keyboard.
Vereinfache die folgenden Terme (ziehe teilweise die Wurzel) ohne ClassPad Unterstützung und kontrolliere dein Ergebnis danach mit dem ClassPad.

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$ b) $\sqrt{2{,}56} \cdot \sqrt{100}$ c) $\sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{320}$ d) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$

e) $\sqrt{980}$ f) $\sqrt{\frac{9}{800}}$ g) $\sqrt{\frac{7}{27}} \cdot \sqrt{\frac{3}{49}}$ h) $\sqrt{27} + \sqrt{3}$

2. Gib den Term: √3+√12-√27 in den ClassPad ein, vereinfache ihn und erkläre das Ergebnis.

3. Gib in Spalte A der Tabellenkalkulation die Zahlen 0; 0,2; 0,4; … ; 2 und in Zelle B1: = √(2·A1-2,4) ein. Kopiere die Zelle B1 und füge den Inhalt in die Zellen B2 bis B11 ein. Beschreibe und erkläre die Inhalte der Zellen der Spalte B

4. Lass die Grafen folgender Funktionen zeichnen.

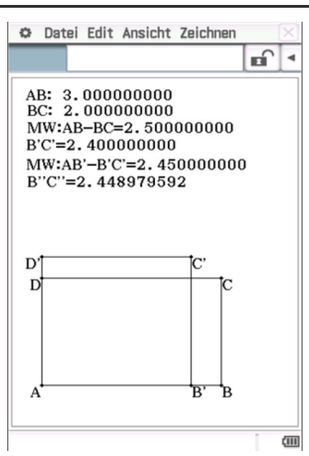
a) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ b) $g(x) = \sqrt{x^2}$

Gehe dazu in den Bereich Grafik & Tabelle.

x^2 wird eingegeben durch x^2

Erkläre den Verlauf der beiden Grafen.

5. Gib mit Hilfe des Heron Verfahrens eine dezimale Näherung für √6 an.



Erkläre dazu den Zusammenhang zwischen der Abbildung links und dem Algorithmus, mit dem sich eine dezimale Näherung für √6 bestimmen lässt.

Ist x_0 eine Näherung, so ist $\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{6}{x_0}\right)$ eine bessere Näherung.
Benutze für die Bestimmung die Tabellenkalkulation.

Probiere mehrere Anfangswerte aus.

Arbeitsblatt zu linearen Gleichungssytemen

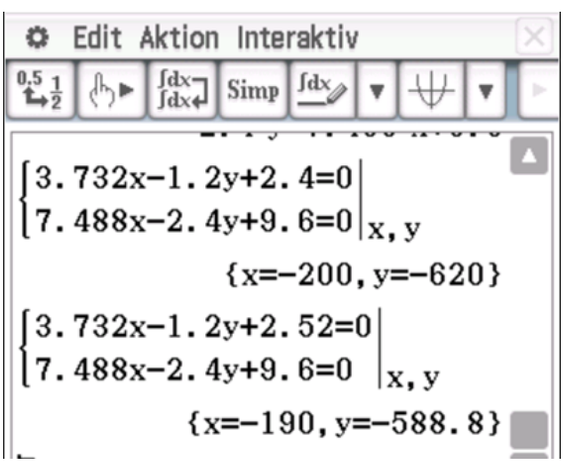
1. Löse die folgenden Gleichungssysteme ohne Rechnerunterstützung und überprüfe danach deine Ergebnisse mit dem ClassPad.

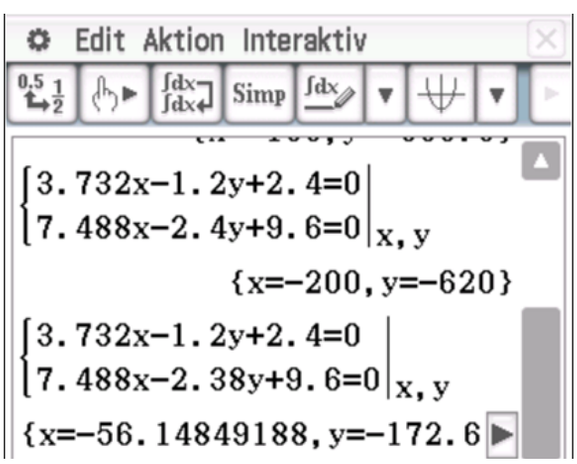
a) $3x + 5y = 38$ $\quad$ $y = 6x + 2$

b) $2 = 3t - s$ $\quad$ $4t + s = 8{,}5$

c) $2x + 3y = 5$ $\quad$ $4x = -6y + 6$

2. In den beiden Abbildungen unten sind jeweils zwei Gleichungssysteme angegeben.



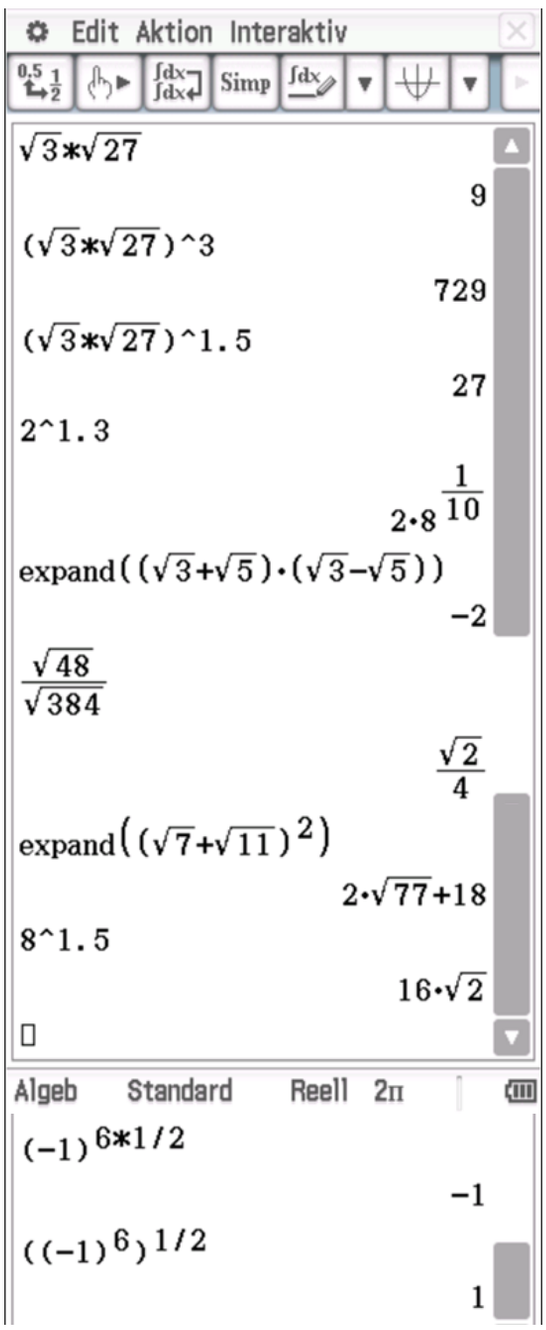


Die Koeffizienten des jeweils zweiten Systems sind nur an einer Stelle ein wenig verändert worden.

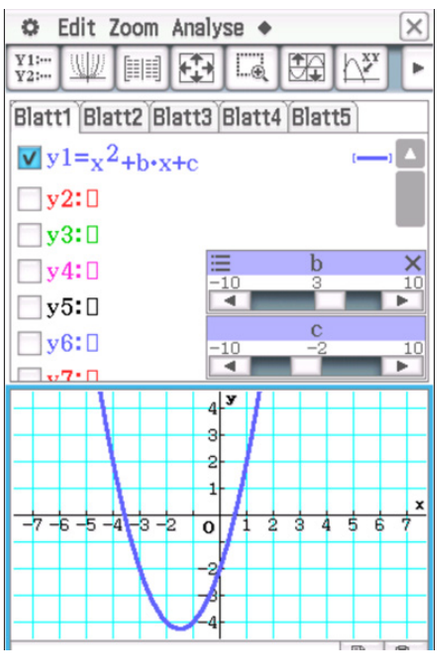
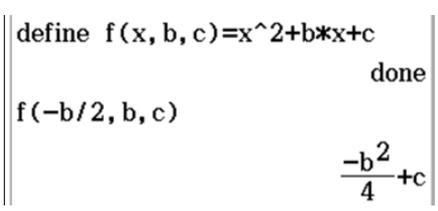
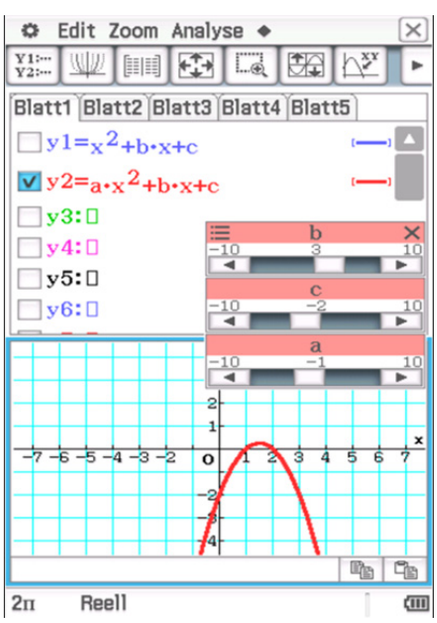
Beschreibe, welche Auswirkungen das auf die Lösungen hat.
Erkläre das unterschiedliche Lösungsverhalten durch eine grafische Veranschaulichung.
Welche Konsequenzen hat das, wenn man davon ausgeht, dass die Koeffizienten durch Messungen gewonnen worden sind?

Arbeitsblatt zu Potenzen und Wurzeln

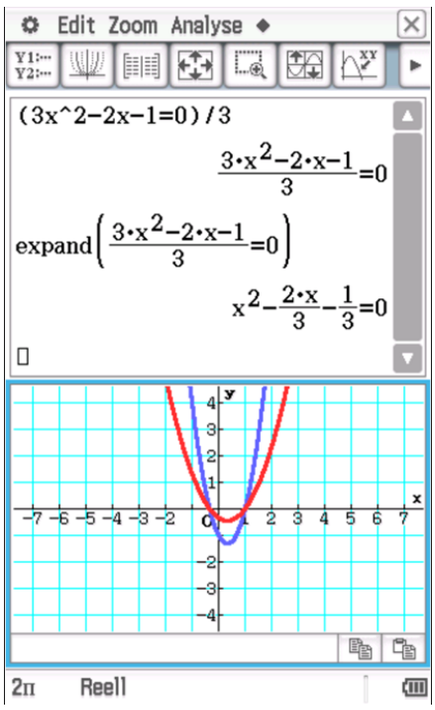
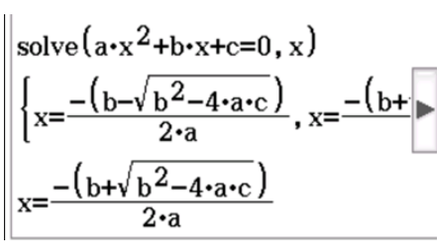
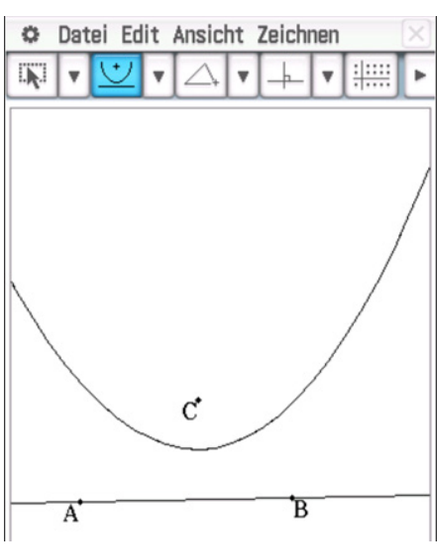
1. Im Folgenden siehst du Umformungen, die vom ClassPad vorgenommen worden sind. Gib jeweils die einzelnen Schritte an, die zu dem Ergebnis geführt haben.



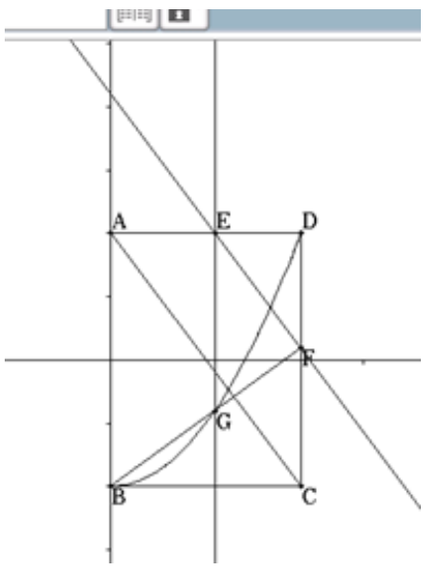
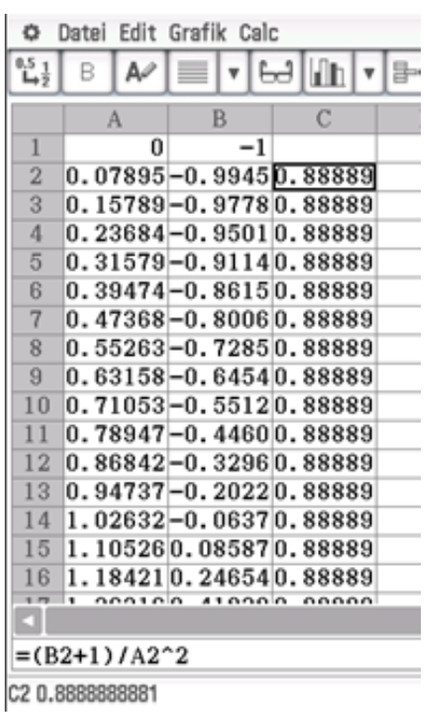
Quadratische Funktionen

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
– quadratische Funktionen: Term (Normalform, Scheitelpunktform), Graph, Tabelle, Scheitelpunkt, Symmetrie, Öffnung, Nullstellen und y-Achsenabschnitt,	
Bereich: Arithmetik / Algebra: Die Schülerinnen und Schüler (9) **wählen Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen begründet aus, vergleichen deren Effizienz und bestimmen die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung auch ohne Hilfsmitte**	
Die Schülerinnen und Schüler (2) **stellen Funktionen (lineare, quadratische, exponentielle Funktionen) mit eigenen Worten, in Wertetabellen, als Graphen und als Terme dar**	
für G-Kurs: (7) **erkunden und systematisieren mithilfe dynamischer Geometriesoftware den Einfluss der Parameter von Funktionen**	
(9) **formen Funktionsterme quadratischer Funktionen um und nutzen verschiedene Formen der Term Darstellung situationsabhängig**	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Um die Schieberegler zu erzeugen, muss die Funktionsgleichung mit variablen Koeffizienten eingegeben werden. Falls es Probleme gibt, sollte man im Variablenmanager nachschauen, ob sie nicht belegt sind. Die Schieberegler werden automatisch durch das Bedienen von erzeugt. In den Schiebereglern sind der Bereich und die Schrittweite einstellbar. Man findet die Einstellungsmöglichkeiten durch das Anklicken von:	Das Gebiet lineare Funktionen wurde schon in den Einsatzmöglichkeiten in 7 / 8 behandelt. Die Schülerinnen und Schüler können durch Benutzung des ClassPad mit Hilfe des Moduls *Grafik und Tabelle* den Zusammenhang zwischen der Lage des Grafen und den Koeffizienten selbst herausfinden. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler nur eine Variable zurzeit variieren. Die Bedeutung des Koeffizienten vor dem x^2 sollte erst in einem zweiten Schritt untersucht werden.
Den Befehl *define* findet man im Keyboard math3 oder man kann es auch alphabetisch eingeben. Alternativ kann man auch nur *define f(x)* eingeben und sich *f(-b/2)* berechnen lassen.	Neben den üblichen Eigenschaften können die Schülerinnen und Schüler zusätzlich herausfinden, dass für den x-Wert des Scheitelpunktes gilt: $x_s = -\frac{b}{2}$ Für den y-Wert gilt dann: $y_s=f(x_s)$. Mit dieser Kenntnis lässt sich die Funktions-gleichung in die Scheitelpunktform überführen: $$y = (x - x_s)^2 + y_s = 0$$ $$y = (x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c$$
Man sollte vorher im Variablenmanager klären, dass die benutzten Variablen nicht belegt sind.	Nur durch den Scheitelpunkt ist die Funktionsgleichung natürlich nicht eindeutig bestimmt. Nimmt man hinzu, dass der Koeffizient vor dem x^2 nach Voraussetzung zunächst den Wert 1 hat, ergibt sich die Eindeutigkeit. Aus der Scheitelpunkform kann man ohne die quadratische Ergänzung, die für Schülerinnen und Schüler in der Regel schwer nachvollziehbar ist, die p-q-Formel herleiten; bzw. wenn man die quadratische Ergänzung durchführen möchte, hat man eine zusätzliche Begründung für das Vorgehen. Gleichzeitig wurde das funktionale Verständnis durch die Bestimmung des y-Wertes des Scheitelpunktes gestärkt. Der Einfluss des Koeffizienten vor dem x^2 sollte im Anschluss untersucht werden. Für einen Erkenntnisgewinn sollte auch hier nur dieser Koeffizient variiert werden.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Bereich: Arithmetik / Algebra: Die Schülerinnen und Schüler **(9) wählen Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen begründet aus, vergleichen deren Effizienz und bestimmen die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung auch ohne Hilfsmittel** Im Lehrplan findet sich kein Hinweis darauf, dass Parabeln auch ein geometrisches Objekt sind, die sich als Ortslinien von Punkten mit gewissen Eigenschaften erzeugen lassen. Dies ist verständlich, da der Lehrplan ja allgemein verfasst ist und nicht die Anwendung von dynamischer Geometriesoftware voraussetzt.	  

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Wie schon bei den linearen Gleichungen lassen sich auch für die quadratischen die Umformungen durch den Rechner durchführen. Die umzuformende Gleichung ist dazu in Klammern zu setzen. Mit Hilfe des Befehls expand im Menü Umformungen lässt sich der große Bruchstrich auflösen. Für die grafische Darstellung wähle man , markiere den jeweiligen Funktionsterm und ziehe ihn in das untere Grafikfenster.	Quadratische Gleichungen der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ lassen sich umformen zu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Diese Umformung lässt sich grafisch veranschaulichen. Für die Schülerinnen und Schüler ist dabei zu erkennen, dass sich die Gestalt des Grafen ändert; aber beide Grafen identische Nullstellen haben. Bzgl. der Darstellung von Funktionen unterscheidet der ClassPad nicht zwischen dem Term und der Gleichung.
Man sollte vorher im Variablenmanager klären, dass die benutzten Variablen nicht belegt sind.	Wie schon oben erwähnt, lässt sich ein CAS als elektronische Formelsammlung nutzen. Es bleibt natürlich die Frage, ob man die a-b-c-Formel braucht, wenn sich jede quadratische Gleichung sowieso sofort lösen lässt.
Mit Hilfe des Geometrie-Programms des ClassPad lässt sich eine Parabel direkt erzeugen. Dazu wurde der Punkte C und die Gerade durch die Punkte A und B gezeichnet. Die Konstruktion erfolgt dann mit	Schülerinnen und Schüler lernen Parabeln in der Regel nur als Grafen von quadratischen Funktionen kennen. Eine Parabel ist aber auch der geometrische Ort aller Punkte, die zu einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Gerade den gleichen Abstand haben. Wenn man von der obigen Definition ausgeht, erscheint eine Konstruktion mit Hilfe der Animation sehr kompliziert, wenn nicht unmöglich. Für die Schülerinnen und Schüler bleibt aber wegen der direkten Konstruktion wenig zu entdecken und zu erkennen; natürlich abgesehen von der Tatsache, dass die Parabel obige Eigenschaft hat. Diese Eigenschaft ist mit Sicherheit für die Schülerinnen und Schüler nicht offensichtlich. Sie lässt sich aber zumindest für einige Punkte verifizieren.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler (5) bestimmen anhand des Graphen einer Funktion die Parameter eines Funktionsterms dieser Funktion Dies ist sicher vom Lehrplan nicht auf eine so konstruierte Parabel zu beziehen; aber im erweiterten Sinn sicher möglich.	 

	A	B	C
1	0	−1	
2	0.07895	−0.9945	0.88889
3	0.15789	−0.9778	0.88889
4	0.23684	−0.9501	0.88889
5	0.31579	−0.9114	0.88889
6	0.39474	−0.8615	0.88889
7	0.47368	−0.8006	0.88889
8	0.55263	−0.7285	0.88889
9	0.63158	−0.6454	0.88889
10	0.71053	−0.5512	0.88889
11	0.78947	−0.4460	0.88889
12	0.86842	−0.3296	0.88889
13	0.94737	−0.2022	0.88889
14	1.02632	−0.0637	0.88889
15	1.10526	0.08587	0.88889
16	1.18421	0.24654	0.88889

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Zunächst wird das Rechteck ABCD konstruiert. Auf die Bedeutung der Größenverhältnisse gehen wir später ein. Durch den Punkt E, der beliebig auf der Strecke AD liegt wird eine Parallele zur Diagonalen durch die Punkte A und C gezogen. Der sich ergebene Schnittpunkt F mit der Strecke DC wird mit dem Punkt B verbunden. Die Senkrechte zur Seite AD durch den Punkt E schneidet die Strecke BF im Punkt G. Die Parabel ergibt sich als Spur des Punktes G bei Animation des Punktes E. Die Animation wird folgendermaßen durchgeführt: Der Punkt E und die Strecke AD werden markiert. *Edit -> Animieren -> Animation hinzufügen* *Edit -> Animieren -> Ablaufen (einmal)* Um die Spur des Punktes G zu erhalten, muss dieser markiert werden und: *Edit -> Animieren -> Verfolgen* Die Spur des Punktes G kann man numerisch mit Hilfe der Tabellen erfassen. Zur Bearbeitung kopiert man diese in die Tabellenkalkulation. Dieses erreicht man dadurch, dass man nach der Animation den Punkt G markiert und im Messfenster das Tabellensymbol wählt. Es erscheinen dann die Koordinaten der Punkte, deren Spur bei der Animation gezeichnet worden sind. Diese Werte lassen sich, nachdem man die Spalte markiert hat, mit *kopieren* und *einfügen* direkt in die Tabellenkalkulation übertragen. Da der Scheitelpunkt im Punkt (0/1) liegt, sind die y-Werte für die Überprüfung um 1 zu erhöhen. Für die Überprüfung gehen wir auf die im Unterricht eher selten diskutierte Tatsache ein, dass y proportional zu x^2 gilt.	Es gibt vielfältige Möglichkeiten, Parabeln als Ortslinien zu konstruieren. Um dies durchzuführen, ist sinnvollerweise ein DGS zu benutzen. Als Ansatz wurde $f(x) = a \cdot x^2 - 1$ gewählt. Man erkennt, dass sich für a = 0,88889 ergibt. (s. Tabelle links unten). Mit den Schülerinnen und Schülern ist jetzt der Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Rechteckseiten und der Variablen a zu klären. Der Wert a = 8/9 ergibt sich natürlich aus dem Seitenverhältnis $a = \frac{2}{1{,}5^2}$ Es bleibt zu zeigen, dass der konstruierte Punkt G die Koordinaten $(x, \frac{b}{a^2}x^2)$ hat, dabei sei a die Länge der Rechteckseite in x-Richtung und b die Länge der Rechteckseite in y-Richtung. Für den Beweis sind die Punkte E, F und G relevant. Diese Punkte sind durch E(v/b), F(a/z) und G(v/w) gegeben. Zu zeigen ist: $w = \frac{b}{a^2} \cdot v^2$ Für die Gerade g durch die Punkte E und F gilt: $y = -\frac{b}{a} \cdot x + c$ Da die Gerade g durch die Punkte E und F bestimmt ist, folgt: $c = b + \frac{b}{a} \cdot v \ \ und \ \ z = -b + c = \frac{b}{a} \cdot v$ Als nächstes betrachten wir die Gerade h durch die Punkte B und F. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Punkt B im Koordinatenursprung liegt. Dann folgt für die Gerade h: $y = \frac{z}{a} \cdot x = \frac{b}{a^2} \cdot v \cdot x$ und damit $w = \frac{b}{a^2} \cdot v^2$. Damit ist auch die oben vermutete Beziehung zwischen den Seitenverhältnissen und dem Proportionalitätsfaktor bestätigt. Dies Beispiel ist sicher äußerst anspruchsvoll und von daher eher für leistungsstarke Gruppen geeignet.

Arbeitsblatt zu quadratischen Funktionen und deren Grafen und quadratische Gleichungen

1. Gib im Modul Grafik & Tabelle den Term: a x^2+b x+c ein und wähle . Mit Hilfe der Schiebregler kannst du die Koeffizienten a, b und c verändern. Beginne mit der Variablen c und beschreibe die Veränderungen. Verfahre entsprechend mit den Variablen b und a.
Achte bei der Veränderung von b insbesondere darauf, wie sich der Scheitelpunkt verändert.

2. Oben hast du erfahren, dass für eine Parabel, die durch f(x)= x^2+b·x+c (*) gegeben ist, der x-Wert des Scheitelpunktes durch $-\frac{b}{2}$ bestimmt ist.

Erläutere, dass für den y-Wert des Scheitelpunktes $y_s = f(-\frac{b}{2})$ gilt.

Begründe, dass sich jede quadratische Funktion (*) auch in der Form f(x)= $(x-x_s)^2 + y_s$ schreiben lässt.

Forme die folgenden Gleichungen entsprechend um:

a) f(x) = x^2 + 6x + 5
b) f(x) = x^2 +8x + 20
c) f(x) = x^2 - 3x + 2
d) f(x) = x^2 - 4x + 4

3. Wir wollen im Folgenden Gleichungen der Art f(x) = 0 lösen. Beschreibe die geometrische Bedeutung dieser Aussage. Diskutiere die möglichen Lösungen der Gleichungen f(x) = 0 für die Funktionen in 2) Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Lage des Scheitelpunktes und der Anzahl der Lösungen.
Begründe, dass man Lösungen durch $x_{1/2} = x_s \pm \sqrt{y_s}$ erhält. Löse die Gleichungen f(x) = 0 für die Funktionen a) – d) und überprüfe die Lösungen anhand des Grafen.

Kompliziertere quadratische Gleichungen lassen sich immer auf die Form x^2+b·x+c=0 bringen. Falls du Probleme mit Term Umformungen hast, kannst du dich vom ClassPad unterstützen lassen. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $3x^2 - 4x - 4 = 0$
b) $2z^2 + 9z + 7 = 0$
c) $12x^2 + 2x = 9x^2 + 9x - 2$
d) $5x - 3 - 2x(3x - 4) = 4$
e) $x(3x - 7) = (x + 2)^2 + x - 4$

Tipp: Klammern lassen sich mit Hilfe von *interaktiv – Umformungen - expand ausmultiplizieren.*
Das Gegenteil bewirkt *interaktiv – Umformungen – faktoris – factor*.

Vergleiche für a) und b) jeweils die Grafen der Ausgangsfunktionstermen mit den umgeformten. Beschreibe und begründe den Zusammenhang.

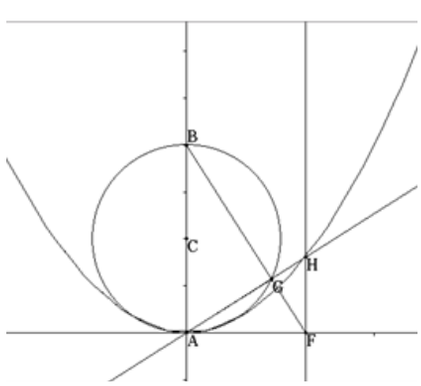
Arbeitsblatt zur geometrischen Konstruktion einer Parabel

Eine Parabel beschreibt diejenigen Punkte, die von einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkt den gleichen Abstand haben. Mit dem ClassPad lässt sich eine solche Parabel direkt „konstruieren“. Man benutze dazu in der zweiten Menüspalte des Geometriemoduls.

Konstruiere eine Parabel mit Hilfe des obigen Befehls und probiere für einzelne Punkte der Parabel aus, ob sie eine Gleichung der Art $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ erfüllen. (Tipp: Versuche die Parabel so zu legen, dass der Ursprung auf der y-Achse liegt, dann vereinfacht sich die Gleichung).

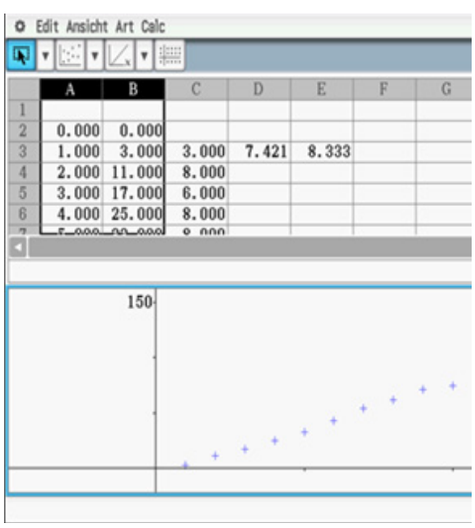
Als nächstes soll eine weitere Möglichkeit, eine Parabel zu konstruieren ausprobiert werden. Lege einen Punkt A in den Koordinatenursprung und einen zweiten Punkt B in (0,2). Konstruiere einen Kreis mit dem Mittelpunkt C(0,1), so dass die beiden Punkte A und B auf dem Kreis liegen. Lege eine Strecke, die durch die Punkte D und E begrenzt ist, auf die x-Achse. Lege auf diese Strecke den Punkt F und verbinde diesen mit dem Punkt B. Diese Strecke schneidet den Kreis; setze auf den Schnitt den Punkt G. Lege durch den Punkt F eine Senkrechte zur x-Achse bzw. zur Strecke DE. (Hinweis: Die Koordinatenachsen kann man nicht direkt zur Konstruktion benutzen.)

Zeichne eine Gerade durch den Koordinatenursprung (Punkt A) und den Schnittpunkt G zwischen dem Kreis und der Strecke BF (Punkt G).
Diese Gerade schneidet die Senkrechte durch den Punkt F. Setze auf den Schnittpunkt den Punkt H. Deine Konstruktion sollte in etwa dem Bild unten entsprechen. Die Parabel erhältst du durch eine Animation des Punktes F und der Verfolgung des Punktes H. Markiere dazu den Punkt F und die Strecke DE. Wähle: *Edit – Animieren – Animation hinzufügen*
Und Edit – Animieren – Ablaufen (einmal).
Markiere den Punkt H und wähle *Edit – Animieren – Verfolgen* und lass die Animation nochmals ablaufen.

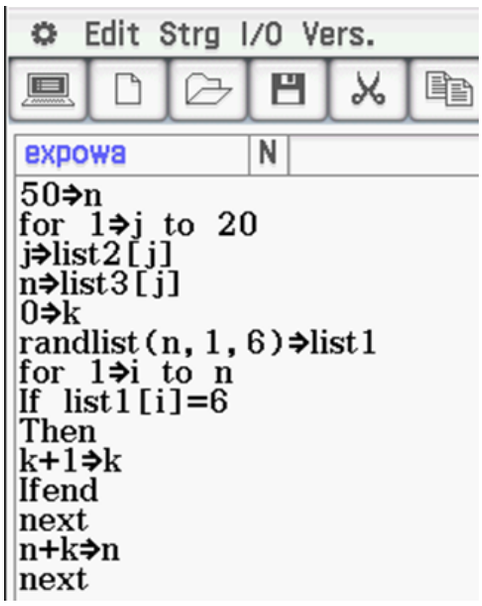
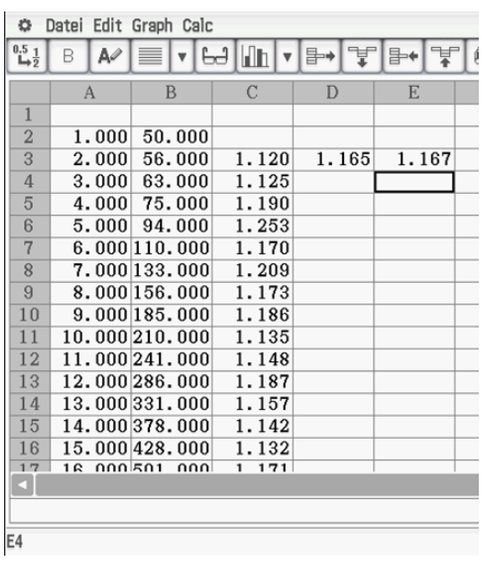
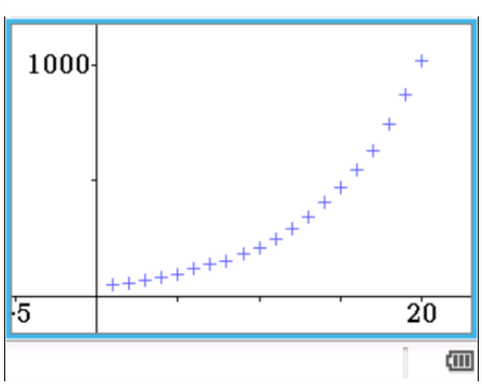


Mit Hilfe der Tabelle im Messfenster kannst du die Koordinaten der Punkte H erhalten. Übertrage diese in das Modul Tabellenkalkulation und überprüfe, ob die Koordinaten die Bedingung einer quadratischen Funktion erfüllen. (Tipp: Begründe, dass die Gerade AGH durch $y = \frac{z}{2r} \cdot x$ bestimmt ist, wenn der Punkt F die Koordinaten F(z,0) hat und benutze den Satz des Thales.)

Exponentielle Funktionen

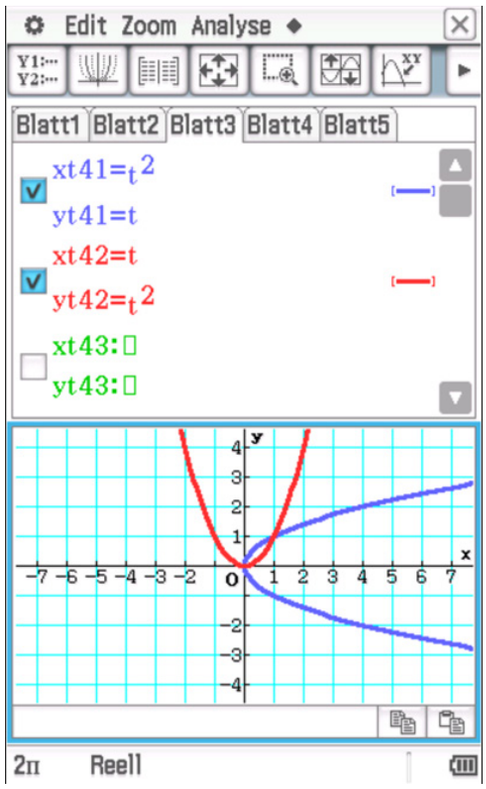
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler (3) **grenzen lineares, quadratisches und exponentielles Wachstum an Beispielen voneinander ab.**	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Man wählt im Menü *Programm* aus und gibt einen Namen für das zu erstellende Programm ein. Eventuell: *Edit -> Neue Datei* Nach der Eingabe des Namens gelangt man automatisch in den Programm Editor (s. Abbildung links) und gibt dort die Befehle entsprechend ein. Die Ausdrücke list1 usw. sind vordefinierte Listenvariablen, auf die man im Statistik Menü automatisch zugreifen kann. *randlis(50,1,6)* erzeugt eine Liste von Zufallszahlen (1, 2, …,6) der Länge 50. Die Variable k „zählt“ die Anzahl der „6“ beim jeweiligen Wurf. Wenn es vollständig eingegeben ist, wird es durch in Maschinensprache übersetzt. Bei programmsprachlichen Fehlern wird man darauf hingewiesen und gelangt automatisch wieder in den Programm Editor und kann den Fehler korrigieren. Änderungen speichern sollte mit ja beantwortet werden. Um das Programm laufen zu lassen, wähle man ▶. Um die Daten weiter zu verarbeiten, ruft man die Tabellenkalkulation auf, markiert die Zelle A2 (könnte auch genauso A1 sein) und wählt: *Datei -> Import* und gibt list2 ein. Mit der Spalte B führt man das gleiche mit *list3* durch. Die Spalte C wird gebildet durch: *C3: =B3-B2 -> Kopieren -> Einfügen* *D3: =mean(B2:B21)* Dadurch wird der Mittelwert der Zahlen in der Spalte B gebildet. E3: $=\frac{50}{6} \approx 8{,}333$	Um exponentielles und lineares Wachstum voneinander abzugrenzen, wird zunächst ein lineares Wachstum mit Hilfe einer Würfelsimulation diskutiert. Im Gegensatz zum exponentiellen Wachstum bleibt die Anzahl der Würfel konstant. Die gewonnenen Daten lassen sich dann am einfachsten in der Tabellenkalkulation weiter verarbeiten. Dies erscheint einfacher als wenn man in das Statistik Menü geht, wo man zwar einen direkten Zugriff auf die Daten hat, die Verarbeitung aber tlw. komplizierter ist.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler (3) **grenzen lineares, quadratisches und exponentielles Wachstum an Beispielen voneinander ab,** **exponentielle Funktionen:** **f(x)=a·q^x , a > 0, q > 0 , Term, Graph, Tabelle, Wortform, Wachstum (Anfangswert, Wachstumsfaktor und -rate, langfristige Entwicklung)**	  

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Das Programm unterscheidet sich nur unwesentlich von dem obigen. Die Anzahl der jeweiligen Würfel ist nun variabel. Dem „n“ werden die Anzahl der jeweils gewürfelten „6“ hinzuaddiert.	Zur Einführung des exponentiellen Wachstums kann man eine Würfelsimulation durchführen. Man beginnt z. B. mit 50 Würfeln, zählt die Anzahl der „6“ und erhöht die Zahl der Würfel um diese Anzahl. Dieses wird mehrfach wiederholt. Man kann dieses direkt mit den Schülerinnen und Schülern durchführen oder mit Hilfe des ClassPads ein Programm schreiben und eine Simulation durchführen. Entscheidend für ein exponentielles Wachstum ist die Quotienten Gleichheit zweier aufeinander folgender Werte, was hier in etwa gegeben ist. Die Schülerinnen und Schüler können den Wachstumsfaktor interpretieren, da dieser sich aus der Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln ergibt.
Im Gegensatz zu oben wird jetzt der Quotient gebildet (Spalte C). C3: *=B3-B2 -> Kopieren -> Einfügen* D3: *=mean(B2:B21)* Dadurch wird der Mittelwert der Zahlen in der Spalte B gebildet E3: =7/6≈1,167 Man erhält die grafische Darstellung, indem man die Spalten A und B markiert und auswählt. Durch diese Wahl ergibt sich ein direkter Bezug zwischen den beiden Spalten. Alle anderen grafischen Darstellungen stellen immer einen Bezug zwischen der Zeilennummer und der einen markierten Spalte her.	Eine Visualisierung durch einen Grafen mag einen Hinweis geben. Exponentielle Grafen unterscheiden sich aber lokal kaum von Grafen von Potenzfunktionen. Das links dargestellte Programm lässt sich durch eine kleine Änderung als Simulation für beschränktes Wachstum nutzen. Man muss nur die 6. Zeile durch: *randlist(500-n,1,6)=>list1* und als Grenze in der 7. Zeile 500-n wählen. Das Programmieren bietet den Schülerinnen und Schülern eine weitere Möglichkeit, exponentielles und beschränktes Wachstum zu verstehen. Ein Programm für logistisches Wachstum ist aufwendiger. Durch die beiden Programme wird der Unterschied zwischen linearem und exponentiellem Wachstum für die Schülerinnen und Schüler deutlich. Ein quadratisches Wachstum lässt sich mit Würfeln nicht simulieren; es sei denn man konstruiert eine entsprechende Zunahme, die dann aber gekünstelt wirkt.

Umkehrfunktionen

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
exponentielle Funktionen: **f(x)=a·q^x , a > 0, q > 0 , Term, Graph, Tabelle, Wortform, Wachstum (Anfangswert, Wachstumsfaktor und -rate, langfristige Entwicklung)** Umkehrfunktionen werden zwar nicht explizit genannt. Trotzdem sollten Grafen von Wurzelfunktionen diskutiert werden.	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Um Grafen von Umkehrfunktionen darzustellen, wählt man die Parameterdarstellung [Xt=] [▼] von Funktionen. Des Weiteren müssen im Grundformat die Winkel in Bogenmaß eingestellt sein und der Bereich für t: $-2\pi \leq t \leq 2\pi$. Wählt man andere Bereiche, so erhält man tlw. nicht die vollständigen Grafen.	Durch die Parameterdarstellung wird deutlich, dass das Bilden einer Umkehrfunktion bedeutet, dass x und y vertauscht werden. Auf diese Art lassen sich Grafen beliebiger Umkehrfunktionen darstellen. Dazu ist es nicht erforderlich den Funktionsterm der Umkehrfunktion zu kennen, was in der Regel ja auch nicht möglich ist. Aus der Darstellung wird deutlich, dass die Parameterdarstellung eigentlich für trigonometrische Funktionen gedacht ist.

Arbeitsblatt zum exponentiellen Wachstum und Funktion

Das folgende Programm simuliert ein Würfelspiel. Begonnen wird mit 50 Würfeln. Diese werden geworfen und die Anzahl der „6“ gezählt. Um genau diese Anzahl der „6“ wird die ursprüngliche Würfelzahl erhöht und wieder geworfen. Der obige Vorgang wird 20-mal wiederholt.

Edit Strg I/O Vers. expowa N 50⇒n for 1⇒j to 20 j⇒list2[j] n⇒list3[j] 0⇒k randlist(n,1,6)⇒list1 for 1⇒i to n If list1[i]=6 Then k+1⇒k Ifend next n+k⇒n next	Beginn mit 50 Würfel Die for-Schleife wiederholt den Vorgang 20-mal und wird mit dem next (letzte Zeile) abgeschlossen. Der jeweilige Durchgang wird in list2 gespeichert. Die Anzahl der Würfel wird in list3 gespeichert. Der Zähler k der „6“ wird für jede neue Runde 0 gesetzt, Es wird eine zufällige Liste von Zufallszahlen (1 – 6) erzeugt. Zur Untersuchung wird diese in list1 gespeichert. Mit der zweiten for – Schleife wird die Anzahl der 6 ermittelt, indem für jedes Glied der Liste mit If geklärt wird, ob es eine „6“ ist. Diese Anzahl wir in der Variablen k gespeichert. Die Anzahl der Würfel wird um die Anzahl der „6“ erhöht. next beendet die for - Schleife

Um das Programm einzugeben, müssen Sie in das Programm Modul gehen. Falls schon ein Programm in ihrem Rechner gespeichert ist, wählen Sie Edit -> Neue Datei und geben einen Namen ein. Wenn keine Datei vorhanden ist, werden Sie gleich aufgefordert, einen Namen einzugeben. Danach gelangen Sie automatisch in den Programm Editor und können obiges Programm eingeben. Mit verlassen Sie den Editor und werden eventuell auf Fehler hingewiesen. Das Programm läuft nach Betätigung von ▶.

Gehen Sie in der Tabellenkalkulation in die Zelle A1 und wählen dann:

Datei -> Import : list2

Gehen Sie in der Tabellenkalkulation in die Zelle B1 und wählen dann:

Datei -> Import : list3

Nachdem Sie die Spalten A und B markiert haben, können Sie die Werte mit visualisieren.

Bilden Sie jeweils die Quotienten zweier aufeinander folgender Werte in Spalte B.
Treffen Sie eine Aussage über die sich ergebenden Quotienten und interpretieren den sich ergebenden Mittelwert. Sie erhalten diesen über Calc -> Listenstatistik ->= mean(B1:B20)

Arbeitsblatt zur Wurzelfunktion und Umkehrfunktion

Wir wollen die Grafen der Funktionen $f(x) = \sqrt[n]{x}$ interpretieren.

1) Als Einstieg wähle f(x)=√x und beschreibe den Grafen.

2) Gebe als nächstes $\sqrt[n]{x}$ ein und wähle für die Darstellung
Mit dem Schieberegler lässt sich das „n“ variieren. Beschreibe und interpretiere den Verlauf des Grafen für n = -4, -3, -2, … , 5, 6
Kannst du deine Erkenntnisse verallgemeinern?

3) Mit dem ClassPad lassen sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Grafen von Funktion und Umkehrfunktion untersuchen. Wähle dazu die Parameterdarstellung aus. Diese findest du im Menü: y= und wähle: xt=
Wenn du den Grafen der Umkehrfunktion zu $f(x)=x^2$ darstellen möchtest, gib folgendes ein:
$x_t : t \quad y_t : t^2$
$x_t : t^2 \quad y_t : t$

Für die Darstellung ist es wichtig, im Grundformat (oben links neben *Datei*) den Winkel auf *Bogenmaß* einzustellen. Dann ist noch der Bereich einzustellen:
Wähle entsprechend:

```
tθmin   :-6.3
 max    :6.3
 Schritt:0.05
```

Die Werte für t beziehen sich in der Regel auf Winkel.

6,3≈2π
Der Wertebereich für x und y ist natürlich entsprechend einzurichten.

Erkläre, warum der zweite Graf kein Graf einer Funktion ist. Was ist im Bereich zu ändern, damit sich ein Funktionsgraf ergibt?

Arbeitsblatt zum exponentiellen und linerarem Wachstum

Jahr	**Jahr**	**Jahr**	**Jahr**	**Jahr**	**Jahr**	**Jahr**	**Jahr**	**Jahr**
1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1971	1973
Prod.	**Prod.**	**Prod.**	**Prod.**	**Prod.**	**Prod.**	**Prod.**	**Prod.**	**Prod.**
1.567,6	1.702,2	1.826,2	1.992,3	2.144,5	2.358,5	2.493,6	2.635,4	2.875,8

Die Tabelle oben (Quelle: Wikipedia) zeigt die weltweite Ölförderung in Millionen Tonnen. Geben Sie die Werte in die Tabellenkalkulation ein und begründen Sie, dass es sich eher um exponentielles als um lineares Wachstum handelt.

Ermitteln Sie den durchschnittlichen Wachstumsfaktor und begründen Sie, dass hier nicht das arithmetische, sondern das geometrische Mittel zu bestimmen ist.
Schätzen Sie die weltweite Ölförderung anhand der Daten für das Jahr 1983 und vergleichen Sie diesen Wert mit dem tatsächlichen.

Wir gehen weiter vom obigen ermittelten durchschnittlichen Wachstumsfaktor aus. Schätzen Sie ab, wie lange es dauern würde, bis 50 Millionen Tonnen von 1965 beginnend gefördert wurden.

Beurteilen Sie die gemachten Annahmen in Bezug auf die tatsächlichen Werte.

Lösungen zum exponentiellen Wachstum

Datei Edit Grafik Calc

	A	B	C	D	E	F	G	H
1							a	1366.24
2	1965	1567.6					b	162.23
3	1966	1702.2	1.08586	134.6			r	0.99757
4	1967	1826.2	1.07285	124			r^2	0.99515
5	1968	1992.3	1.09095	166.1			MSe	1099.12
6	1969	2144.5	1.07639	152.2				
7	1970	2358.9	1.09998	214.4				
8	1971	2493.6	1.05710	134.7				
9	1972	2635.4	1.05687	141.8				
10	1973	2875.8	1.09122	240.4				
11								
12		19596.5	1.07890					
13								
14		3136.21	1.09055					
15		3420.20						
16		3729.90						
17		4067.65						
18		4435.98						
19		4837.67						
20		5275.72						

=B3−B2

D3 134.6

Die Werte sind in die Tabellenkalkulation übertragen (Spalten A und B).
In Spalte C wurden die jeweiligen Quotienten zweier aufeinander folgender Werte gebildet und in Spalte D die Differenzen. Daraus lässt sich schließen, dass es sich eher um ein exponentielles als um ein geometrisches Wachstum handelt.

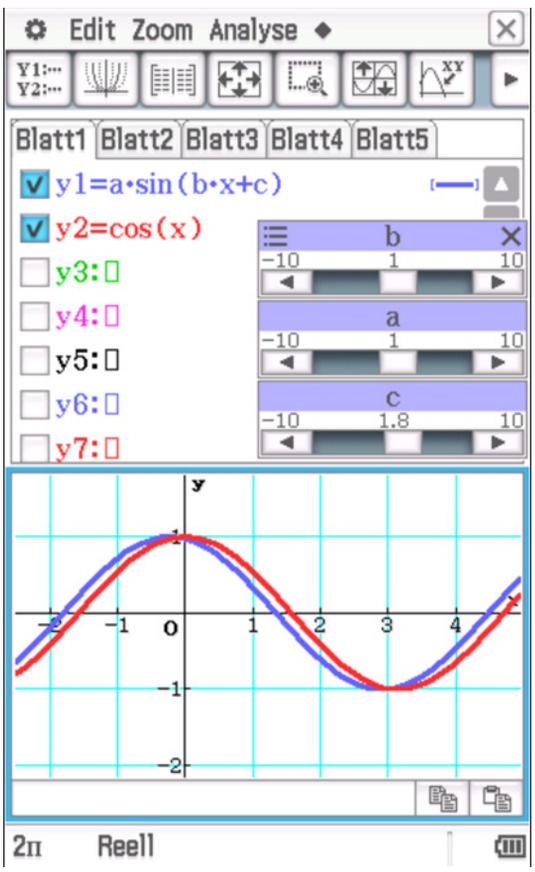
In C12 *(=mean(C3:C10)* steht das arithmetische und in C14 das geometrische Mittel. Für die Bestimmung des geometrischen Mittels gibt es keinen Befehl; sondern man muss die Berechnung direkt eingeben.
Auf Grund des exponentiellen Wachstums ist das geometrische Mittel zu wählen.
1983: $2875{,}8 \cdot 1{,}09055^{10} \approx 6842{,}5$

Laut Wikipedia betrug die Fördermenge in 1983 tatsächlich 2762 Millionen Tonnen.
In B12 ist die Summe für die Jahre 1965 bis 1973 angegeben. Addiert man die Werte bis 1980 auf, so erhält man eine Fördermenge von ca. 48500 Millionen Tonnen. Das heißt, im Jahre 1981 werden die 50000 Millionen Tonnen überschritten; also nach etwas mehr als 15 Jahren.

Wie die weiteren tatsächlichen Werte auch zeigen, gibt es für ein exponentielles Wachstum keine wirklichen Argumente. Es erscheint eher zufällig, dass sich die Werte in den ersten Jahren nach 1965 so beschreiben lassen. Bestätigt wird dies durch die durchgeführte exponentielle Regression (s. Spalten G und H).

Dies Beispiel zeigt insbesondere, dass es exponentielles Wachstum in realen Kontexten nur über kurze Intervalle geben kann. Eine Ausnahme ist da höchstens der radioaktive Zerfall.

Trigonometrische Funktion

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler *(14) beschreiben unter Anwendung digitaler Mathematikwerkzeuge periodische Vorgänge mithilfe von Sinusfunktionen der Form* *f(x) = a·sin(b·x).*	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Es ist möglich, für bis zu 3 Koeffizienten Schieberegler anzulegen. So lassen sich auch noch Verschiebungen in Richtung der x-Achse erkunden. Es ist darauf zu achten, dass die Variablen a, b und c nicht schon belegt sind. Falls das der Fall ist, sind diese im Variablenmanager zu löschen. Für die Darstellung ist zu wählen. Minimum und Maximum sowie die Schrittweite lassen sich über wählen. Auch wenn der Term für die cos-Funktion frei von Koeffizienten ist, wählt man für die Darstellung beider .	Mit Hilfe des links abgebildeten Tools können die Schülerinnen und Schüler eigenständig die Bedeutung der Koeffizienten für den Grafen eigenständig erkunden. Damit der Zusammenhang zur cos-Funktion deutlich wird, halten wir es für sinnvoll die Darstellung aus dem Lehrplan um den Koeffizienten c (s. Abb. links) zu ergänzen. Deutlich wird so die Gleichung: $\sin(x+\pi/2)=\cos(x)$ Die Einführung der trigonometrischen Funktionen mit der Erweiterung des Definitionsbereichs erfolgt im Rahmen der Geometrie.

Arbeitsblatt zu trigonometrischen Funktionen

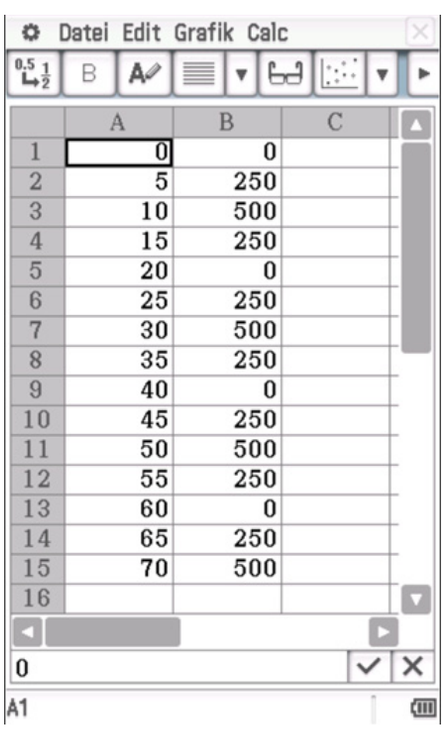
Geben Sie im Modul Grafik & Tabelle den Funktionsterm a·sin(b·x+c) ein. Geben Sie zusätzlich cos(x) ein. Für die Darstellung, nachdem beide Funktionsterme markiert sind, wählen Sie . Wenn nicht drei Schieberegler zu sehen sind, schauen Sie im Variablenmanager nach, ob die Variablen schon belegt sind.

1) Welche Auswirkungen haben Veränderungen der Variablen a, b und c für den Grafen? Verändern Sie zurzeit nur einen Koeffizienten.

2) Ist es möglich, die beiden Funktionsgrafen zur Deckung zu bringen? Was bedeutet dies für die sin- und cos- Funktion?

3)Es gilt: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Lassen Sie den Grafen der tan-Funktion zeichnen und erklären Sie den Verlauf im Hinblick auf die Definition.

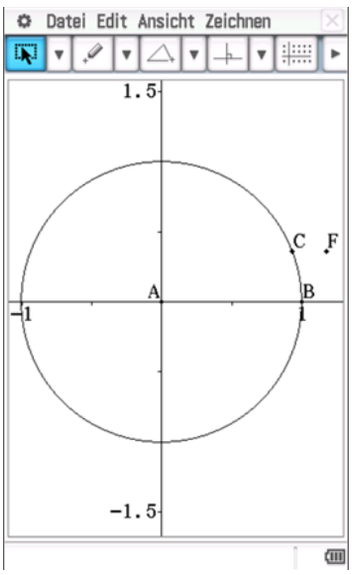
4) Gegeben sind die folgenden Daten, die sich auf das Londoner Riesenrad beziehen.

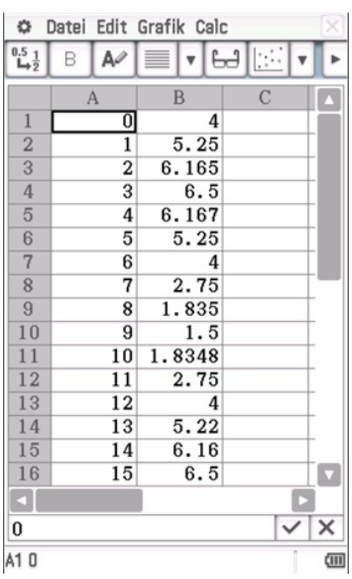


	A	B	C
1	0	0	
2	5	250	
3	10	500	
4	15	250	
5	20	0	
6	25	250	
7	30	500	
8	35	250	
9	40	0	
10	45	250	
11	50	500	
12	55	250	
13	60	0	
14	65	250	
15	70	500	
16			

Die Spalte A gibt die Zeit t in Minuten, die Spalte B die Höhe der Gondel über dem Erdboden in feet an.
Übernehmen Sie die Tabelle in die Tabellenkalkulation des ClassPad.
Markieren Sie die Spalten A und B und lassen Sie die Werte grafisch mit darstellen.
Begründen Sie, dass sich die Werte durch eine Sinusfunktion darstellen lassen. Im Rechner gibt es die Möglichkeit, dass funktionale Näherungen für gegebene Funktionswerte bestimmt werden. Man nennt dies Regression. Um eine solche durchzuführen, wählen Sie:
Calc -> Regressionen -> Sinus-Reg. Die Spalten A und B müssen vorher markiert sein.
Sie erhalten eine Funktionsgleichung. Interpretieren Sie die sich ergebenden Koeffizienten bezogen auf das Riesenrad.

5) Gegeben ist eine Feder, an der ein Gewicht hängt



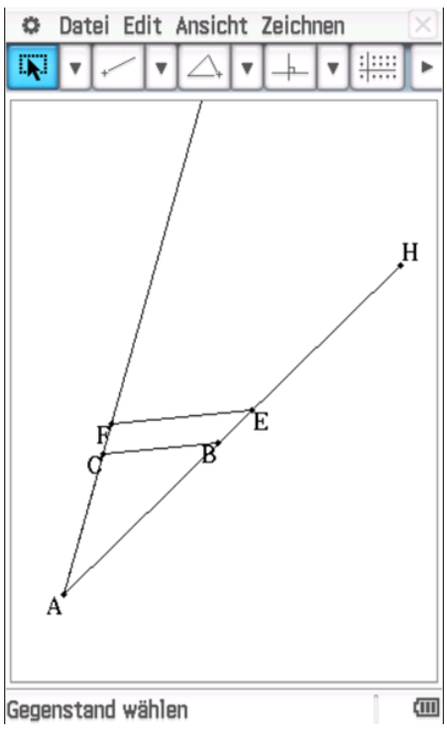
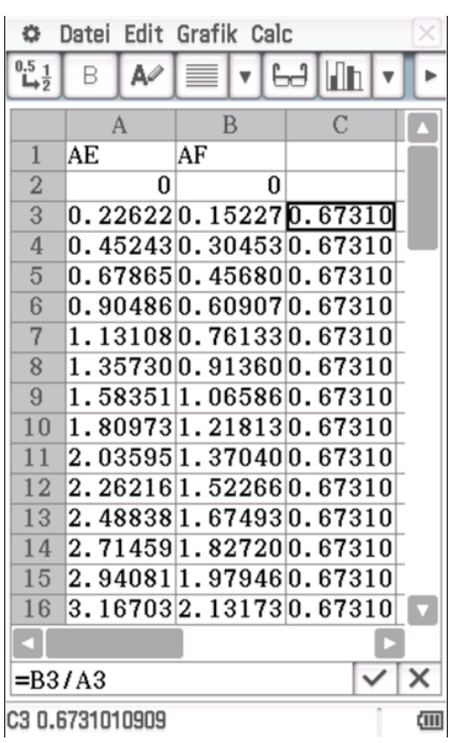


	A	B	C
1	0	4	
2	1	5.25	
3	2	6.165	
4	3	6.5	
5	4	6.167	
6	5	5.25	
7	6	4	
8	7	2.75	
9	8	1.835	
10	9	1.5	
11	10	1.8348	
12	11	2.75	
13	12	4	
14	13	5.22	
15	14	6.16	
16	15	6.5	

Führen Sie im Geometrie-Modul die in der Abbildung links gezeigte Konstruktion durch. Der Punkt C liegt auf dem Kreis. Der Punkt F wurde so konstruiert, dass er zum einen auf einer Parallelen zur y-Achse liegt und zum anderen auf einer Parallelen zur x-Achse durch den Punkt C. Die für die Konstruktion erforderlichen Geraden sind verborgen. (Objekt markieren -> *Edit* -> *Eigenschaften* -> *Ausblenden*) Führen Sie eine Animation durch: C und den Kreis markieren -> *Edit* -> *Animieren* -> *Animation hinzufügen*
Edit -> *Animieren* -> *Ablaufen*
Begründen Sie anhand der Animation, dass man den Aufenthaltsort eines Gewichtsstücks, das an einer Feder hängt mit einer Sinusfunktion beschreiben kann. Stellen Sie einen Zusammenhang zur Kreisbewegung her

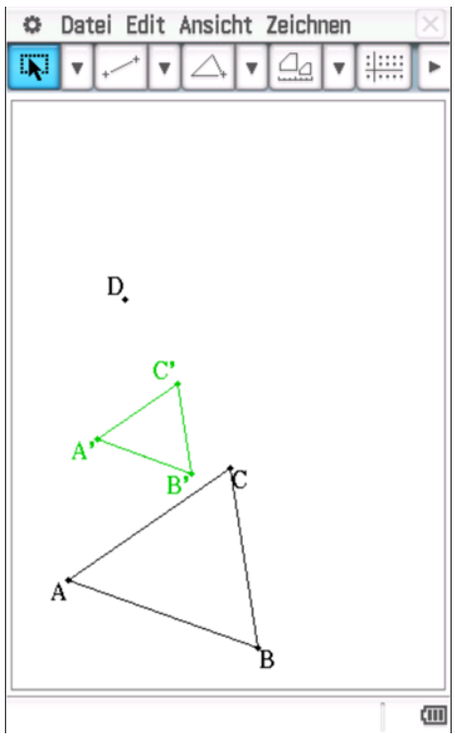
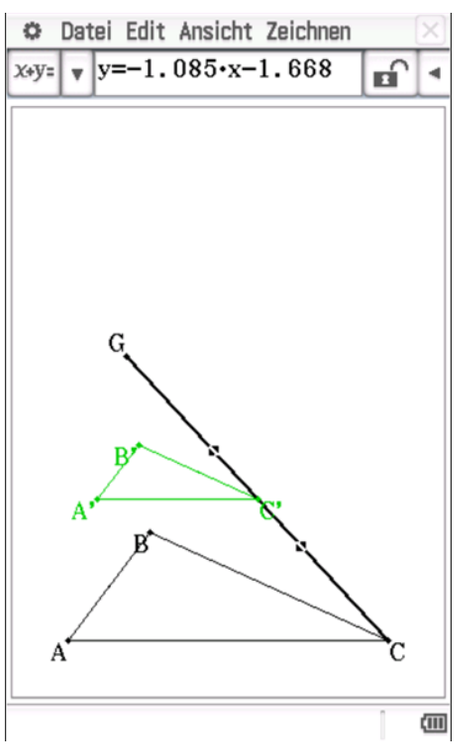
Die Spalte A gibt die Zeit in Sekunden, die Spalte B die Höhe eines Gewichtsstücks, das an einer Feder hängt in cm.
Übernehmen Sie die Tabelle in die Tabellenkalkulation des ClassPad.
Markieren Sie die Spalten A und B und lassen Sie die Werte grafisch mit ⊡ darstellen.
Geben Sie anhand des Grafen eine Funktion h(t) an, die die Höhe des Gewichtsstücks zum jeweiligen Zeitpunkt angibt.

Geometrie Ähnlichkeit

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
– maßstäbliches Vergrößern und Verkleinern – Ähnlichkeit Die Schülerinnen und Schüler (1) **vergrößern und verkleinern einfache Figuren maßstabsgetreu**	 

	A	B	C
1	AE	AF	
2	0	0	
3	0.22622	0.15227	0.67310
4	0.45243	0.30453	0.67310
5	0.67865	0.45680	0.67310
6	0.90486	0.60907	0.67310
7	1.13108	0.76133	0.67310
8	1.35730	0.91360	0.67310
9	1.58351	1.06586	0.67310
10	1.80973	1.21813	0.67310
11	2.03595	1.37040	0.67310
12	2.26216	1.52266	0.67310
13	2.48838	1.67493	0.67310
14	2.71459	1.82720	0.67310
15	2.94081	1.97946	0.67310
16	3.16703	2.13173	0.67310

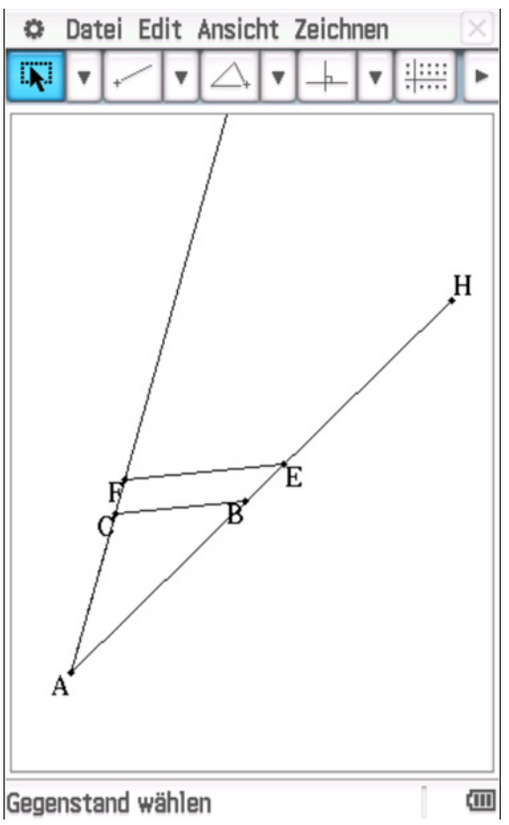
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die Strecke AH wird beliebig gezeichnet, auf diese der Punkt B gelegt und ein weiterer Punkt C wird gezeichnet. Von A beginnend wir über C eine Halbgerade gezeichnet. Auf die Strecke AH wird ein weiterer Punkt E und durch E eine Parallele zur Strecke BC gelegt. Dazu ist die Strecke BC und der Punkt E zu markieren und zu wählen. Der Schnittpunkt mit der Halbgeraden AC wird als Punkt F gesetzt. Zur besseren Übersicht verbirgt man die Parallele und zeichnet die Strecke EF. Für die Animation ist der Punkt E und die Strecke AH zu markieren. *Edit -> Animieren -> Animation* hinzufügen *Edit -> Animieren -> Ablaufen (einmal)* Die Längen der Strecken AE und AF erhält man im Messfenster. Dazu wird die Strecke markiert und das Tabellensymbol gewählt. Mit *Edit -> Kopieren -> Wechsel* in die Tabellenkalkulation (*Edit -> Einfügen*) lassen sich die Werte übertragen. Die Quotientenbildung Spalte C erfolgt durch: C3: *=B3/A3* *Edit -> Kopieren* *Edit -> Einfügen*	In ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Winkel gleich groß. Dies ist in Strahlensatzfiguren automatisch gegeben. Daraus leitet sich die wesentliche Eigenschaft ähnlicher Figuren ab, dass die Quotienten sich entsprechender Seitenlängen gleich sind. Im Unterricht ist noch zu diskutieren, inwieweit obiges noch zu beweisen ist.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
– maßstäbliches Vergrößern und Verkleinern – Ähnlichkeit Die Schülerinnen und Schüler (1) **vergrößern und verkleinern einfache Figuren maßstabsgetreu**	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Zunächst wurde das Dreieck ABC gezeichnet. Es spielt dabei keine Rolle, ob dieses einzeln über Punkte und Strecken oder als Ganzes durch [△] erzeugt wurde.	Anstatt ähnlich erzeugte Figuren vorzugeben, lassen sich diese natürlich auch durch eine zentrische Streckung erzeugen. Für die Schülerinnen und Schüler besteht so die Möglichkeit, die Parallelität der einzelnen Strecken zueinander und damit verbunden die Gleichheit entsprechender Winkel zu entdecken.
Streckungen sind direkt durch [⌂] möglich. Man wählt das Symbol und klickt auf das Geometriefenster. Dadurch wird das Streckzentrum (Punkt D in der Abbildung links) automatisch erzeugt. Als nächstes wird man aufgefordert, den Streckfaktor (0,5 in der Abb. links) einzugeben.	
Es ist nicht erforderlich, dass ursprüngliche Dreieck zu markieren. Dies hat zur Konsequenz, dass auch mehrere Figuren gleichzeitig gestreckt werden.	
Ein Ziehen an einem der Punkte des ursprünglichen Dreiecks verändert automatisch die Lage des Bildpunktes.	Es lässt sich auch zeigen, dass die Punkte D, A´ und A auf einer Geraden liegen. Entsprechendes gilt auch für die anderen Punkte.
Die Strecke GC wird eingezeichnet. Im Messfenster lässt sich die Gleichung der Geraden angeben, auf der die Strecke GC liegt. Dazu ist sie zu markieren und [x+y=] zu wählen.	Da sich die jeweiligen Geradengleichungen auch angeben lassen, haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, auch algebraisch zu überprüfen, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen. Natürlich ist auch eine Bestimmung der Gleichung anhand der Punkte möglich. Schülerinnen und Schülern wird so deutlich, dass natürlich auch im Geometrie Modul im Hintergrund „gerechnet“ wird.

Arbeitsblatt zur Ähnlichkeit

Den Begriff ähnlich kennen wir aus dem Alltag. Um ihn in der Mathematik zu benutzen, muss er präzisiert werden. Dies soll im Folgenden geschehen.
Gehen Sie dazu in den Geometrie Modul Ihres ClassPads und erzeugen ein Bild, das in etwa, wie das folgende aussieht:

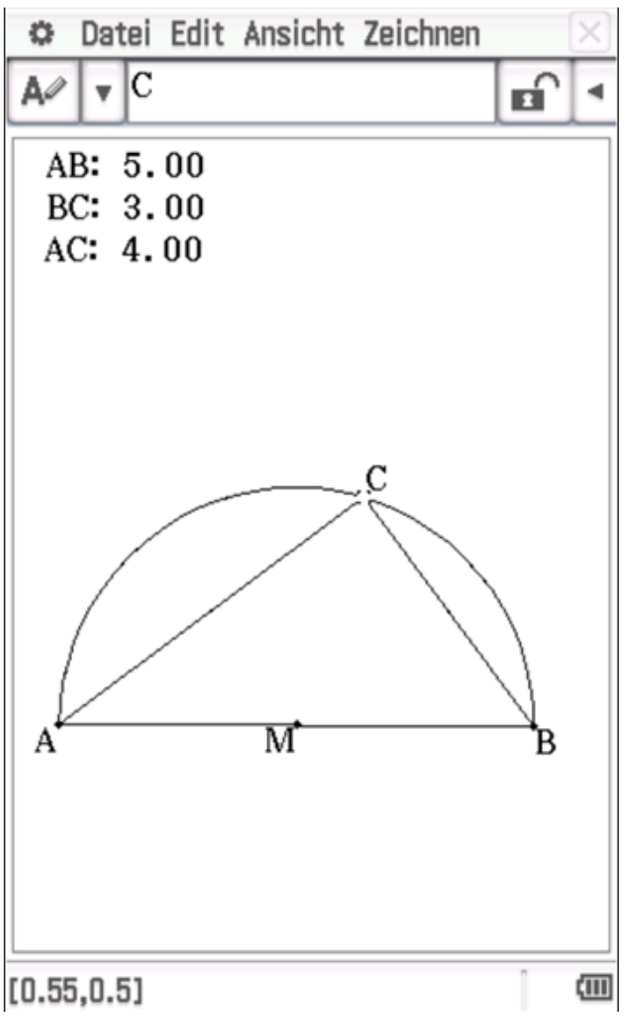


Wir zeichnen als erstes die Strecke AH und eine Halbgerade von A ausgehend. Auf die Strecke AH wird der Punkt B und auf die Halbgerade der Punkt C gelegt und die beiden werden durch eine Strecke verbunden. So entsteht das Dreieck ABC.
Der Punkt E liegt ebenfalls auf AH. Durch E konstruieren wir eine Parallele zu BC.
BC und E markieren -> ∥
Es ergibt sich ein Schnittpunkt mit der Halbgeraden. Dieser wird als Punkt F gekennzeichnet. Der Übersicht halber lässt sich die Parallele ausblenden (Gerade EF markieren -> *Edit* -> *Eigenschaften* -> *Ausblenden*)
Danach lässt sich die Strecke EF einzeichnen.
Die Dreiecke ABC und AEF sind ähnlich.

Notieren Sie alle Gemeinsamkeiten der beiden entstandenen Dreiecke.
Begründen Sie, dass die entsprechenden Winkel in den Dreiecken gleich sind.
Begründen Sie, dass zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn 2 ihrer Innenwinkel gleich groß sind.

Die Dreiecke ABC und AEF haben eine spezielle Lage zueinander. Lässt sich obiges für beliebige Dreiecke verallgemeinern?

Arbeitsblatt zum Satz des Pythagoras



Stellen Sie eine Zeichnung entsprechend der linken her. Es ist erforderlich, dass Sie zunächst einen Halbkreis zeichnen und den Punkt C auf diesen Kreis legen. Die Strecke AB ist ein Durchmesser des Halbkreises. Markieren Sie dann diese, gehen Sie ins Messfenster und legen Sie die Länge auf 5 Einheiten fest.

Verschieben Sie den Punkt C auf dem Halbkreis so, dass sich für die Seitenlängen die angegebenen Werte ergeben.

Begründen Sie, dass der Winkel beim Punkt C unabhängig von der Lage ein rechter ist.

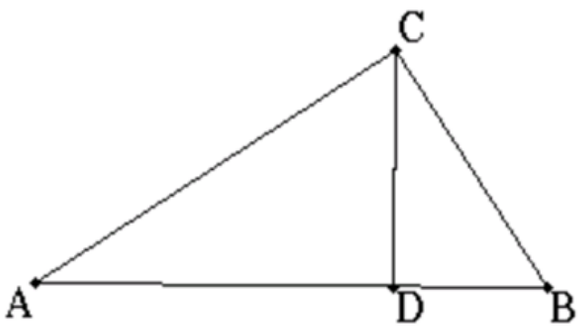
Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den drei Seitenlängen.

Klar ist, dass L(AB)<L(BC)+L(AC)

Wir suchen aber einen anderen Zusammenhang, der für rechtwinklige Dreiecke gilt.

Wenn Sie den Zusammenhang gefunden haben, überprüfen sie ihn durch Verschieben des Punktes C auf dem Halbkreis.

In dem Top Down Menü *Zeichnen* finden Sie den Button *Formelterm*. Mit diesem können Sie in dem Geometrie Bereich einen Term erzeugen, der sich auf die Seitenlängen bezieht. Die einzelnen Terme auf dem Bildschirm werden durchnummeriert und man kann mit @1, @2 usw. auf sie zugreifen.

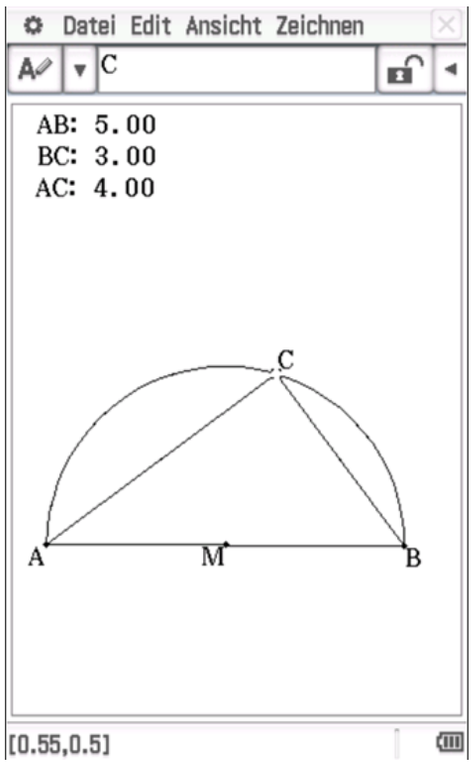
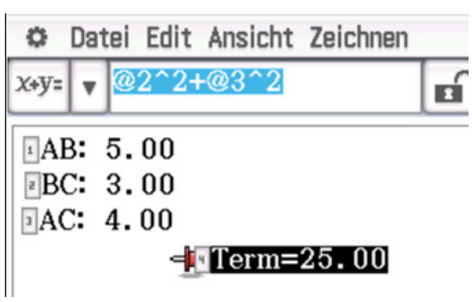
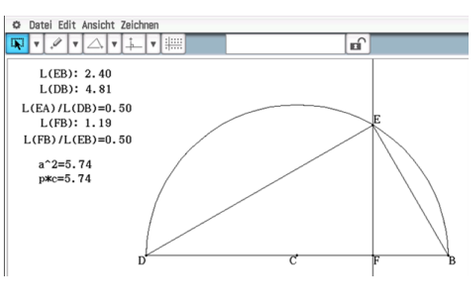


Auch wenn Sie den Zusammenhang für viele Beispiele überprüft haben, ist das natürlich kein Beweis. Um den Satz des Pythagoras zu beweisen, wird das ursprüngliche Dreieck durch die Höhe h_c in zwei Teildreiecke aufgeteilt.
Begründen Sie, dass das ursprüngliche Dreieck und eines der Teildreiecke ähnlich sind.
So ist die Seite a in dem großen Dreieck Kathete und in dem kleinen Dreieck Hypotenuse.

Begründen Sie, dass $\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB}$ bzw. $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$,
wobei p = AD und q = DB die entsprechenden Hypotenusen Abschnitte sind.

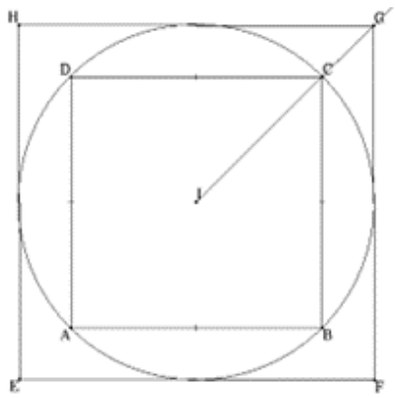
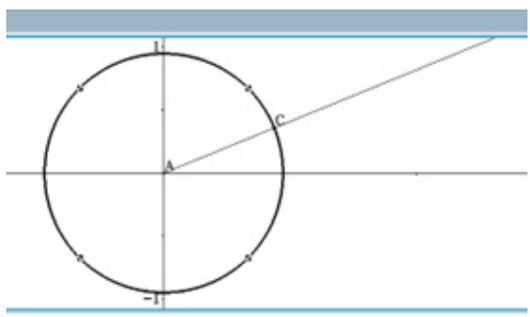
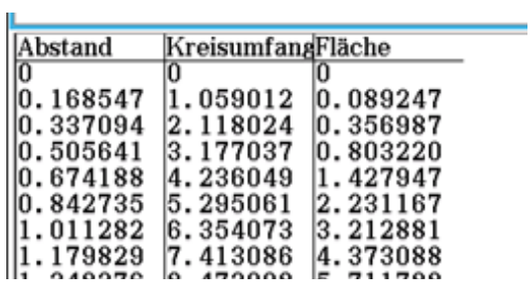
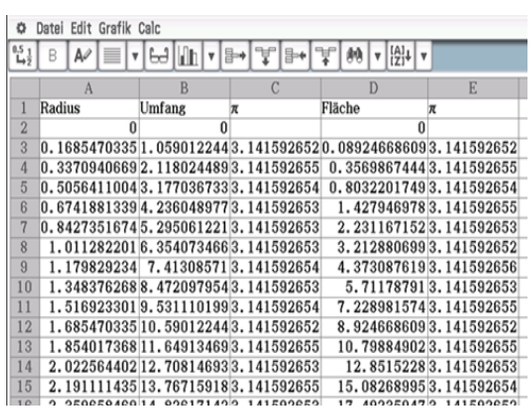
Ziehen Sie am Punkt C und beobachten Sie, inwiefern sich die Seitenverhältnisse verändern.
Begründen Sie, dass dann
$a^2 = c \cdot q$ bzw. $b^2 = c \cdot p$ gelten muss. Dieses nennt man den Kathetensatz für rechtwinklige Dreiecke
Begründen Sie den
Satz des Pythagoras: $a^2+b^2= c^2$ mit γ =90°

Der Satz des Pythagoras

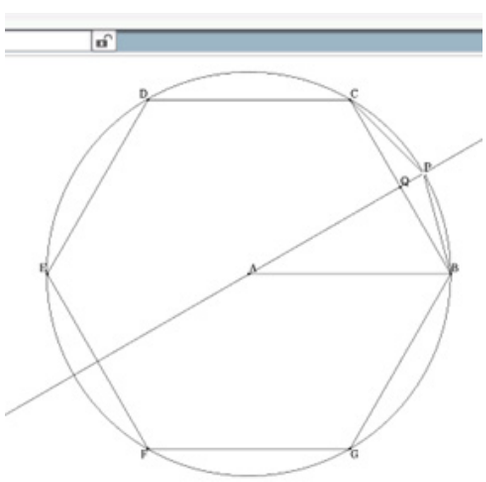
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
– geometrische Sätze: Satz des Pythagoras Die Schülerinnen und Schüler **(4) beweisen den Satz des Pythagoras**	 
– Ähnlichkeit	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Es wird zunächst die Strecke AB gezeichnet und deren Länge im Messfenster auf 5 festgesetzt. Dies geschieht, indem die Länge zunächst beliebig ist und der Wert auf 5 verändert wird und mit fixiert wird. A und B werden markiert -> *Konstruiere* -> *Mittelpunkt*. Den Halbkreis erhält man mit Erst M -> B -> A anklicken. Der letzte Punkt wird neu erzeugt. Deswegen wird der Punkt A vorher ausgeblendet. (A markieren -> *Edit* -> *Eigenschaften* -> *Ausblenden*). Die Punkte lassen sich umbenennen (Punkt markieren -> im Messfenster neuen Namen eingeben) Der Punkt C wird zunächst beliebig auf den Kreis gelegt und die Strecken BC und AC eintragen. Die Strecken BC und AC werden ebenfalls im Messfenster gemessen, markiert und auf den Geometrie-Bildschirm gezogen. Der Punkt C wird markiert und lässt sich dann auf dem Halbkreis bewegen. Für die Überprüfung kann ein Formelterm erzeugt werden. Im Messfenster: *Zeichnen* -> *Formelterm* Die Terme im Geometriefenster werden nummeriert. Mit @1 usw. kann auf sie zugegriffen werden. Der Ausdruck Term kann natürlich noch verändert werden.	Die Konstruktion links stellt eine Hinführung zum Satz des Pythagoras dar. Eventuell besteht die Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang erkennen, wenn spezielle Längen der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks vorgegeben sind. Die Länge AB wurde direkt vorgegeben. Die beiden anderen erhält man, wenn man C so verschiebt, dass CB 3 Einheiten bzw. AC 4 Einheiten lang sind. Wenn erkannt wurde, dass $5^2=3^2+4^2$ gilt, lässt sich dieses für andere Längen überprüfen. Dies ist natürlich kein Beweis. Der Satz lässt sich beweisen, indem man die Höhe zur Seite c einzeichnet. Diese zerlegt das ursprüngliche Dreieck in zwei Dreiecke, die zum ursprünglichen ähnlich sind. Es macht Sinn, zunächst den Kathetensatz zu beweisen. Der Beweis ergibt sich direkt aus der Abbildung links. Die Benutzung der DGS ist hier nicht erforderlich. Die benötigte Gleichheit der Quotienten ergibt sich direkt aus der Ähnlichkeit der entstandenen Teildreiecke. Der Satz des Pythagoras folgt aus dem Kathetensatz, indem man die beiden Gleichungen addiert. $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$ $\rightarrow$ $a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p + q) \cdot c = c^2$

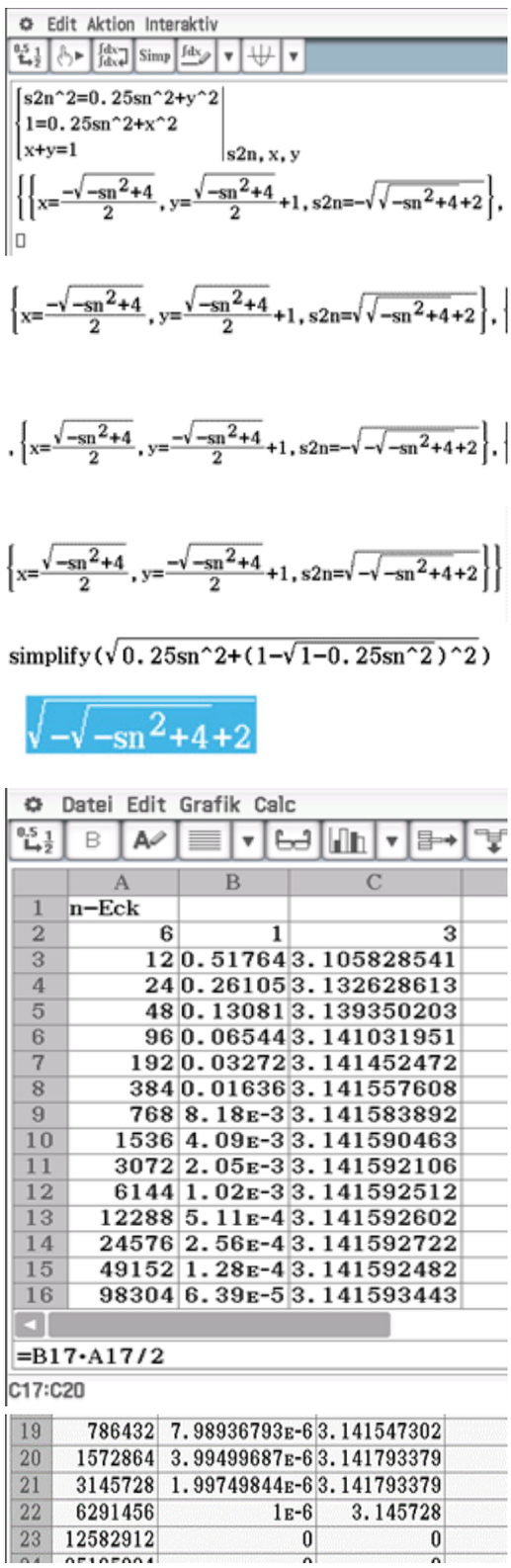
Geometrie: Der Kreis und π

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – Kreis: Umfang und Flächeninhalt (Kreis, **Kreisbogen, Kreissektor)** Die Schülerinnen und Schüler (2) **berechnen Längen und Flächeninhalte an Kreisen und Kreissektoren**	   Abstand / Kreisumfang / Fläche 0 / 0 / 0 0.168547 / 1.059012 / 0.089247 0.337094 / 2.118024 / 0.356987 0.505641 / 3.177037 / 0.803220 0.674188 / 4.236049 / 1.427947 0.842735 / 5.295061 / 2.231167 1.011282 / 6.354073 / 3.212881 1.179829 / 7.413086 / 4.373088  Datei Edit Grafik Calc A: Radius; B: Umfang; C: π; D: Fläche; E: π 1 / 0 / 0 / 0 0.1685470335 / 1.059012244 / 3.141592652 / 0.08924668609 / 3.141592652 0.3370940669 / 2.118024489 / 3.141592655 / 0.3569867444 / 3.141592655 0.5056411004 / 3.177036733 / 3.141592654 / 0.8032201749 / 3.141592654 0.6741881339 / 4.236048977 / 3.141592653 / 1.427946978 / 3.141592655 0.8427351674 / 5.295061221 / 3.141592653 / 2.231167152 / 3.141592653 1.011282201 / 6.354073466 / 3.141592653 / 3.212880699 / 3.141592652 1.179829234 / 7.41308571 / 3.141592654 / 4.373087619 / 3.141592656 1.348376268 / 8.472097954 / 3.141592653 / 5.71178791 / 3.141592653 1.516923301 / 9.531110199 / 3.141592654 / 7.228981574 / 3.141592655 1.685470335 / 10.59012244 / 3.141592652 / 8.924668609 / 3.141592652 1.854017368 / 11.64913469 / 3.141592655 / 10.79884902 / 3.141592655 2.022564402 / 12.70814693 / 3.141592653 / 12.8515228 / 3.141592653 2.191111435 / 13.76715918 / 3.141592655 / 15.08268995 / 3.141592654

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die Quadrate und der Kreis in der Abbildung links sind so konstruiert, dass sie sich längs der Halbgeraden IG mit Zentrum I strecken bzw. stauchen lassen.	Im Lehrplan bleibt die Kreiszahl π zwar unerwähnt, ist aber natürlich in den Formeln für den Kreis enthalten. Gerade wenn Technologie eingesetzt wird, macht es Sinn, eine dezimale Näherung für π zu berechnen. Die Proportionalität des Umfangs zum Radius bzw. $F \sim r^2$ sollte natürlich zunächst geklärt sein. Durch die Konstruktion in der Abbildung links wird die bereits geklärte Ähnlichkeit aller Quadrate zueinander auf alle Kreise übertragen.
Konstruiert wird zunächst eine Halbgerade, die vom Mittelpunkt ausgeht und auf dieser liegt der Punkt C. Danach wird der Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Punkt C als Randpunkt konstruiert. Man markiert den Punkt C und die Halbgerade. -> *Edit* -> *Animieren* -> *Animation hinzufügen* *Edit* -> *Animieren* -> *Ablaufen* Die Werte erhält man, wenn man im Messfenster [▦] wählt. Die erhaltenen Werte werden in die Tabellenkalkulation kopiert (Markieren der Spalte -> *Edit* -> *Kopieren* -> Wechsel in die TBK -> *Edit* -> *Einfügen*) Durch entsprechende Quotientenbildung erhält man jeweils eine „dezimale Darstellung von π“	Dieses Verfahren ist insofern zweifelhaft, da eine dezimale Näherung für π im ClassPad implementiert ist. Sowohl für die Berechnung des Umfangs als auch der Fläche sind im Geometrie-Modul des ClassPad die entsprechenden Formeln implementiert. Für die Schülerinnen und Schüler besteht in diesem Zusammenhang die Möglichkeit zu reflektieren, wie ein solcher Rechner arbeitet. Damit wird der ClassPad zum Unterrichtsgegenstand, was anzustreben ist, wenn eine solche Technologie im Unterricht genutzt wird.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – Kreis: Umfang und Flächeninhalt (Kreis, **Kreisbogen, Kreissektor**) Die Schülerinnen und Schüler (2) **berechnen Längen und Flächeninhalte an Kreisen und Kreissektoren** **Stochastik** Inhaltliche Schwerpunkte: – **Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente**	Edit Strg I/O Vers. piMC N 0⇒k For 1⇒n to 10000 rand()⇒x rand()⇒y if x^2+y^2<1 then k+1⇒k ifend print "n:" print n next print "Pi=" print approx(4*k/10000) n: 10000 Pi= 3.124 n: 100000 Pi= 3.15064
– **geometrische Sätze: Satz des Pythagoras**	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Man geht in das Programm Modul, wählt *Neue Datei* und gibt einen Namen ein. Danach gelangt man automatisch in den Programm Editor. Dieser wird mit [ ] verlassen. Für die Ausführung des Programms ist Geduld gefragt. Auf dem Handheld dauern die Ausführungen deutlich länger als auf dem PC. Für die Zeichnung konstruiert man zunächst den Kreis mit dem Mittelpunkt A. Das Sechseck wird konstruiert, wie es auch händisch mit dem Zirkel gemacht wird. Die Schnittpunkte mit dem Ursprungskreis müssen mit [ ] gekennzeichnet werden. Der Übersicht halber sind die dafür notwendigen Kreise verborgen (Kreis markieren -> *Edit* -> *Eigenschaften* -> Ausblenden) Die Mittelsenkrechten sind direkt konstruierbar (Endpunkte der Strecke oder die Strecke markieren -> *Zeichnen* -> *Konstruiere* -> *Mittelsenkrechte*)	Zur dezimalen Näherung von π: Eine Möglichkeit ist das Monte Carlo Verfahren: π lässt sich näherungsweise mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode bestimmen. Es werden Zufallspunkte (x,y) mit $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$ erzeugt. Punkte innerhalb des Viertelkreises werden gezählt. Das Verhältnis dieser Zahl und der Zahl aller erzeugten Punkte ist eine Näherung für π/4. Die Simulation lässt sich mit Hilfe eines Programms durchführen (s. Abb. links). Die Berechnung für 10000 Simulationen dauert auf dem PC ca. 10 Minuten, das heißt ca. 1 Minute pro 1000 Simulationen. Das Ergebnis zeigt die 2.Abbildung links. Eine Erhöhung um den Faktor 10 liefert auch nicht befriedigende Ergebnisse. Das bedeutet, man benötigt ein weiteres Verfahren, da das Monte Carlo Verfahren äußerst langsam konvergiert. Dass es aber letztlich eine dezimale Näherung für π liefert, ergibt sich aus dem empirischen Gesetz der großen Zahlen, das schon laut Lehrplan im Unterricht der Klassenstufe 7 / 8 diskutiert wurde. Die Abbildung links zeigt den geometrischen Ansatz für die Entwicklung eines Näherungsverfahrens für eine dezimale Darstellung von π. Man beginnt zunächst mit der Annäherung des Kreises mit einem 6-Eck. Im Folgenden wird ein Algorithmus entwickelt, der die Seitenlängen eines 12-Ecks und dann eines 24-Ecks usw. bestimmt. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass sich die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABQ und BPQ ergeben. Wir fügen folgende Bezeichnungen ein: $\overline{AQ}$=x und $\overline{QP}$=y. Des Weiteren gelte für den Radius des Kreises r = 1. ΔBPQ: $s_{2n}{}^2 = \frac{1}{4}s_n{}^2 + y^2$ s_n sei dabei die Kantenlänge des zugehörigen n-Ecks ΔABQ: $1 = x^2 + \frac{1}{4}s_n{}^2$ Und: $1 = x + y$

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – Kreis: Umfang und Flächeninhalt (Kreis, **Kreisbogen, Kreissektor**) Die Schülerinnen und Schüler (2) **berechnen Längen und Flächeninhalte an Kreisen und Kreissektoren**	

	A	B	C
1	n−Eck		
2	6	1	3
3	12	0.51764	3.105828541
4	24	0.26105	3.132628613
5	48	0.13081	3.139350203
6	96	0.06544	3.141031951
7	192	0.03272	3.141452472
8	384	0.01636	3.141557608
9	768	8.18E-3	3.141583892
10	1536	4.09E-3	3.141590463
11	3072	2.05E-3	3.141592106
12	6144	1.02E-3	3.141592512
13	12288	5.11E-4	3.141592602
14	24576	2.56E-4	3.141592722
15	49152	1.28E-4	3.141592482
16	98304	6.39E-5	3.141593443
19	786432	7.98936793E-6	3.141547302
20	1572864	3.99499687E-6	3.141793379
21	3145728	1.99749844E-6	3.141793379
22	6291456	1E-6	3.145728
23	12582912	0	0

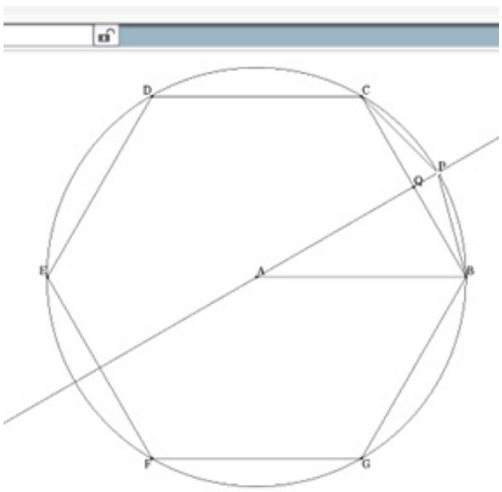
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die 4 Lösungen werden normalerweise in einer Reihe dargestellt. Zur besseren Übersicht wurden die Bilder hier geschnitten und untereinander kopiert. Für das Lösen von Gleichungssystemen wird [{=] (*Keyboard -> Math1*) genutzt. Für drei Gleichungen ist die Taste zweimal zu betätigen. Wichtig ist, die Variablen, nach denen aufgelöst werden soll, als Index anzugeben.	Das CAS kann lineare Gleichungssysteme lösen; aber auch, wie dieses Beispiel zeigt, einige nicht lineare Systeme. Das Problem besteht nun darin, aus den 4 möglichen Lösungen die „richtige“ herauszufinden. Da es sich um Streckenlängen handelt, müssen die Lösungen positiv sein, die 1. und 3. Lösung sind nicht möglich. Da für $s_{2n} < 1$ gelten muss, kommt die 2. Lösung ebenfalls nicht in Frage. Daraus folgt: $\sqrt{2-\sqrt{4-B2^2}}$
Den Befehl simplify findet man: *Interaktiv -> Umformungen -> simplify*	Es ist natürlich auch möglich, das obige Gleichungssystem händisch zu lösen. Dies führt dann zu folgender Lösung: $s_{2n} = \sqrt{0.25{s_n}^2 + (1-(\sqrt{1-0{,}25{s_n}^2})^2}$ Diesen Ausdruck findet man auch in der entsprechenden Literatur. Die Gleichheit der beiden Formeln ist nicht auf Anhieb erkennbar. Eine Überprüfung der Identität der beiden Terme ist natürlich auch händisch möglich.
Der Algorithmus lässt sich am einfachsten in der Tabellenkalkulation umsetzen. Man beginnt mit dem 6-Eck und der Seitenlänge 1. Für A3 gilt: = *2*A2* Die weiteren Zellen der Spalte A erhält man am einfachsten, wenn man A2 markiert -> *Edit -> Kopieren* -> die entsprechenden Zellen in Spalte A markiert -> *Edit -> Einfügen* B3: = $\sqrt{2-\sqrt{4-B2^2}}$ Die weiteren Zellen in Spalte B füllt man entsprechend wie in Spalte A. C2: =*A2*B2/2* und entsprechend füllen.	Aus der Abbildung links erkennt man, dass der Wert für das 49152-Eck nicht stimmen kann, da die Werte auf Grund des Verfahrens nicht fallen können. Wenn der Algorithmus fortgeführt wird, ergibt sich, dass scheinbar beim 3145728-Eck eine höchstmögliche Genauigkeit erreicht wird. Allerdings führt eine Fortführung zu einer sogenannten Subtraktioskatastrophe.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – Kreis: Umfang und Flächeninhalt (Kreis, **Kreisbogen, Kreissektor**) Die Schülerinnen und Schüler (2) **berechnen Längen und Flächeninhalte an Kreisen und Kreissektoren**	

	A	B	C	D	E	F	G
1	n-Eck						
2	6	1	3		1	3	
3	12	0.5176380902	3.105828541		0.5176380902	3.105828541	
4	24	0.2610523844	3.132628613		0.2610523844	3.132628613	
5	48	0.1308062585	3.139350203		0.1308062585	3.139350203	
6	96	0.0654381656	3.141031951		0.06543816564	3.141031951	
7	192	0.0327234633	3.141452472		0.03272346325	3.141452472	
8	384	0.0163622792	3.141557608		0.01636227921	3.141557608	
9	768	8.1812081E-3	3.141583892		8.18120805E-3	3.141583892	
10	1536	4.0906126E-3	3.141590463		4.09061258E-3	3.141590463	
11	3072	2.0453074E-3	3.141592106		2.04530736E-3	3.141592106	
12	6144	1.0226538E-3	3.141592512		1.02265381E-3	3.141592517	
13	12288	5.1132692E-4	3.141592602		5.11326924E-4	3.141592619	
14	24576	2.5566347E-4	3.141592722	3.141592654	2.55663464E-4	3.141592645	
15	49152	1.2783173E-4	3.141592482		1.27831732E-4	3.141592651	
16	98304	6.3915882E-5	3.141593443		6.39158662E-5	3.141592653	
17	196608	3.1957941E-5	3.141593443		3.19579331E-5	3.141592653	
18	393216	1.5979049E-5	3.141608823		1.59789665E-5	3.141592654	
19							

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die Tabelle wurde um die Spalten E und F ergänzt. Diese wurden mit dem veränderten Berechnungsterm ergänzt. In D14 steht der Literaturwert für die dezimale Darstellung von π.	Das Problem hinsichtlich der Subtraktion lässt sich dadurch umgehen, dass der Berechnungsterm mit $\sqrt{2-\sqrt{4-B2^2}}$ erweitert wird. Nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung der dritten binomischen Formel ergibt sich dann für den Algorithmus: $s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-{s_n}^2}}}$ Wie die Abbildung links zeigt, erhält man so eine Näherung für π mit einer Genauigkeit von 10 Stellen, und dieser Wert bleibt stabil.

Arbeitsblatt zur Berechnung einer dezimalen Näherung für π



Stellen Sie im Geometrie-Modul des ClassPad die linke Konstruktion her.
Erklären Sie, dass die Konstruktion als Ausgangspunkt für eine dezimale Näherung von der Kreiszahl π verstanden werden kann.
Der Kreis habe den Radius 1. Bestimmen Sie den Umfang des 12-Ecks. Es sei: AQ=x und QP=y.
Begründen Sie die folgenden 3 Gleichungen

$$\Delta BPQ: \quad {s_{2n}}^2 = \frac{1}{4}{s_n}^2 + y^2$$

s_n sei dabei die Kantenlänge des zugehörigen n-Ecks

$$\Delta ABQ: \quad 1 = x^2 + \frac{1}{4}{s_n}^2$$

$$\text{Und:} \quad 1 = x + y$$

Sie können diese drei Gleichungen in den ClassPad eingeben und nach den drei unbekannten Variablen auflösen lassen.

Sie erhalten 4 Lösungen. Begründen Sie, dass nur $\sqrt{2+\sqrt{4-{s_n}^2}}$ eine mögliche Lösung darstellt.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellenkalkulation unter Verwendung der obigen Formel eine dezimale Näherung für π. Geben Sie dazu in die erste Zeile die Daten für das Ausgangssechseck ein.

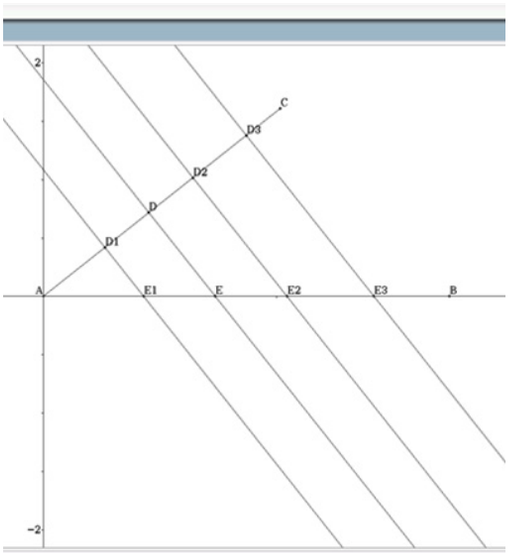
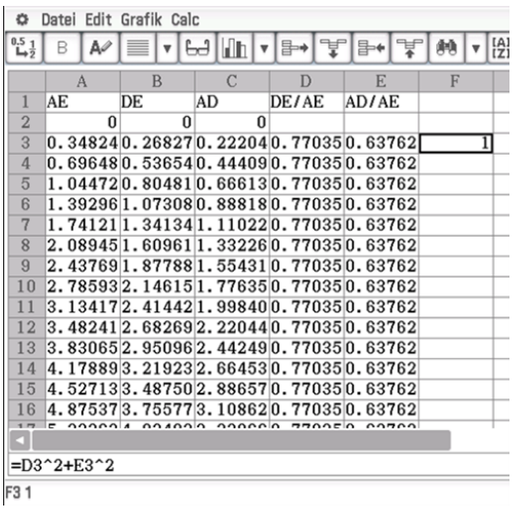
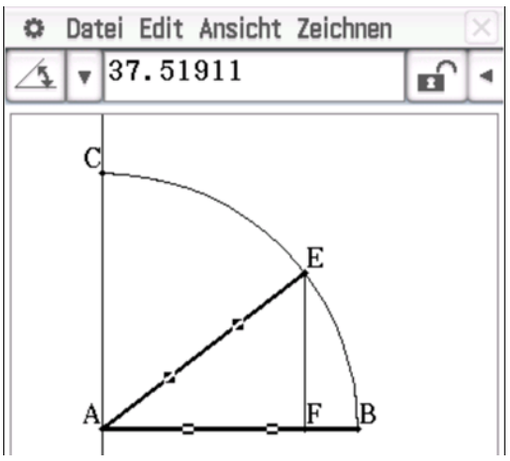
Führen Sie ca. 22 Schritte aus. Finden Sie eine Erklärung für das merkwürdige Verhalten.

Das Verfahren ist offensichtlich zu verbessern. Erweitern Sie den Term mit $\sqrt{2+\sqrt{4-{s_n}^2}}$

Zeigen Sie, dass sich nach einigen Umformungen $s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-{s_n}^2}}}$ ergibt.

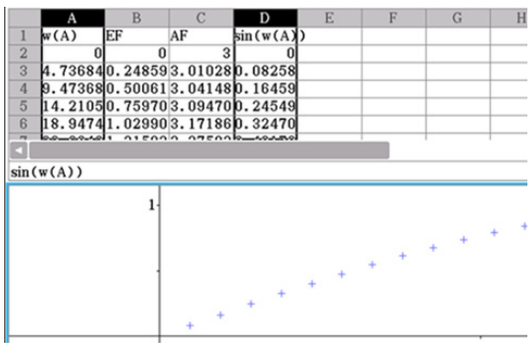
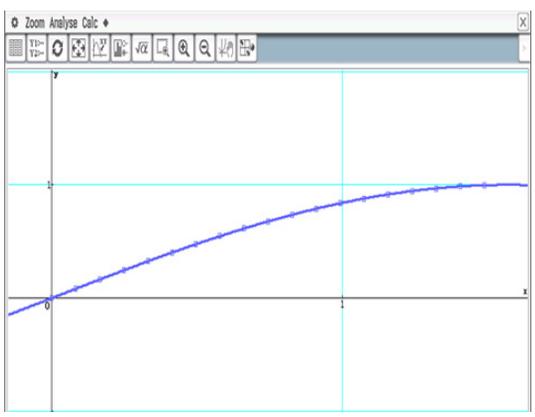
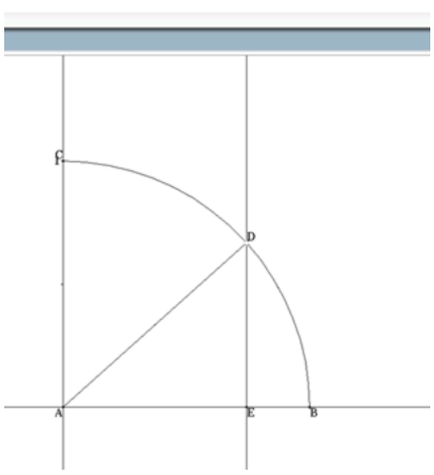
Wiederholen Sie das Verfahren mit dem neuen Algorithmus.

Trigonometrie

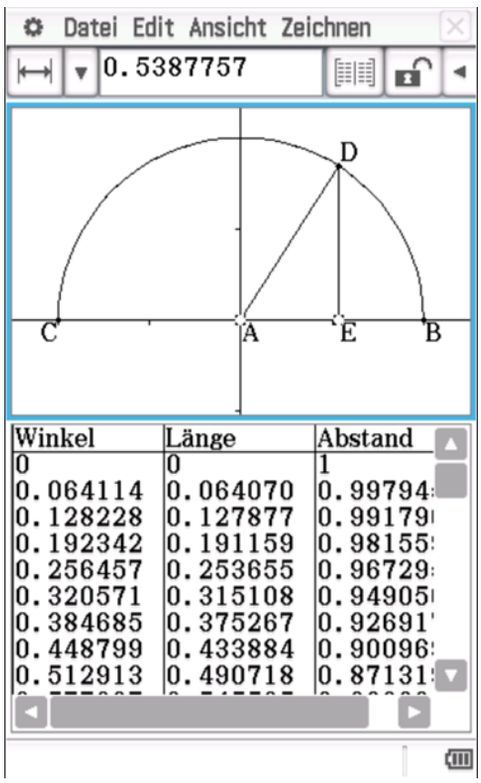
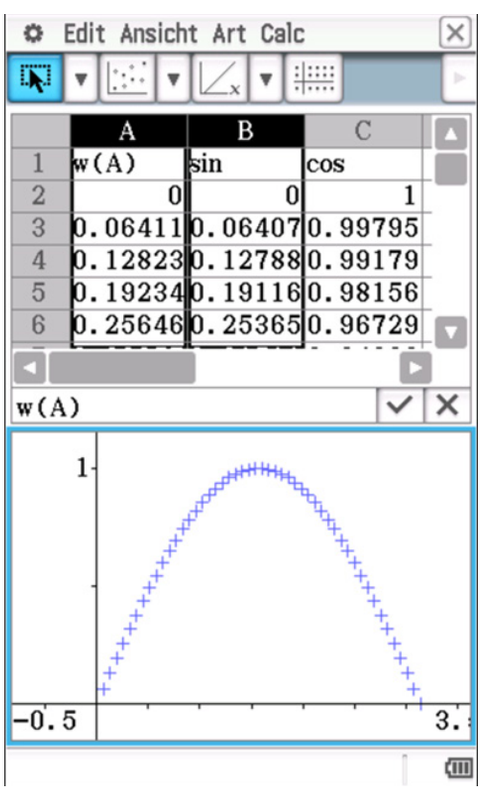
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
– **Trigonometrie: Sinus, Kosinus, Tangens** Die Schülerinnen und Schüler (5) **beschreiben Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken mithilfe der Trigonometrie (Sinus/Kosinus/Tangens),**	  

	A	B	C	D	E	F
1	AE	DE	AD	DE/AE	AD/AE	
2	0	0	0			
3	0.34824	0.26827	0.22204	0.77035	0.63762	1
4	0.69648	0.53654	0.44409	0.77035	0.63762	
5	1.04472	0.80481	0.66613	0.77035	0.63762	
6	1.39296	1.07308	0.88818	0.77035	0.63762	
7	1.74121	1.34134	1.11022	0.77035	0.63762	
8	2.08945	1.60961	1.33226	0.77035	0.63762	
9	2.43769	1.87788	1.55431	0.77035	0.63762	
10	2.78593	2.14615	1.77635	0.77035	0.63762	
11	3.13417	2.41442	1.99840	0.77035	0.63762	
12	3.48241	2.68269	2.22044	0.77035	0.63762	
13	3.83065	2.95096	2.44249	0.77035	0.63762	
14	4.17889	3.21923	2.66453	0.77035	0.63762	
15	4.52713	3.48750	2.88657	0.77035	0.63762	
16	4.87537	3.75577	3.10862	0.77035	0.63762	

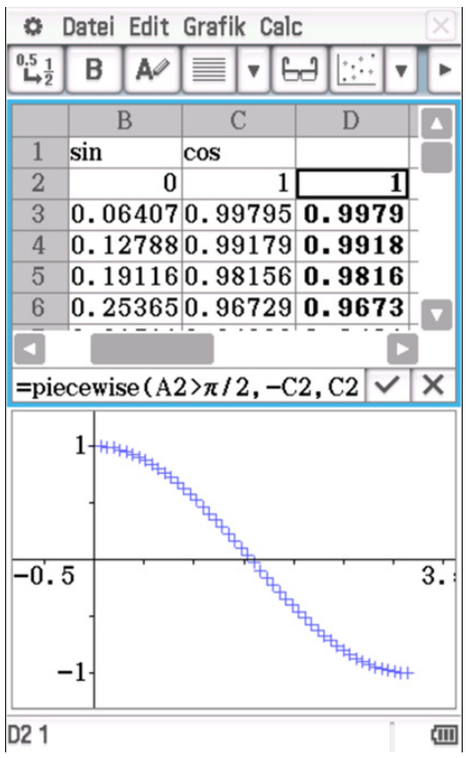
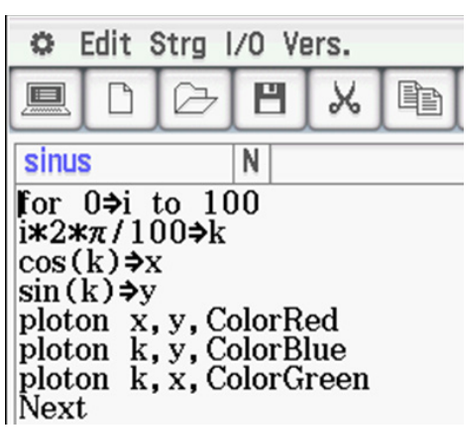
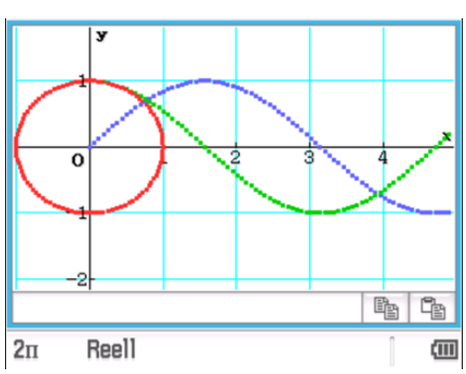
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Der Punkt D wird auf der Strecke [AC] fixiert, und mittels einer Animation des Punktes D auf dieser Strecke werden ähnliche rechtwinklige Dreiecke ADE erzeugt. Zur Veranschaulichung wurden die Punkte D1, D2 und D3 willkürlich gesetzt und die Punkte E1, E2 und E3 dazu konstruiert. Während des Ablaufs der Animation erscheinen die erzeugten Dreiecke nur kurzzeitig. Zur Animation wird die Strecke AC und der Punkt D markiert. *Edit -> Animieren -> Animation hinzufügen* *Edit -> Animieren -> Ablaufen (einmal*) Die Werte erhält man, wenn man im Messfenster wählt. Die erhaltenen Werte werden in die Tabellenkalkulation kopiert (Markieren der *Spalte -> Edit -> Kopieren* -> Wechsel in die TBK -> *Edit -> Einfügen)* In den Spalten D und E wurden die jeweiligen Quotienten gebildet Das heißt, in der Spalte D stehen die sin- und in Spalte E die cos- Werte des Winkels am Eckpunkt A. Als Ergänzung wurde noch das Quadrat der beiden Werte gebildet und diese wurden summiert (s. Abb. links: Zelle F3)	Zur Einführung der trigonometrischen Funktionen sollten Schülerinnen und Schüler erkennen, dass in rechtwinkligen Dreiecken, die Seitenverhältnisse von den gegebenen Winkeln abhängen. Dies schließt somit an eine Einheit über ähnliche Dreiecke an. Dazu wird zunächst gezeigt, dass die Seitverhältnisse konstant bleiben, wenn neben dem rechten Winkel ein weiterer Winkel fest vorgegeben ist. (s. Abb. links). Daraus wird verständlich, dass das Verhältnis der entsprechenden Seiten ein Maß für den entsprechenden Winkel ist. Das heißt, die Winkelfunktionen sin, cos und tan lassen sich für Winkel zwischen 0° und 90° am rechtwinkligen Dreieck über die jeweiligen Seitenverhältnisse definieren.
Ein Viertelkreis lässt sich mit konstruieren. Man gibt zuerst den Mittelpunkt A und dann die beiden begrenzenden Punkte B und C im Gegenuhrzeigersinn an. Die Animation vom Punkt E wird entsprechend oben vorgenommen. In den Grundeinstellungen sollte das Winkelmaß zunächst als Gradmaß eingestellt sein. Nach der Animation sind die benötigten Größen einzeln anzuklicken und dann wählt man das Tabellensymbol. Genau wie oben können die einzelnen Spalten in die Tabellenkalkulation übertragen werden.	Werte für die trigonometrischen Funktionen erhält man durch Animationen, indem man den Winkel variiert. Man legt dazu den Eckpunkt mit dem rechten Winkel auf einen Viertelkreis, lässt diesen durch eine Animation auf diesem wandern und misst die entstehenden Seitenverhältnisse. Das heißt, man hat zunächst den sin für einen Winkel definiert und verallgemeinert dies nun zunächst für Winkel mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
– **Trigonometrie: Sinus, Kosinus, Tangens** Die Schülerinnen und Schüler (5) **beschreiben Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken mithilfe der Trigonometrie (Sinus/Kosinus/Tangens),** (6) **berechnen Größen mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen, geometrischen Sätzen und trigonometrischen Beziehungen,**	  

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Es sind das Winkelmaß, die Seitenlängen AF und AE in die Tabellenkalkulation zu übertragen. In Spalte D wird der Quotient $\frac{EF}{AE}$ gebildet. Die Spalten A und D sind zu markieren und mit erhält man den Grafen.	Funktionswerte für cos und tan erhält man entsprechend. Wichtig ist, dass den Schülerinnen und Schülern verständlich wird, dass sin, cos und tan Funktionen sind, die erst mal für einen beschränkten Definitionsbereich definiert sind.
Eine bessere grafische Darstellung erhält man, wenn man die Werte mit Hilfe der Export-Funktion der Tabellenkalkulation in das Statistik-Modul überträgt. Es lässt sich dann sogar eine sin-Regression durchführen. Auch hier sind die Einheiten auf den Achsen unterschiedlich lang; aber zumindest die Werte sind exakt ablesbar (s. Abb. links).	Im Unterricht sollten als Nächstes die üblichen Dreiecksberechnungen behandelt werden, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen. Im Zusammenhang mit dem Einsatz neuer Medien sollte für die Schülerinnen und Schüler verständlich werden, dass die jetzt möglichen Berechnungen die Grundlage dafür liefern, dass die Dreieckskonstruktionen und das Messen von Winkeln in der DGS möglich sind. Bzgl. der Dreiecksberechnungen sind diese auf nicht rechtwinklige zu erweitern. Dazu werden zum einen der Sinus- und Kosinussatz und eine Erweiterung des Definitionsbereiches für die trigonometrischen Funktionen benötigt. Die Benutzung digitaler Medien ist nur insofern zur Hinführung und zum Beweis der Sätze hilfreich, als sich diese Sätze natürlich an einzelnen Beispielen überprüfen lassen. Dies gilt aber nicht für die Erweiterung des Definitionsbereichs.
Für eine Erweiterung des Definitionsbereiches übertragen wir die bisherigen Erkenntnisse auf einen Viertelkreis, dessen Radius die Länge 1 hat (s. Abb. links). Die Strecke AB wird markiert und im Messfenster auf die Länge 1 normiert. Für Messungen ist der Punkt D zu animieren und die Koordinaten des Punktes D mit den Kosinus- und Sinuswerten des Winkels bei A zu vergleichen. Im Geometrie Modul ist dies nicht direkt möglich. Die Werte lassen sich aber, wie oben beschrieben, in die Tabellenkalkulation übertragen. Ein Zugriff auf die Koordinaten des Punktes D ist nicht möglich. Die Erweiterung auf einen Vollkreis ist nicht hilfreich, da im ClassPad nur Winkelwerte $0° \leq \alpha \leq 180°$ angegeben werden	Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Koordinaten des Punktes D (s. Abb. links), der auf dem Einheitskreis liegt, gleich dem Kosinus- bzw. Sinuswert des Winkels am Punkt A sind. Dies kann zum einen natürlich durch theoretische Überlegungen geschehen. Zum anderen lässt sich der Zusammenhang dadurch überprüfen, indem entsprechende Größen gemessen werden. Für die Erweiterung des Definitionsbereichs wird der Viertelkreis zu einem Halbkreis vergrößert.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
– **Trigonometrie: Sinus, Kosinus, Tangens** Die Schülerinnen und Schüler (5) **beschreiben Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken mithilfe der Trigonometrie (Sinus/Kosinus/Tangens**	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Man erweitert den Viertelkreis zu einem Halbkreis, indem man A(0,0), B(1,0) und C(-1,0) wählt. Der Punkt D wird wieder beliebig auf den Halbkreis gesetzt. Da die Koordinatenachsen nicht als Konstruktionshilfe herangezogen werden können, werden die Punkte A und B mit einer Strecke verbunden. Jetzt lässt sich die Senkrechte zur x-Achse durch den Punkt D konstruieren. D und AB markieren -> *Zeichnen* -> *Konstruiere* -> *Senkrechte*	Wenn man den Radius r=1 wählt, lassen sich die sin- und cos-Werte direkt ablesen. Durch Veränderung der Lage des Punktes D auf dem Halbkreis, lassen sich Funktionswerte für die trigonometrischen Funktionen erzeugen.
Der Schnittpunkt E zwischen Senkrechter und Strecke AB wird gesetzt. Obwohl man sich nur auf die Strecke AB bezogen hat, bleibt der Punkt E auf der x-Achse auch für Winkel α mit α >90°. Für die Winkelmessung ist es erforderlich, sich nur auf AB und nicht CB zu beziehen, da Winkel dann nur im Bereich 0°≤ α ≤90° bzw. 0≤ α ≤π/2 angegeben werden. Zur besseren Übersichte wurde die Senkrechte verborgen (Markieren -> *Eigenschaften* -> *Ausblenden*).	
	Die Werte lassen sich grafisch veranschaulichen, nachdem man sie in die Tabellenkalkulation übertragen hat.
Die Übertragung führt man entsprechend, wie oben beschrieben, aus. Für die cos-Funktion funktioniert dies nicht direkt, da Streckenlängen gemessen werden, deren Werte immer positiv sind. Zur grafischen Darstellung werden die Spalten A und B markiert. Die grafische Darstellung erfolgt mit .	

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
– **Trigonometrie: Sinus, Kosinus, Tangens** Die Schülerinnen und Schüler **(5) beschreiben Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken mithilfe der Trigonometrie (Sinus/Kosinus/Tangens**	  

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
In der Tabellenkalkulation ist eine Abfrage bezüglich der Spalte erforderlich, ob der jeweilige Wert größer als π/2 ist. Dies geschieht mit dem Befehl piecewise. D2: *=piecewise(A2>π/2,-C2,C2)* Der Befehl bedeutet folgendes: Wenn der Wert in A2 größer als π/2 ist, wird der Wert aus C2 als negativer Wert übernommen, sonst wird er direkt übernommen. Für die grafische Darstellung sind die Spalten A und D zu markieren und zu wählen.	Um die Werte der cos-Funktion im Bereich α >π/2 exakt darzustellen, müssen sie für Winkel α >π/2 mit -1 multipliziert werden.
Da bei der Winkelmessung zwischen zwei Geraden oder Strecken grundsätzlich der kleinere Winkel angegeben wird, kann das oben beschriebene Verfahren nicht auf Vollkreise erweitert werden. Realisieren lässt sich dies durch das links dargestellte Programm. Mit dem Kreis zusammen werden jeweils die entsprechenden sin- und cos-Werte geplottet. Die Verwendung von *ploton* anstatt von *plot* führt dazu, dass das grüne Kreuz nicht erscheint. Das Bild links wird Punkt für Punkt aufgebaut, so dass der Zusammenhang erkennbar wird; des Weiteren wird dieser natürlich auch durch den Aufbau des Programms deutlich.	Aber es kann ein anderer Zugang gewählt werden, indem gezeigt wird, dass sich ein Kreis mit sin- und cos-Werten erzeugen lässt. Stellt man dann diese Werte in Abhängigkeit vom entsprechenden Bogenmaß dar, erhält man die Graphen der sin- und cos-Funktion für die erste Periode.

Arbeitsblatt zu trigonometrischen Funktionen

Zeichnen Sie eine Strecke, deren einer Endpunkt der Koordinatenursprung (Punkt A) ist. Der zweite Endpunkt sei D.
Legen Sie auf diese Strecke den Punkt C und tragen im Punkt C eine zur Strecke senkrechte Gerade an. Legen Sie auf die x-Achse eine Gerade.
Setzen Sie den Punkt den Punkt B auf den Schnittpunkt der Geraden durch C und der Geraden auf der x-Achse. Die Punkte ABC bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

Messen Sie den Winkel bei A und die Längen der Strecken AB und BC.
Bilden Sie den Quotienten der Länge von BC und der Länge von AB und den Quotienten der Länge von AC und der Länge von AB. Variieren Sie den Punkt C und den Punkt D.
Beschreiben Sie ihre Beobachtungen.

Da ein Zusammenhang zwischen dem Winkel und den Quotienten besteht, sind die Quotienten ein Maß für den Winkel; daher definiert man:

$$sin(\propto) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} \quad und \cos(\propto) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

Bestimmen Sie: sin(α und cos(α für α = 10°, 30°, 45° und 60°.

Fertigen Sie eine neue Konstruktion an. Legen Sie eine Gerade auf die x-Achse und konstruieren Sie einen Viertelkreis mit dem Koordinatenursprung A als Mittelpunkt, der im ersten Quadranten liegt. Setzen Sie auf den Viertelkreis einen Punkt C.

Fällen Sie vom Punkt C das Lot auf die x-Achse und setzen Sie einen Punkt B auf den Schnittpunkt des Lotes mit der x-Achse bzw. der Geraden, die auf der x-Achse liegt.

Erstellen Sie eine Animation, indem Sie den Punkt C und den Viertelkreis markieren.

Messen Sie den Winkel bei A und wählen Sie die Tabellenfunktion im Messfenster.

Messen Sie die Länge der Strecke BC und wählen Sie die Tabellenfunktion im Messfenster.
Übertragen Sie die Werte für den Winkel und die Strecke in das Modul Tabellenkalkulation.

Lassen Sie den Graphen Streckenlänge in Abhängigkeit des Winkels zeichnen.

Begründen Sie, dass der Graph von sin(α) gezeichnet wurde.

Verfahren Sie entsprechend mit der Seite AB.

Begründen Sie, dass der Graph von cos(α) gezeichnet wurde.

Stellen Sie Vermutungen an, wie die Graphen der sin- und cos-Funktion für 90° < α < 180° weiter verlaufen könnten.

Arbeitsblatt zu trigonometrischen Funktionen

Neben dem Gradmaß für Winkel gibt es noch das Bogenmaß. Den ClassPad kann man entsprechend einstellen. Im Bereich main finden Sie ganz unten rechts die Einstellung 360° / 400 / 2π.

360°: Winkelmaß in Grad

400: Winkelmaß in Neugrad, wobei 90° 100 Neugrad entspricht. (Bei uns überhaupt nicht gebräuchlich.)

2π: Winkel in Bogenmaß, wobei 360° 2π entspricht. (Das Bogenmaß gibt die zu einem Winkel gehörende Länge eines Bogens bezogen auf den Einheitskreis (r = 1) an.)

Im Folgenden sollen die Winkelgrößen im Bogenmaß angegeben werden. Für den Geometriebereich muss das im Geometrieformat nochmal extra eingestellt werden.
⚙ *->Geometrieformat ->Winkelanzeige -> Bogenmaß*

-Konstruieren Sie einen Einheitskreis (r = 1) mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.
Legen Sie auf den Kreis einen Punkt C.

Verbinden Sie den Punkt C mit dem Koordinatenursprung und legen Sie eine Strecke auf die x-Achse.

Markieren Sie den Punkt C und den Kreis und fügen eine Animation hinzu, die einmal ablaufen soll.

Messen Sie den Winkel zwischen den beiden Strecken und wählen im Messfenster die Tabellenfunktion.

Markieren Sie die Strecke auf der x-Achse und den Punkt C, messen Sie den Abstand zwischen dem Punkt und der Strecke und wählen im Messfenster die Tabellenfunktion.

Markieren Sie beide Spalten der Tabelle und ziehen sie mit dem Stift in das Zeichenfenster. Eventuell müssen Sie den Maßstab verändern (Befehle dafür findet man unter Ansicht.).

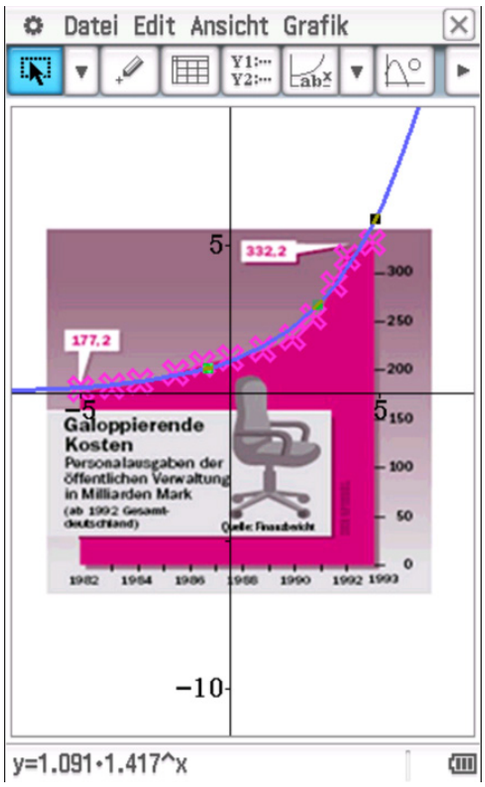
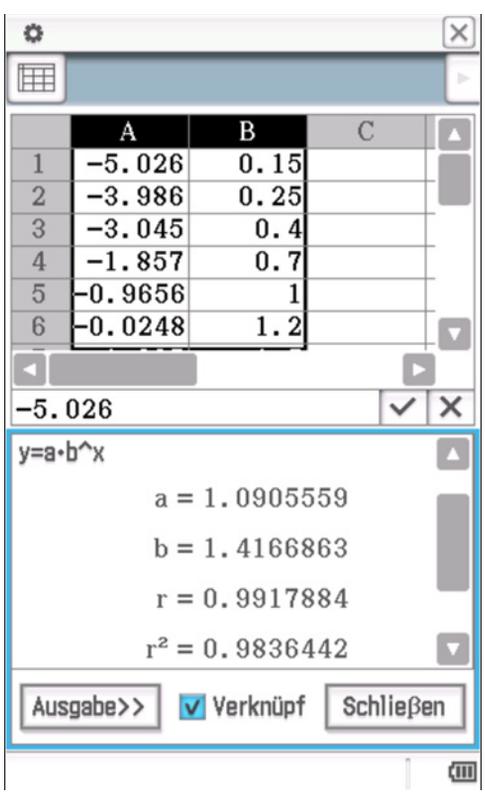
Vergleichen Sie den Graphen mit ihrer Vermutung für die sin-Funktion.

Führen Sie entsprechendes für die cos-Funktion durch.

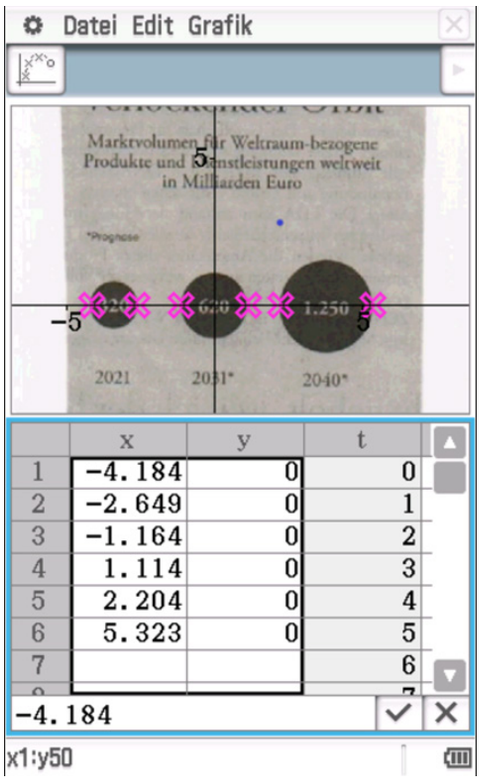
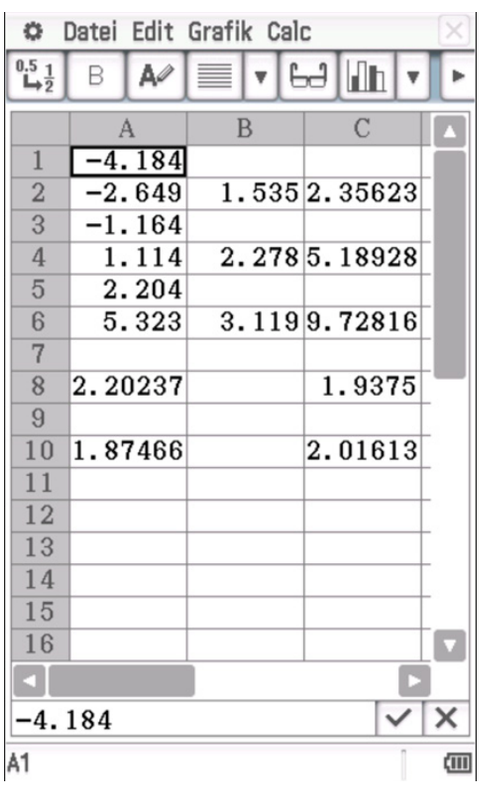
Hinweis: Im Bereich Geometrie gibt der ClassPad nur Winkelgrößen $0° \leq \alpha \leq 180°\ bzw.\ 0 \leq \alpha \leq \pi$ an.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: – **Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente: zweistufige Zufallsversuche, bedingte Wahrscheinlichkeit** Die Schülerinnen und Schüler (4) **führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen,**	Edit Strg I/O Vers. muenz N 0⇒k 0⇒z For 1⇒n to 1000 rand(1,6)⇒m If m=1 or m=2 or m=5 Then k+1⇒k IfEnd If m=5 Then z+1⇒z IfEnd Next Print "Wahrscheinlichkeit für Zahl:" Print approx(z/k) Programm zum Ziegenproblem Edit Strg I/O Vers. ziege N 0⇒r For 1⇒k To 50 rand(1,3)⇒tor Input rat,"Wähle 1,2 oder 3 für ein Tor" If tor=1 and rat=1 Then Input rat2,"Wähle 1 oder 2 für ein Tor" IfEnd If tor=1 and rat=2 Then Input rat2,"Wähle 1 oder 2 für ein Tor" IfEnd If tor=1 and rat=3 Then Input rat2,"Wähle 1 oder 3 für ein Tor" IfEnd If tor=2 and rat=1 Then Input rat2,"Wähle 1 oder 2 für ein Tor" IfEnd If tor=2 and rat=2 Then Input rat2,"Wähle 1 oder 2 für ein Tor" IfEnd If tor=2 and rat=3 Then Input rat2,"Wähle 2 oder 3 für ein Tor" IfEnd If tor=3 and rat=1 Then Input rat2,"Wähle 1 oder 3 für ein Tor" IfEnd If tor=3 and rat=2 Then Input rat2,"Wähle 2 oder 3 für ein Tor" IfEnd If tor=3 and rat=3 Then Input rat2,"Wähle 1 oder 3 für ein Tor" IfEnd If tor=rat2 Then r+1⇒r IfEnd Print "Anzahl:" Print k Print "Treffer:" Print r Next Programm-Editor

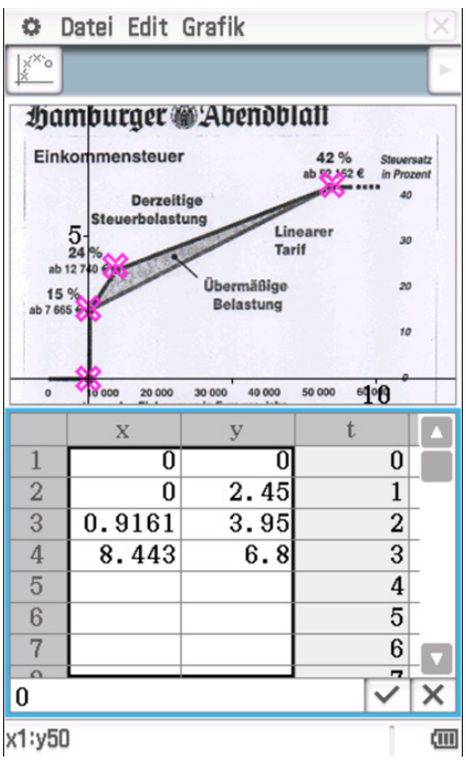
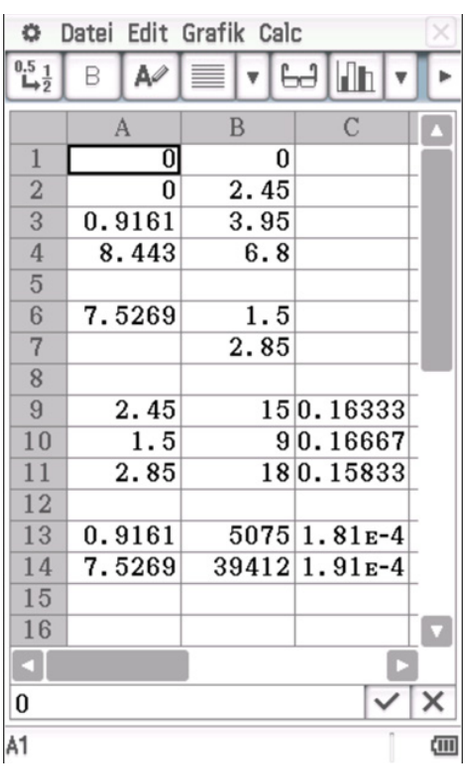
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Das Programm ist so strukturiert, dass insgesamt 6 Fälle zu betrachten sind. 1. Münze: Kopf, Kopf m=1 oder m=2 2. Münze: Zahl, Zahl m=3 oder m=4 3. Münze: Kopf: m=5, Zahl: m=6 Kopf oben: m=1, 2, 5 Nur diese Fälle werden gezählt: Zähler: k Nur bei der 3. Münze kann dann Zahl unten liegen => m=5 Kopf oben und Zahl unten: Zähler: z Der Quotient z/k gibt näherungsweise die Wahrscheinlichkeit für den gesuchten Fall an. *approx(z/k)* gibt eine dezimale Näherung an. Um das Programm links möglichst einfach und übersichtlich zu halten, wurde darauf verzichtet, die Fälle, dass der Spieler andere Zahlen als 1, 2 oder 3 wählt, auszuschließen. Durch die *for*-Schleife werden 50 Simulationen durchgeführt. Durch *rand(1,3)* wird zufällig festgelegt, hinter welchem Tor das Auto steht. Input *rat* fordert vom Anwender eine Vermutung für das richtige Tor. Im Weiteren finden Abfragen statt, je nachdem wie die Wahl und das richtige Tor sich zu einander verhalten. Die Anzahl der Simulationen (k=50) und die Anzahl der Treffer werden ausgedruckt. Entscheidend ist, dass durch das Erstellen des Programms zu erkennen ist, dass der Kandidat nur in dem Fall, dass er zu Anfang mit seinem Tipp richtig gelegen ist, durch den Wechsel des Tors einen Nachteil hat. In den beiden anderen möglichen Fällen hat er einen Vorteil. Schon daraus ergibt sich der Vorteil für den Wechsel. Dieser wird empirisch durch mehrmaliges Spielen bestätigt.	**Das Münzenproblem** Man hat drei Münzen, eine „normale“ Münze mit Kopf und Zahl, eine mit zweimal Kopf und eine mit zweimal Zahl. Es wird zufällig eine der Münzen ausgewählt und geworfen. Die geworfene Münze zeigt „Kopf“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf der anderen Seite „Zahl“ liegt? Da nur zwei Münzen in Frage kommen, sollte man meinen, dass diese Wahrscheinlichkeit 50% beträgt. Mit dem links dargestelltem Programm lassen sich Simulationen durchführen, die ein anderes Ergebnis zeigen. Um das Programm zu schreiben, ist eine genaue Analyse erforderlich. Wenn diese von den Schülerinnen und Schülern verstanden ist, braucht man das Programm eigentlich nicht mehr laufen lassen. $P(Zahl\ unten\ I\ Kopf\ oben) =$ $\frac{P(Zahl\ unten\ I\ Kopf\ oben)}{P(kopf\ oben)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ Die obige Rechnung zeigt natürlich auch sofort das richtige Ergebnis. Trotzdem kann es für Schülerinnen und Schüler hilfreich sein zu sehen, dass die Simulation zum gleichen Ergebnis führt. **Das Ziegenproblem** In einer Fernsehsendung kann ein Kandidat zwischen drei verschiedenen Toren wählen. Hinter zwei Toren ist eine Ziege und hinter einem Tor ein Auto verborgen. Nachdem der Kandidat sich für ein Tor entschieden hat, öffnet der Moderator ein Tor, hinter dem natürlich eine Ziege steht. Die Frage ist nun, ob der Kandidat seine erste Entscheidung ändert oder nicht. Vor Jahren gab es über die Lösung des Problems sogar eine Diskussion bis in die mathematischen Fakultäten der Universitäten. Auch dieses Problem lässt sich mit Hilfe des ClassPads simulieren. Links ist ein Programm wieder gegeben, mit dessen Hilfe sich der Prozess simulieren lässt.

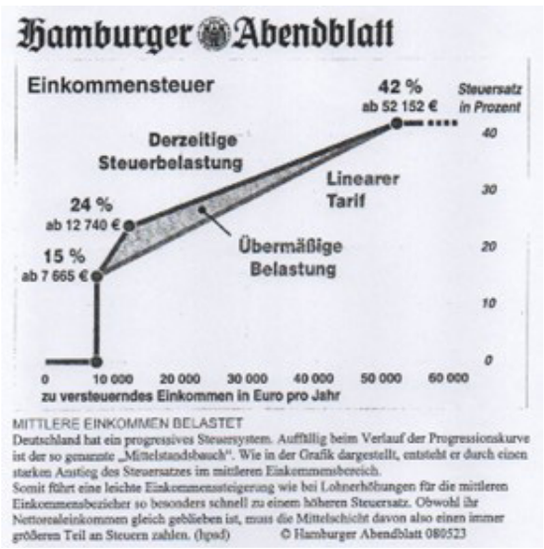
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler (2) analysieren auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge graphische Darstellungen statistischer Erhebungen kritisch und erkennen Manipulationen	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Es ist möglich, Bilder in den ClassPad zu übertragen. Dazu müssen die Bilder in ein entsprechendes Format übertragen werden. Dies geschieht mit der Casio Picture Conversion Engine. Diese Software findet man auf der Homepage von Casio. Des Weiteren ist der Quicktime Player erforderlich (frei im Netz verfügbar). Nachdem die beiden Software installiert sind, lässt sich das zu konvertierende Bild einfach hochladen und konvertieren. Danach muss es noch in die Datei *picture* des Classpads kopiert werden. Übertragung in ein Handheld: Das Handheld wird per USB-Kabel mit dem Computer verbunden. Im Handheld wählt man im **Menu Datenaustausch**. Das Handheld wird als Datenträger vom Computer automatisch erkannt. Es werden die beiden Ordner Autoimport und Picture angegeben. Das zu übertragene Bild wird in den Ordner Picture kopiert und danach sofort in das Handheld übertragen. Zur weiteren Verarbeitung wählt man den Menüpunkt *Bildplot*: *Datei* -> *Öffnen* -> Auswahl des Bildes Mit lassen sich Punkte auf die zu untersuchende Kurve setzen. Unter dem Punkt Grafik besteht die Möglichkeit, Regressionen berechnen zu lassen. Da die e-Funktion ja noch nicht behandelt worden ist, sollte man *freie exponentielle Regression* wählen. Natürlich lassen sich die Werte, die über das Tabellensymbol abrufbar sind, auch in die Tabellenkalkulation übertragen und dort weiter verarbeiten.	Zur Überprüfung von Aussagen, die mit Hilfe von Grafiken unterstützt werden, lassen sich diese in den ClassPad übertragen. In der auf der linken Seite dargestellten Grafik werden die öffentlichen Personalausgaben der BRD von 1982 bis 1993 dargestellt. Je nachdem wie man Länge und Breite des Bildes zueinander ins Verhältnis setzt, erscheint der Anstieg größer oder kleiner. Bzgl. der Regression in der Abbildung links ist zu bedenken, dass das Koordinatensystem willkürlich gewählt wurde. Von daher lässt sich mit der Regression nur zeigen, dass man den Verlauf qualitativ durch eine exponentielle Funktion modellieren kann. Der Wachstumsfaktor w lässt sich bezogen auf die realen Daten berechnen: $$w = \sqrt[11]{\frac{332{,}2}{177{,}2}} \approx 1{,}059$$ Das heißt, man hat es mit einem durchschnittlichen jährlichen Anstieg von ca. 5,9% zu tun. Der Spiegel (vom 26.9.1994), dem diese Grafik entnommen wurde, sprach von “Galoppierenden Kosten“. Nicht berücksichtigt wurde die Inflationsrate von ca. 3%. Der starke Anstieg am Beginn der 90er Jahre ist natürlich auf den vermehrten Bedarf von Staatsbediensteten auf Grund der deutschen Einheit zu verstehen. Des Weiteren ist ja die Abschwächung von 1992 auf 1993 deutlich zu erkennen, was natürlich dafür spricht, dass man für die Folgejahre sicher nicht mehr mit einem sich fortsetzenden exponentiellen Wachstum zu tun hat. Insbesondere würde das für 2023 Ausgaben in Höhe von ca. 940 Milliarden Euro bedeuten, was fast das Doppelte des Staatshaushalts sein würde.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler **(2) analysieren auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge graphische Darstellungen statistischer Erhebungen kritisch und erkennen Manipulationen**	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Genau wie oben ist das Bild in den Bildplot des ClassPad zu übertragen. Mit Hilfe von lässt sich das Koordinatenkreuz verschieben. Man sollte es so einrichten, dass die Durchmesser der drei Kreise auf der x-Achse liegen. Für die Berechnung der Kreisfläche werden die Randpunkte auf die Schnittstellen zwischen Kreis und x-Achse gelegt. Um die Koordinaten zu erfassen, wählt man das Tabellensymbol. Jetzt kann man die Punkte hinsichtlich der y-Koordinate nachjustieren. Dazu gibt man den y-Wert 0 einfach in die Tabelle ein. Zur Weiterverarbeitung werden die x-Koordinaten in die Tabellenkalkulation (s. Abb. links unten Spalte A) übertragen. In Spalte B stehen die jeweiligen Durchmesser und in C die Quadrate. In A8 Und A10 sind die jeweiligen Quotienten, die die Verhältnisse der Kreisflächen zueinander angeben, aufgeführt. Zum Vergleich findet man die Verhältnisse der angegebenen Zahlen in den Zellen C8 und C10.	Untersucht wird eine Grafik aus der Zeit vom 28.12.2023 In der Grafik werden Euro Beträge dargestellt und durch Kreisflächen veranschaulicht. Interessant ist zu untersuchen, in wie weit die Flächen die angegebenen Zahlen repräsentieren. Wenn man die Quotienten (Zeilen 8 und 10 in der Abb. links) vergleicht, so erkennt man zwar keine gravierenden aber doch Abweichungen um ca. 14% bzw. 7%. Dies könnte sich natürlich auch daraus ergeben, dass die Punkte nicht hinreichend präzise gesetzt wurden.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler **(2) analysieren auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge graphische Darstellungen statistischer Erhebungen kritisch und erkennen Manipulationen**	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Entsprechend oben wird die Grafik übernommen und die Punkte werden an den markanten Stellen gesetzt. Mit dem Tabellensymbol werden die Koordinaten in die Tabellenkalkulation (s. Abb. links unten) übertragen. A6: =A4 – A3 B6: =B3 – B2 B7: =B4 – B3 A9 bis A11: Differenzen der y-Werte B9 bis B11: Differenzen der Prozentwerte C9 bis C11: Quotienten der Werte A13 bis A14: Differenzen der x-Werte B13 bis B14: Differenzen der Euro-Werte C13 bis C14: Quotienten der Werte	Dem Hamburger Abendblatt (copyright Hamburger Abendblatt 080523) wurde folgender Artikel entnommen:  Auch hier lässt sich überprüfen, inwieweit die Grafik den Zahlenwerten entspricht. Die Ergebnisse sind wie oben in der Tabellenkalkulation dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sowohl die Quotienten in y-Richtung (C9 – C11) als auch in x-Richtung (C13 u. C14) in etwa gleich sind. Für den Unterricht interessanter ist unter Umständen der darunter liegende Text. Hier scheint dem Autor wohl das Verständnis für die Steigung zu fehlen. Es sei denn er verortet die Mittelschicht im Bereich eines Jahreseinkommens zwischen 7665 Euro und 12740 Euro.

Arbeitsblatt zur Stochastik

Das Schlüsselproblem

Die Flurkommode der Familie Such hat 8 Schubladen. Herr Such packt den Haustürschlüssel meistens in eine der Schubladen. Langjährige Untersuchungen haben ergeben, dass der Schlüssel mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% in einer der Schubladen liegt. Frau Such hat nun schon 7 der 8 Schubladen geöffnet und den Schlüssel nicht gefunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schlüssel in der letzten Schublade liegt.
Das folgende Programm simuliert die obige Situation:

Beschreiben und erklären Sie den Inhalt des Programms links.
Wofür steht die Variable ver?
Was geschieht in der zweiten For -Schleife?
Wofür stehen die Variablen x, y und z?
Wofür steht die Variable m?

Geben Sie das Programm ein und lassen Sie es laufen. Die Eingabe erfolgt über das Programm Modul. Sie müssen dann einen Namen (maximal 8 Zeichen) eingeben und gelangen dann automatisch in den Programm Editor.
Für die Übersetzung in Maschinensprache wählen Sie . Durch Betätigung des Pfeils können Sie das Programm laufen lassen.
Verifizieren Sie den simulierten Wert für die Wahrscheinlichkeit, dass der Schlüssel in der letzten Schublade liegt.

124CPBUCH9-D

4 549526 616648

Copyright by CASIO Europe GmbH

www.casio-schulrechner.de