Einsatzmöglichkeiten des ClassPad in der Einführungsphase

CASIO

Einsatzmöglichkeiten des ClassPad in der Einführungsphase

Dr. Jens Weitendorf
1. Auflage Oktober 2024

Einleitung

Im Land Nordrhein-Westfalen ist der Einsatz eines CAS-Rechners demnächst in der Sek. II verpflichtend. Dieser Band für die Einführungsphase setzt die Bände für 7/8 und 9/10 fort. Welche Möglichkeiten sich für einen solchen Einsatz von ClassPads der Firma CASIO Europe ergeben, soll im Folgenden für die Einführungsphase dargestellt werden. Dabei geht es nicht darum, den ClassPad in jeder Unterrichtsstunde einzusetzen; sondern immer dann, wenn es unter mathematischen und didaktischen Gesichtspunkten sinnvoll erscheint.

Der Lehrplan sieht eine Trennung in die zwei Stoffgebiete **Analysis** und **Lineare Algebra** vor. Mit den hier vorliegenden Hinweisen beziehen wir uns ebenfalls auf diese zwei Gebiete. Des Weiteren haben wir uns auf Inhalte beschränkt, bei denen es sinnvoll erscheint, den ClassPad einzusetzen.

Das Manuskript ist in den einzelnen Teilen tabellenartig aufgebaut. Auf der linken Seite gibt es Hinweise auf den Lehrplan, die aus diesem direkt übertragen sind, sowie passende Abbildungen des CalssPad. Auf der rechten Seite wird auf die technischen und didaktischen hinweise verwiesen. Bezüglich der beiden letzten Kategorien kann es zu Überschneidungen kommen, da einige technische Hinweise einen Zusammenhang zum Verständnis des Rechners haben. Ein solcher Rechner ist nach den Gesetzen der Logik programmiert und insofern weist die Bedienung auch Bezüge zu Mathematik auf.

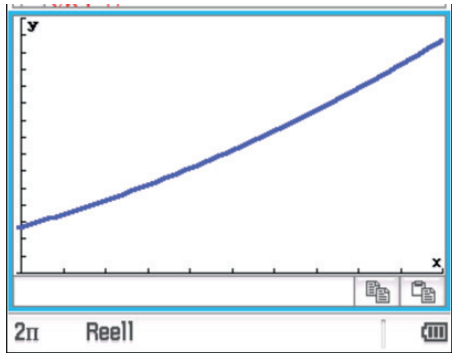
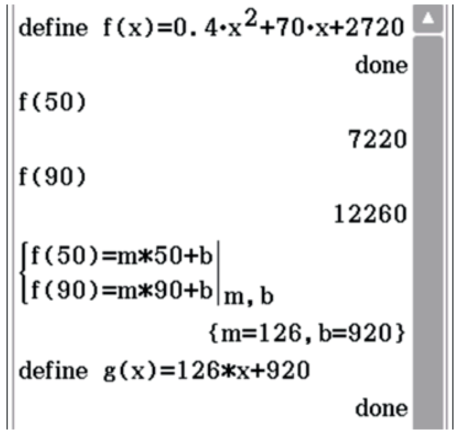
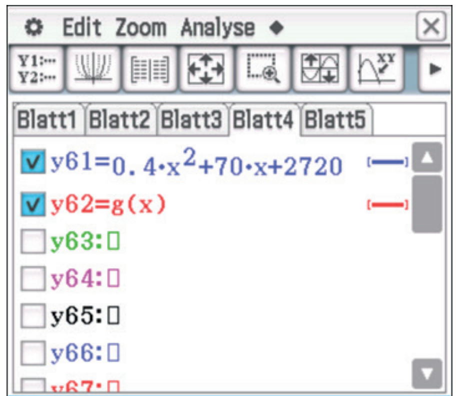
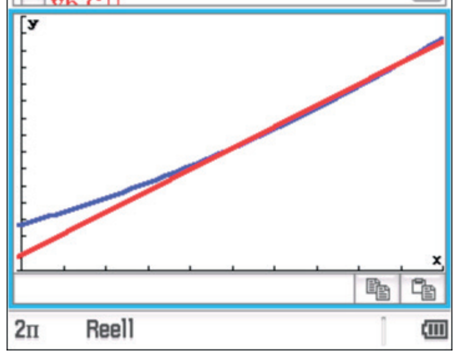
Diese in Tabellen gefasste Information ist für die unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen gedacht. Die technischen Hinweise sind so gestaltet, dass es auch für Einsteigerinnen und Einsteiger ohne Probleme möglich sein sollte, den ClassPad im Unterricht einzusetzen. Insbesondere wird der Leitfaden für die Klassenstufen der Sek. I nicht vorausgesetzt. Selbiges gilt für die Reihenfolge der einzelnen Gebiete. Diese sind in der Regel unabhängig davon behandelbar. Die dadurch entstehenden Wiederholungen werden in Kauf genommen. Aber auch CAS erfahrenere Kolleginnen und Kollegen werden sicher die eine oder andere Idee für den Einsatz finden.

Im Anschluss an jedes Kapitel sind Arbeitsblätter für die Schülerinnen und Schüler zu finden, die direkt einsetzbar sind. Lösungen sind in der Regel nicht angegeben, da sich die Arbeitsblätter oft direkt auf die im Lehrerteil dargestellten Inhalte beziehen, und sie sich daraus direkt ergeben. Bei einigen Aufgaben wird der Rechner nur zur Kontrolle genutzt, so dass sich auch hier Lösungsblätter erübrigen.

Die Arbeitsblätter sind in der Regel so gestaltet, dass sie entdeckendes Lernen ermöglichen. Ansonsten sollten Sie jeweils entscheiden, welche Lösungen händisch und welche mit Hilfe des ClassPad erstellt werden sollen. In der Regel haben wir uns eher auf das rein Mathematische beschränkt und auf Realitätsbezüge verzichtet, es sei denn es besteht ein direkter Zusammenhang zum Einsatz des ClassPads. Auch ist uns bewusst, dass die Realitätsbezüge nicht immer die Realität wirklich wiedergeben. Ansonsten sollten wünschenswerte Realitätsbezüge im Unterricht hinzugefügt werden. Inwieweit diese verständnis- bzw. motivationsfördernd sind, hängt natürlich immer von der Zusammensetzung der jeweiligen Lerngruppe ab.

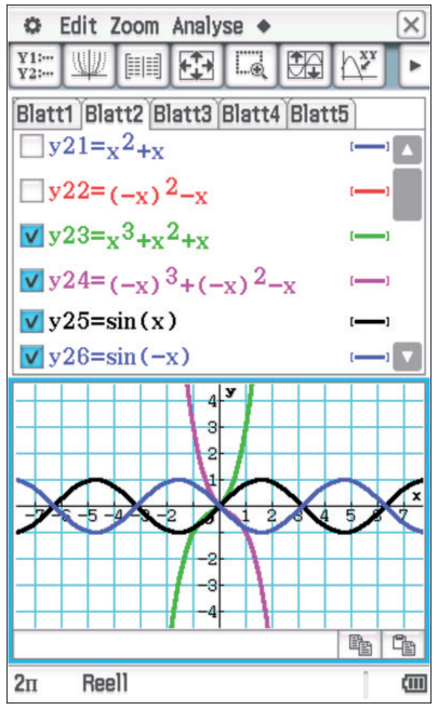
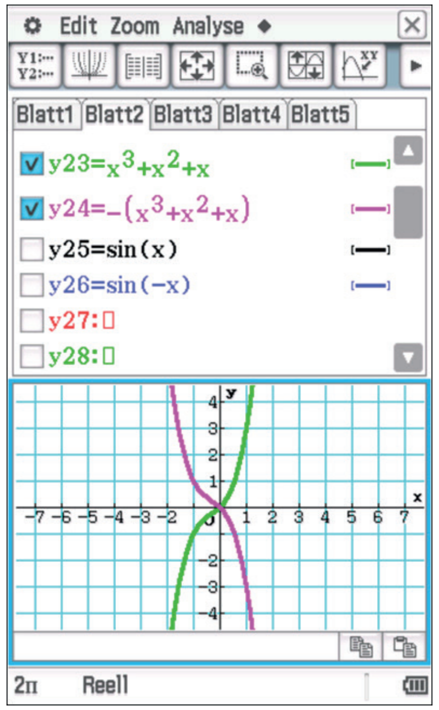
Ich danke Antonius Warmeling und dem Casio-Education-Team für die tatkräftige Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

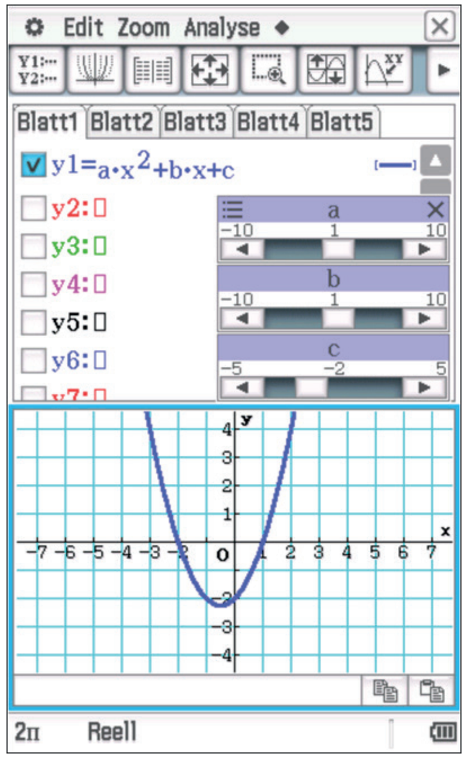
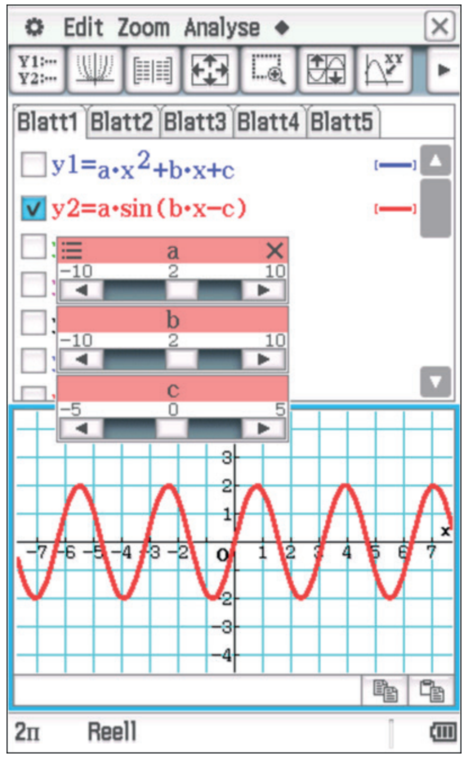
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen Die Schülerinnen und Schüler (19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Zur grafischen Darstellung des Grafen, wählt man den Bereich Grafik & Tabelle. Falls im Grafikbereich noch ein Hintergrundbild zu sehen ist, muss man im Menü Bildplot wählen -> *Datei* -> *Neu* Für die weitere Diskussion ist es hilfreich im Bereich *main* die Funktion zu definieren (s. Abb. links), um eine mögliche lineare Funktion zu berechnen. Den Befehl *define* findet man direkt auf der Tastatur Bereich *Math3*, oder man kann ihn natürlich auch buchstabenmäßig eingeben. Variablen, die definiert sind, werden im *Variablenmanger* gelistet. Variablen, die im Bereich Main definiert sind, sind in allen anderen Bereichen wie *Grafik & Tabelle, Tabellenkalkulation* usw. abrufbar. Gleichungssysteme werden mit (Tastatur *Math1*) gelöst. Wenn man ein 3 x 3 System oder ein größeres hat, muss die Taste entsprechend oft betätigt werden. Der ClassPad löst tlw. auch nicht lineare Systeme. Die Variablen, nach denen das System aufzulösen ist, sind unten rechts anzugeben. Das heißt, es können auch Systeme umgeformt werden, die unterbestimmt sind.	Zu Beginn der Einführungsphase hat man in der Regel das Problem, dass notwendige Kenntnisse aus der Sek. I nicht präsent sind. Das führt dazu, dass der Unterricht deshalb zu Beginn aus Wiederholungen notwendiger Kenntnisse besteht. Aus diesem Grund schlagen wir vor, das folgende Beispiel zu diskutieren: *Amts-Mathematik* *Bei Gruppentierhaltung muss für jedes Kalb in Abhängigkeit von der Widerristhöhe in Zentimetern eine frei verfügbare Mindestfläche in Quadratmetern gemäß nachstehender Formel vorhanden sein:* *(Mathematische Exponentenschreibweise)* *Mindestfläche cm (hoch) 2 gleich 0,40 x (hoch) 2 plus 70x plus 2720.* *(Aus dem neuen Entwurf des Bundes für eine Kälberhaltungsverordnung.)* Da es hier nicht darum geht, dass die Schülerinnen und Schüler Grafen per Handzeichnen, bietet sich der Einsatz des ClassPad an. Der Graf der entsprechenden Funktion ist links dargestellt. Aus dem Verlauf folgt, dass man in dem relevanten Bereich ($50 \le x \le 90$) die quadratische Funktion durchaus durch eine lineare Durchschnittsfunktion ersetzen kann. Es könnte danach noch der Unterschied der beiden Funktionen im Unterricht behandelt und das Maximum der Differenz bestimmt werden. Des Weiteren ergibt sich die Frage, inwiefern es weitere Möglichkeiten gibt, die quadratische durch eine lineare Funktion zu ersetzen. Eine Möglichkeit ist in der Abbildung links angegeben.

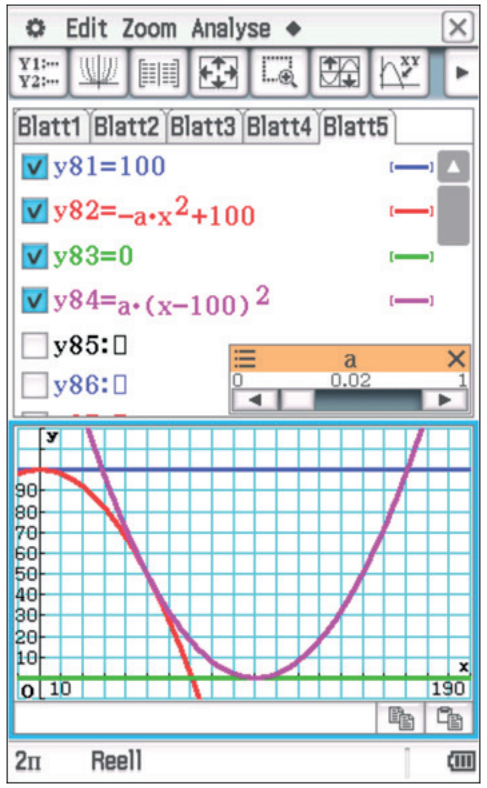
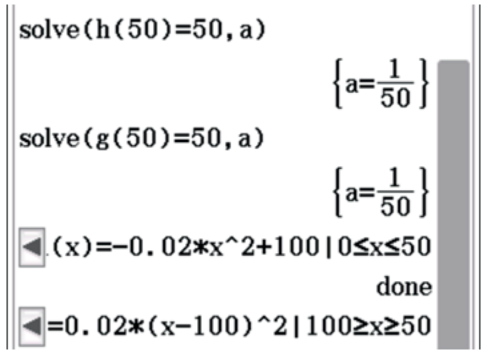
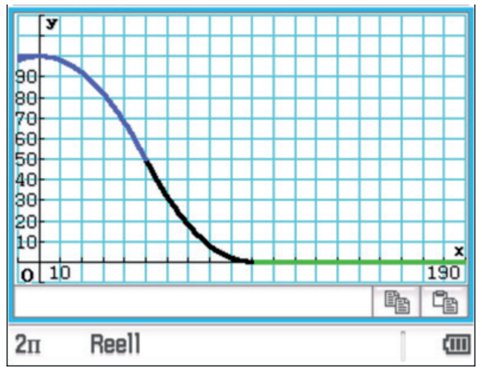
Transformationen und Einfluss von Parametern auf Funktionen

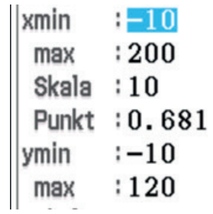
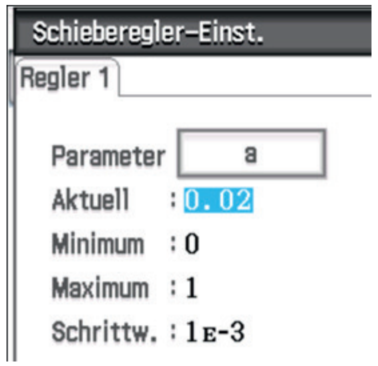
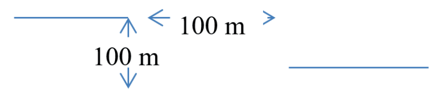
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
• Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung Die Schülerinnen und Schüler (4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter,	 

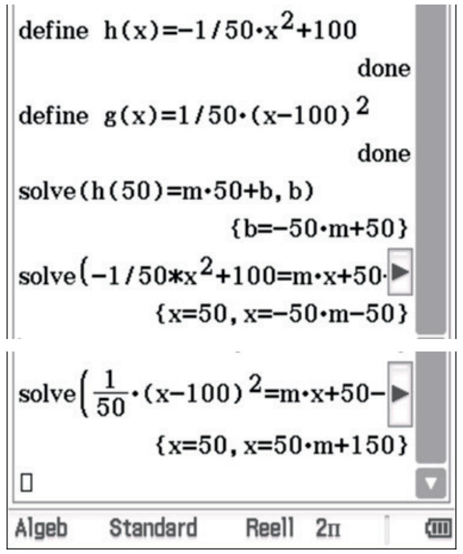
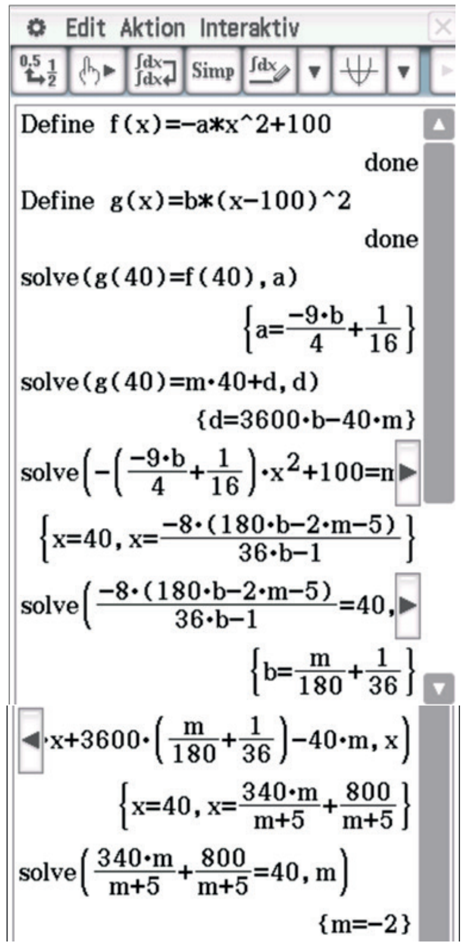
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Man hätte die Untersuchungen natürlich auch mit den Schiebereglern vornehmen können. Dies hätte eine gewisse Dynamik erzeugt. Um Schieberegler einzusetzen, sind die Funktionsgleichungen mit Variablen anzugeben. Zum Beispiel: Y21=a*x^2 + b*x Die Darstellung erfolgt dann mit . Es sind bis zu drei Regler möglich.	Eine Spiegelung an der x-Achse ergibt sich, indem x durch −x ersetzt wird. Gespiegelte Bilder sind als Endprodukt statisch. Von daher macht es Sinn, in diesem Fall keine Schieberegler einzusetzen. Daraus ergibt sich aber der Nachteil, dass die Bedeutung des Minuszeichens nicht wirklich entdeckt werden kann, sondern eher vorgegeben werden muss. Für die Verschiebungen und Streckungen sollten dann die Regler benutzt werden. Schülerinnen und Schüler sollten diese im Rahmen der folgenden Untersuchungen einsetzen. Lehrpersonen könnten versuchen auf Kenntnisse aus der Jahrgangsstufe 9 zurückzugreifen, wo die gängigen Transformationen ja schon mal behandelt wurden Für die y-Achse gilt entsprechendes.

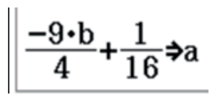
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler (3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion), (4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter, • Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung	

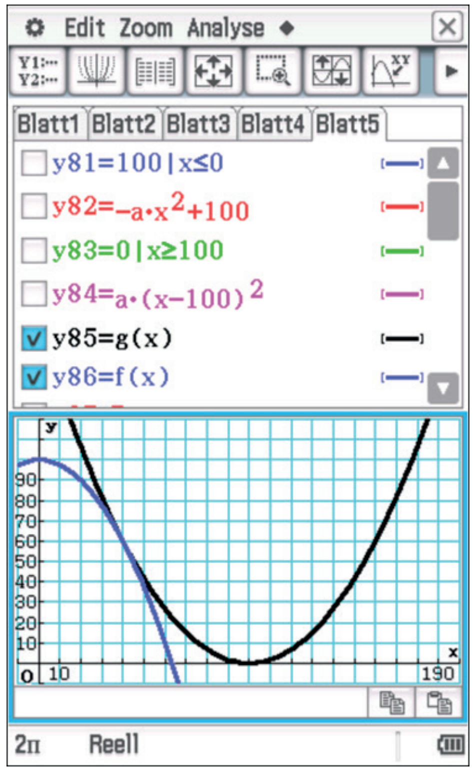
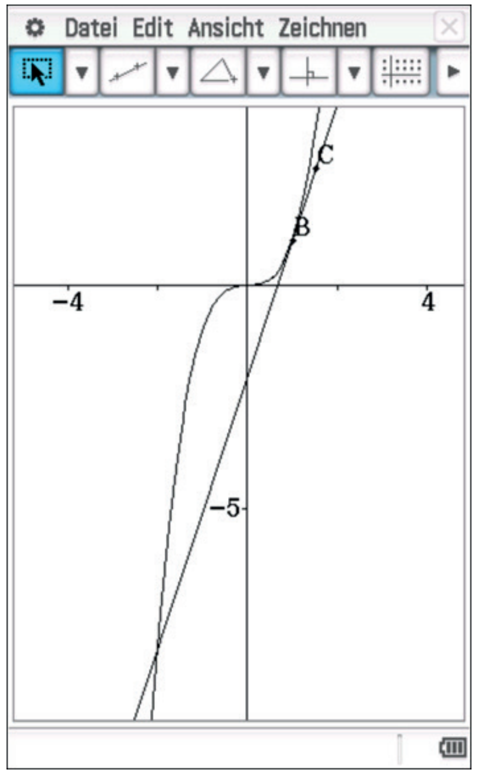
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Um die Abhängigkeit des Grafen in Bezug auf die Koeffizienten zu erkunden, ist es möglich bis zu drei Schieberegler einzusetzen. Es ist darauf zu achten, dass die benutzten Variablen nicht definiert sind. Dies lässt sich im Variablen Manager überprüfen. Durch Betätigung von werden die Regler automatisch erzeugt. Grenzen und Schrittweite sind veränderbar. Man findet Einstellungsmöglichkeiten unter .	Mit Hilfe der Regler haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, eigenständig den Einfluss der Koeffizienten zu untersuchen. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass das nur Sinn macht, wenn sie nur einen Koeffizienten zurzeit variieren. In Bezug auf die quadratische Funktion lässt sich feststellen, dass für a = 1 für den x-Wert des Scheitelpunkts gilt: $x_s = -\frac{b}{2}$ Mit dieser Erkenntnis lässt sich die allgemeine Form leicht in die Scheitelpunktsform übertragen. Daraus kann man dann die p-q-Formel für das Lösen quadratischer Gleichungen leicht herleiten. Für Potenzfunktionen höheren Grades mit ganzzahligen Exponenten müssen im Vorhinein Entscheidungen getroffen werden, wo die variablen Koeffizienten gesetzt werden. Dies erscheint unproblematisch, da ja sowieso nur ein Koeffizient zurzeit verändert werden sollte. Für komplexere Potenzfunktionen erscheint eine Untersuchung der Abhängigkeit bei einer Veränderung mehrerer Koeffizienten in der Regel deutlich zu aufwendig zu sein. Für die trigonometrischen Funktionen ist es einfacher, die Abhängigkeiten zu erkunden, da es keine Wechselwirkungen gibt. Für eine vollständige Untersuchung hätte man noch eine additive Variable benötigt, deren Einfluss aber leicht verstehbar ist. Schülerinnen und Schüler haben durch Variation der Variablen c die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen der sin- und der cos-Funktion zu finden.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen Die Schülerinnen und Schüler (19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen	  

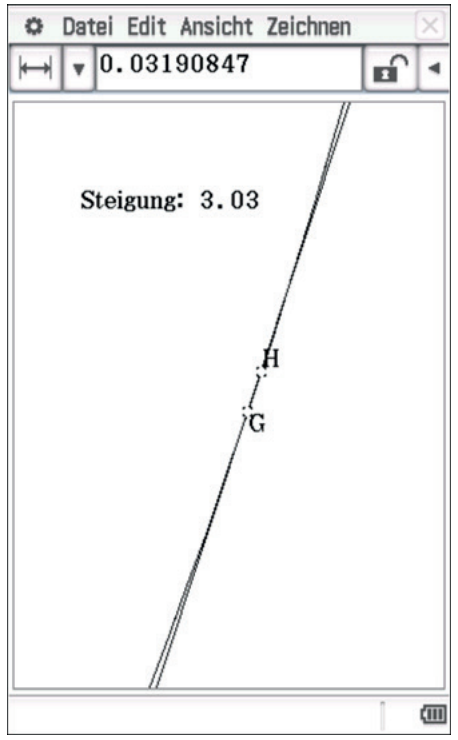
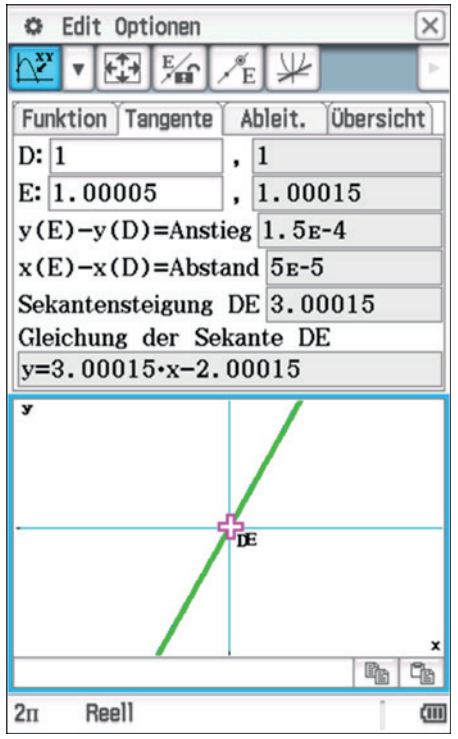
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Zur Veranschaulichung wählt man am besten den Bereich Grafik & Tabelle. Der Zeichenbereich muss zunächst hinsichtlich der Daten entsprechend eingestellt werden.  Da zwei Funktionsgrafen von einem Parameter abhängig sind, wählt man für die Darstellung:  Der Schieberegler wird dann automatisch erzeugt. Die Voreinstellung lässt sich mit  verändern. Hilfreich:  Die Definitionsbereiche lassen sich nicht einschränken, wenn man gleichzeitig die Abhängigkeit von einem Parameter nutzen will. Nachdem der Parameter einen festen Wert hat, lassen sich die Grafen der Funktionen auch abschnittsweise definieren und zeichnen (s. Abb. links). Die Symbole |, ≤ *und* ≥ findet man in der Tastatur *Math3.*	Gegeben sind zwei waagerechte Eisenbahngleise, die durch einen Funktionsgrafen verbunden werden sollen.  Dies ließe sich mit zwei Viertelkreisen oder einer trigonometrischen Funktion lösen. Wir wollen als Lösung aber zwei Parabelabschnitte wählen. Dazu wird ein geeignetes Koordinatensystem gewählt. (s. Abb. links) Aus der Fragestellung ergibt sich, dass die eine Parabel ihren Scheitelpunkt in (0/100) und die andere in (100/0) hat. Aus Gründen der Symmetrie und da wir noch nicht auf die Ableitung zugreifen können, sollen sie in (50/50) zusammengesetzt werden. Ebenfalls aus der Symmetrie folgt, dass die Koeffizienten vor dem x^2 sich nur durch ein Minuszeichen unterscheiden. Wenn die Beträge verschieden sind, ergibt sich ein „Knick" an der Stelle, an der die Parabeln zusammengesetzt werden. Dass es für unsere Annahmen keinen „Knick" gibt, bleibt zu zeigen. Aus der Bedingung, dass die Parabeln durch den Punkt (50/50) verlaufen, folgt, dass a=0,02 gilt. Wie die Abbildung links zeigt, gibt es offensichtlich keinen „Knick". Auch Vergrößerungen bestätigen dies. Ein Beweis steht noch aus. Dieses Beispiel soll als Vorbereitung für die Einführung des Ableitungsbegriffs dienen. Für den Unterricht ist herauszuarbeiten, wodurch ein Knick entstehen kann. Dies ist sicher der Fall, wenn die Steigungen der Tangenten im Punkt (50/50) nicht übereinstimmen.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen Die Schülerinnen und Schüler (19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen	 

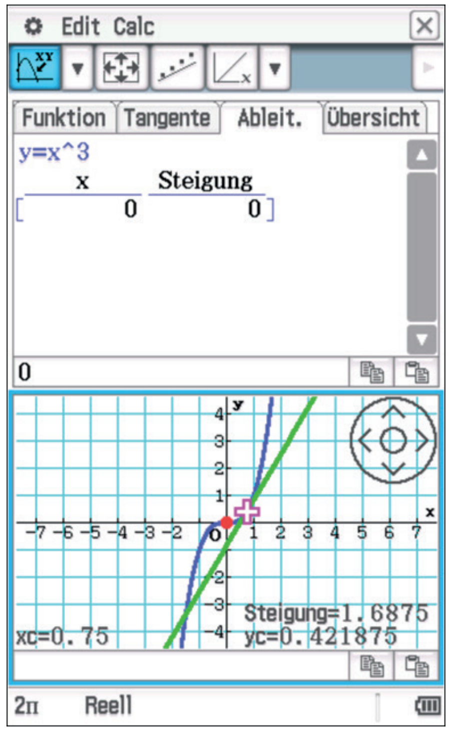
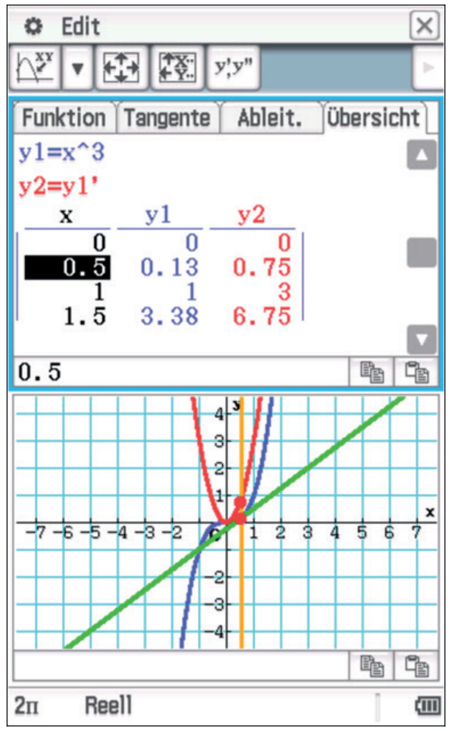
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die beiden quadratischen Funktionen werden für eine bessere Übersicht definiert. *Define* findet man in der *Math3* Tastatur. Zwischen kleinen und großen Buchstaben wird nicht unterschieden. Den Befehl *solve* findet man ebenfalls dort. Die Variable, nach der die Gleichung aufgelöst werden soll, ist anzugeben (s. Abb. links). Im Menüpunkt Interaktiv findet sich das Untermenü *(Un-) Gleichungen*; auch dort findet man den Befehl *solve*. Da der Bildschirm tlw. nicht vollständig erfasst wird, wurden einige Umformungsschritte rechts nochmals aufgeführt. Durch das Gleichheitszeichen wird der Variablen a die Variable b nicht zugeordnet. Wenn man dies machen will, ist zusätzlich  einzufügen. Entsprechendes gilt für die anderen Variablen.	Zur Bestimmung der Tangenten, lässt sich die Eigenschaft nutzen, dass Parabeln und Tangenten nur einen Punkt gemeinsam haben. Die gilt nur für Funktionsgrafen, die nur eine Links- oder Rechtskrümmung haben. Diese Tatsache ist mit den Schülerinnen und Schülern ausführlich zu diskutieren, damit sich nicht eine Fehlvorstellung festsetzt, die nur für wenige Kurven gilt. Die notwendige Vorstellung ist, dass die Tangente diejenige Gerade ist, die den Kurvenverlauf in einem Punkt und seiner Umgebung am besten wiedergibt. Da es nur eine Lösung x = 50 geben darf, folgt m = -2. Dies gilt für beide Funktionen. Mit dem Ansatz, dass es nur eine gemeinsame Lösung geben darf, lassen sich die Parabeln auch an anderen Stellen zusammensetzen. Wir zeigen dies für x = 40. Als Ansatz wählen wir: $f(x) = -a \cdot x^2 + 100$ $g(x) = b \cdot (x-100)^2$ $f(x) = g(x) \;\rightarrow a = \frac{-9b}{4} + \frac{1}{16}$ Die Tangente: $y = m \cdot x + d$ $g(40) = m \cdot 40 + d \rightarrow d = 3600b - 40m$ $f(x) = y$ Nur eine Lösung: $b = \frac{m}{180} + \frac{1}{36}$ $g(x) = y$ Nur eine Lösung: m=-2 ⇨ $b = \frac{1}{60}$ und $a = \frac{1}{40}$ ⇨ $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 100$ ⇨ $g(x) = \frac{1}{60}(x-100)^2$ Diese Umformungen können auch händisch ausgeführt werden; nur verlagert man dadurch die Fragestellung zu sehr auf das Problem des Umgangs mit Termen.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen Die Schülerinnen und Schüler (19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen	
Inhaltliche Schwerpunkte: • Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente Die Schülerinnen und Schüler (8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen, (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die Grafen wurden ohne Einschränkung des Definitionsbereichs gezeichnet. Wenn man die Grafen abschnittsweise zeichnen möchte, sind die Funktionen entsprechend zu definieren. (s. y81 bzw. y83 Abb. links, das Symbol I findet man auf der Tastatur unter Symbol).	Aus der visuellen Darstellung (s. Abb. links) ist wieder zu erkennen, dass der Übergang knickfrei ist. In diesem Fall haben wir das auch in die Berechnung eingegeben, da die Tangentengleichung dadurch bestimmt wurde, dass sie eine Tangente für beide Parabeln an der Stelle x = 40 ist. Dass der Ansatz mit quadratischen Funktionen wegen des Lenkungsrucks keine Lösung ist, darauf gehen wir später ein, wenn wir die Bedeutung der 2. Ableitung behandeln.
Im Geometrie Modul lassen sich auch Funktionsgrafen zeichnen: y=f(x) . Der Punkt B wird als (1/1) fixiert. C ist zunächst beliebig. Durch die Punkte B und C wird die Gerade gelegt. Durch Veränderung vom Punkt C (erst markieren und in einem 2. Schritt bewegen), lässt sich die Gerade so um B drehen, dass sie das Aussehen einer Tangente im Punkt B hat.	Für die Schülerinnen und Schüler ist es wichtig zu erkennen, dass die Vorstellung, dass die Tangente eine Gerade ist, die nur einen gemeinsamen Punkt mit der Kurve hat, für den Grafen einer Funktion dritten Grades nicht trägt. Außerdem ist aus der Zeichnung (s. Abb. links) nicht wirklich zu erkennen, ob es sich um die Tangente im Punkt (1/1) handelt. Im Geometrie Modul findet man unter *Zeichnen -> Konstruiere* den Befehl *Tangente an Kurve.* Daraus folgt, dass es möglich sein muss, eine Tangente an einen Funktionsgrafen und damit auch die Steigung des Grafen in einem Punkt des Grafen zu bestimmen. Man macht das mit Hilfe von Sekantensteigungen nach dem üblichen Verfahren. Dieses wollen wir im Folgenden mit Unterstützung des ClassPad herleiten.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente Die Schülerinnen und Schüler (8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen, (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Im Menü Ansicht lässt sich der Befehl *Zommfeld* wählen. Mit diesem Werkzeug kann man ein Rechteck um den Punkt B legen. Der Inhalt des Rechtecks wird dann vergrößert dargestellt. Diesen Vorgang kann man so lange wiederholen, bis der dargestellte Graf in etwa wie eine Gerade verläuft bzw. die Grenze der Rechengenauigkeit erreicht ist (s. Abb. links). Um ein Gefühl für die Vergrößerung zu erhalten, kann ein Punkt auf die Gerade gelegt und der Abstand des Punktes B mit diesem gemessen werden (s. Messbereich in der Abb. links). Die Steigung erhält man, indem die Gerade markiert wird und im Messfenster das Symbol für die Steigung gewählt wird. Man kann dann den Wert markieren und mit dem Stift in das Grafikfenster ziehen. Dieser Wert im Grafikbereich ist immer aktuell. Zur Visualisierung des Prozesses von der Sekanten- zur Tangentensteigung bietet der ClassPad einen eigenen Menüpunkt an: *Interaktive Diff-Rechn* (s. Abb. links). Die Abbildung zeigt den Unterpunkt Tangente. Die Koordinaten der Punkte D und E sind in der Tabelle oben einstellbar. In der Abbildung wurde der Punkt E so gewählt, dass er den kleinstmöglichen Abstand zum Punkt D hat. Abstände und Sekantegleichung und Steigung werden automatisch berechnet.	Aus der Abbildung links ist zu erkennen, dass der gekrümmte Graf bei entsprechender Vergrößerung lokal die Form einer Geraden annimmt. (Funktionenmikroskop) Wir zeigen im Folgenden noch einen zweiten Weg zur Einführung der Ableitung; gehen aber der Vollständigkeit halber auf das vom ClassPad zur Verfügung gestellte Werkzeug ein. Des Weiteren weisen wir darauf hin, dass dieses Werkzeug nicht den Vorgaben des IQB hinsichtlich der Funktionen eines digitalen Werkzeugs entspricht. Auf der anderen Seite beziehen sich die Vorgaben vor allem im Hinblick auf das Abitur und nicht direkt auf den Unterricht. Es sei noch darauf hingewiesen, dass der Begriff Tangente irreführend ist, da keine Tangente, sondern eine Sekante bestimmt wird. Über *Option* lässt sich die Tangente zwar einblenden; der Prozess, wie man zur Tangentengleichung gelangt bleibt aber verborgen. Da der Rechner aber eine Tangente einzeichnen kann, folgt, dass es einen Prozess zur Berechnung geben muss.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente Die Schülerinnen und Schüler (8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen, (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
in einem weiteren Unterpunkt (Ableit.) wird die Tangente direkt bestimmt. Mit Hilfe von  kann man den Punkt auf dem Grafen verschieben. Die Werte sind dann unten ablesbar. Eine Zusammenfassung findet sich unter dem Menüpunkt: *Übersicht.* Die Grafen von Funktion und Ableitung werden direkt erstellt. Die eingezeichnete Tangente bezieht sich auf den in der Tabelle markierten x-Wert.	Aus didaktischer Sicht stellt sich die Frage, ob die dargestellten Hilfsmittel nicht zu viel des notwendigen Prozesses verschleiern. Aus diesem Grund stellen wir im Folgenden eine weitere Möglichkeit für die Einführung der Ableitung dar.

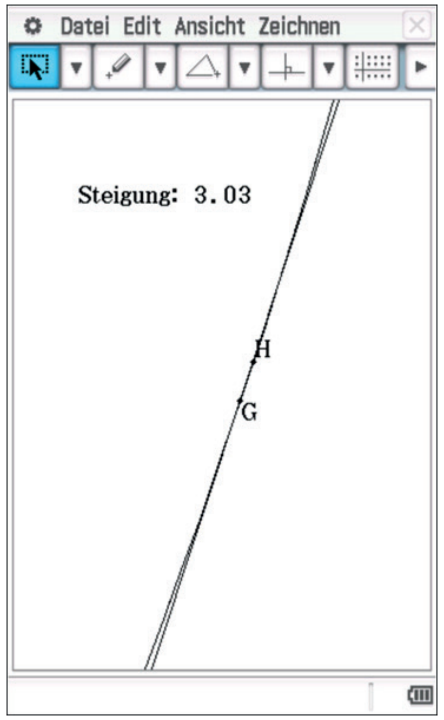
Bezug zum Lehrplan	Screenshot

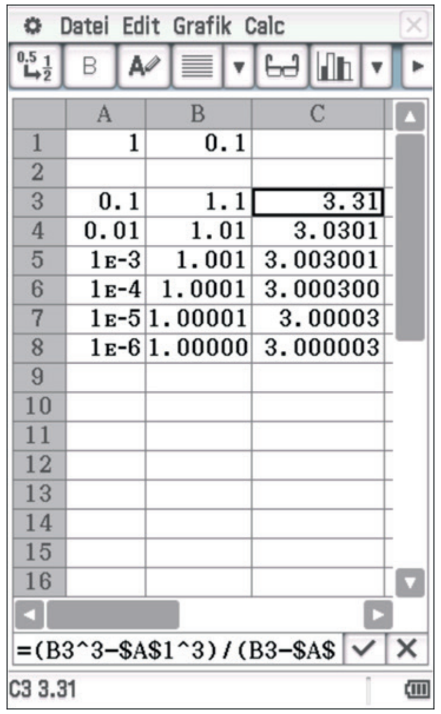
Inhaltliche Schwerpunkte:

• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente

Die Schülerinnen und Schüler

(8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,





	A	B	C
1	1	0.1	
2			
3	0.1	1.1	3.31
4	0.01	1.01	3.0301
5	1E-3	1.001	3.003001
6	1E-4	1.0001	3.000300
7	1E-5	1.00001	3.00003
8	1E-6	1.00000	3.000003
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			

=(B3^3-A1^3)/(B3-A

C3 3.31

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik

Der Punkt G liegt auf dem Grafen der Funktion und wurde so verschoben, dass er die Koordinaten G(1/1) hat. Der Punkt H liegt ebenfalls auf dem Grafen und die Gerade verläuft durch die beiden Punkte, ist also eine Sekante. Genau wie oben wurde der relevante Ausschnitt mehrfach vergrößert. Man kann die Sekante markieren und erhält im Messfenster den Wert für die Steigung. Dieser Wert wird ebenfalls markiert und mit dem Stift in den Zeichenbereich gezogen. So lässt sich die Veränderung des Wertes bei der Annäherung des Punktes H an den Punkt G beobachten. Ein weiteres Zoomen war auf Grund von Rechengenauigkeiten nicht möglich.

Für die Bestimmung einer Geradengleichung sind zwei Punkte erforderlich. Deswegen wird die Tangente durch Sekanten angenähert.

In die Zelle A1 wird die Stelle eigetragen, an der die Steigung der Tangente bestimmt werden soll. Da im Weiteren direkt auf diese Zelle Bezug genommen wird, kann man durch Eintrag eines anderen Wertes die Tangentensteigung für beliebige Stellen bestimmen. Die Zellen der dritten Zeile können nur spalten- oder zeilenweise kopiert werden. Zeilen und Spalten können nicht gleichzeitig eingefügt werden.

Der Prozess der Annäherung des Punktes H an den Punkt G lässt sich in der Tabellenkalkulation numerisch nachvollziehen. Aus den Werten wird deutlich, dass die Steigung der Tangente für die Stelle x = 1 für die Funktion $f(x)=x^3$ den Wert 3 hat. Dies ist kein Beweis. Der wird im Folgenden allgemein geführt. Da sich die Steigung auch für weitere Stellen näherungsweise bestimmen lässt, hätten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, die Potenzregel für Ableitungen selbst zu finden. Wir stellen allerdings im Folgenden noch ein Verfahren vor, von dem wir meinen, dass es den Lernenden leichter fällt, die Potenzregel und auch die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen zu finden. Dieses Verfahren ist mehrfach mit Schülerinnen und Schülern erfolgreich durchgeführt worden.

Bezug zum Lehrplan

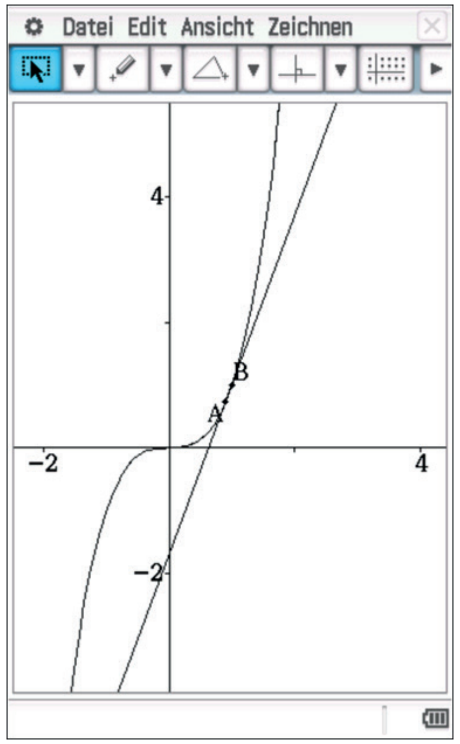
Inhaltliche Schwerpunkte:

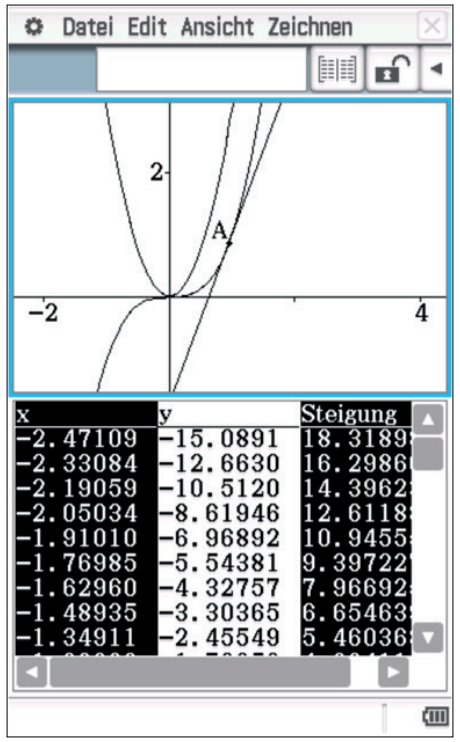
• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente

Die Schülerinnen und Schüler

(8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,

Screenshot

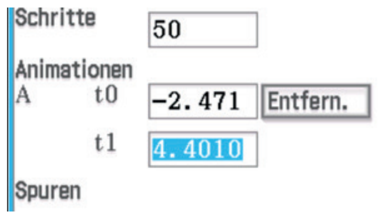




Hinweise zur Bedienung

Der ClassPad bietet die Möglichkeit der Animation. Leider ist es nicht möglich, sowohl den Punkt A als auch den Punkt B gleichzeitig auf dem Graf mit konstantem Abstand wandern zu lassen. Auch eine Konstruktion, die den Punkt B sowohl an den Punkt A als auch an den Kreis zu binden, ist nicht möglich. Dies liegt vor allem daran, dass die Möglichkeit, Kreise mit einem vorgegebenen Radius zu konstruieren, nicht besteht.

Unter *Zeichnen -> Konstruiere* findet sich der Befehl: *Tangente an Kurve*. Zu berücksichtigen bei der Anwendung ist, dass der Punkt A mit erzeugt wird. Es ist nicht möglich, diesen Befehl auf einen bereits vorhandenen Punkt anzuwenden.
Für die Animation ist der Punkt A und der Graf zu markieren.
Edit -> Animieren -> Animation hinzufügen
Edit -> Animieren -> Ablaufen (einmal)
Für die Abbildung links wurde für die Animation folgende Einstellung gewählt:



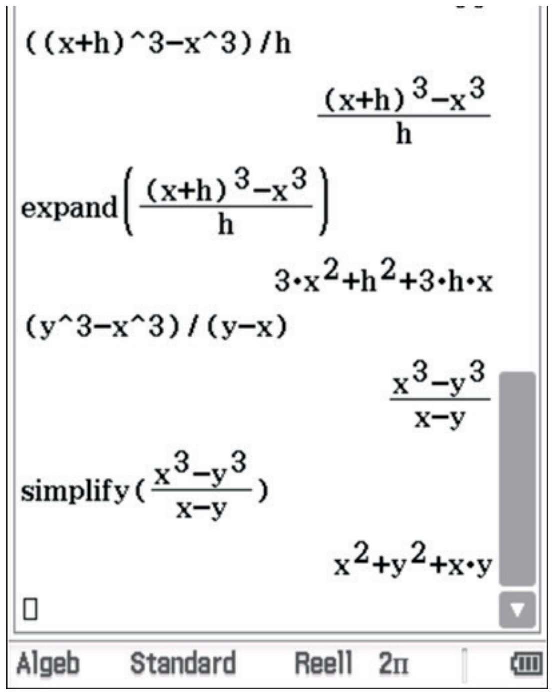
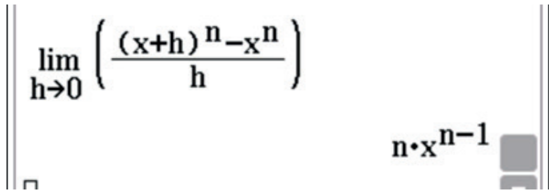
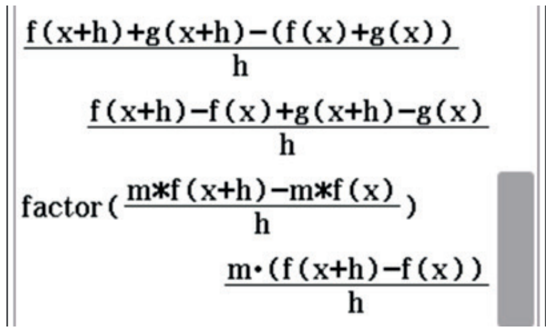
Die Einstellung kann unter *Animation* bearb. vorgenommen werden.
Um die durchlaufenen Werte des Punktes und der Tangentensteigung zu erhalten, wird zunächst der Punkt A markiert. Wenn man dann im Messfenster das Tabellensymbol wählt, erhält man die Koordinaten, die der Punkt A während der Animation durchlaufen hat. Entsprechend verfährt man mit der Tangente, wobei man für die Steigung wählt.

Für die Visualisierung der Werte für die Steigung werden die beiden Spalten markiert und mit dem Stift in den Zeichenbereich gezogen.

Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik

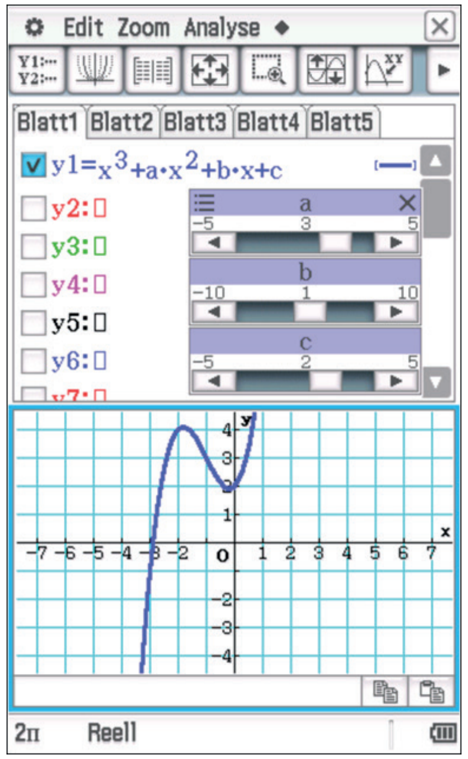
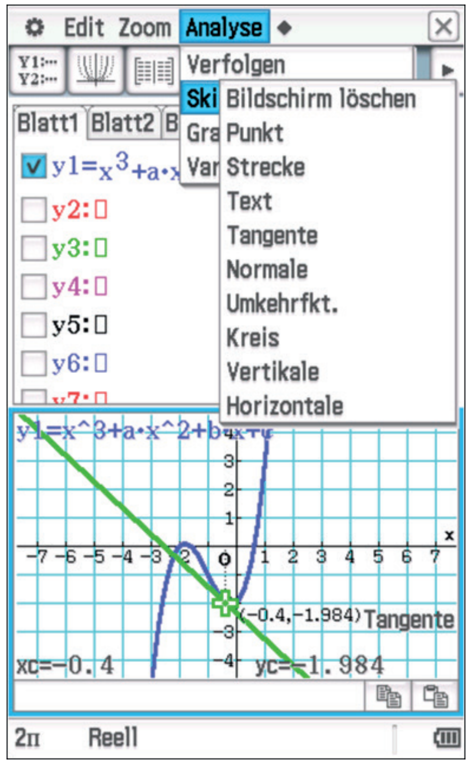
Die Bestimmung der Tangentensteigung ist zunächst ein lokaler Prozess. Mit Hilfe des ClassPads (s. Abb. links) gelingt es zu verdeutlichen, dass im nächsten Schritt mehrere Stellen betrachtet werden. Der Punkt A wandert mit der Tangente über den Grafen.

Schülerinnen und Schüler haben so die Möglichkeit, Ableitungsregeln selbst herauszufinden. Gleichzeitig wiederholen sie den Zusammenhang zwischen Graf und Gleichung einer Funktion, da ihre Aufgabe darin besteht, zu dem Ableitungsgrafen, die passende Funktionsgleichung zu finden.
Dies ist kein Beweis; aber es besteht die Möglichkeit, die Schülerinnen und Schüler mehr in den Prozess zu integrieren.
In der Regel finden sie die Potenzregel und die Ableitungen der sin- und cos-Funktion.

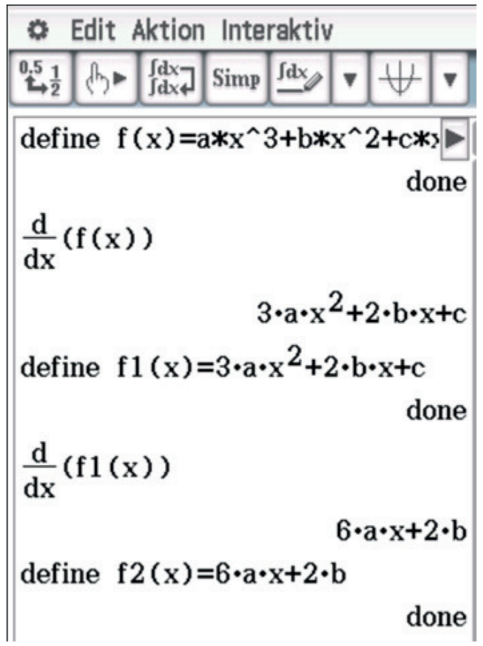
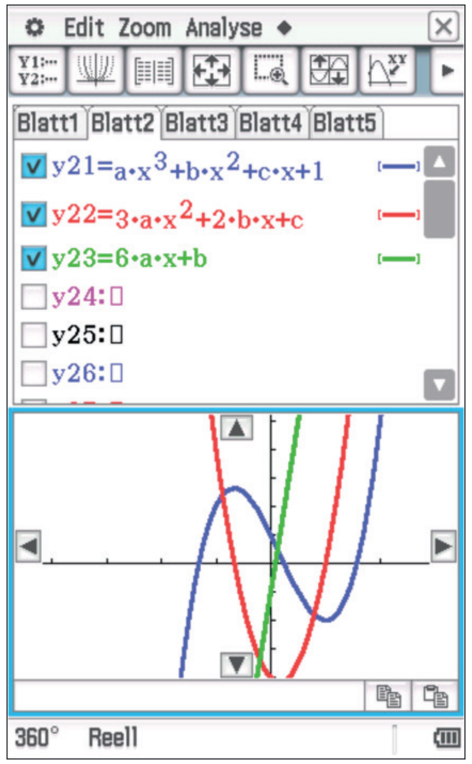
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente Die Schülerinnen und Schüler (8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen, (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel, (14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,	  

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Der Differenzenquotient lässt sich im Bereich *Main* direkt eingeben. Der Befehl *expand* bedeutet, dass die Klammer ausmultipliziert wird und gleichzeitig wird der Term vereinfacht, so dass die Zwischenschritte nicht deutlich werden. Das Gleiche gilt, wenn man nicht die Differenz, sondern die Punkte direkt betrachtet. Der Befehl für die Grenzwertbildung findet sich unter den Reitern *Interaktiv* -> *Berechnungen*. Der zu behandelnde Term ist vorher zu markieren und die voreigestellte Variable x ist in diesem Fall durch h zu ersetzen. Sowohl die Summen- als auch die Faktorregel lassen sich nicht weiter bearbeiten. Der Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten ist im CAS nicht programmiert.	Im Unterricht ist die Entscheidung zu treffen, ob die Termumformungen händisch vorgenommen oder dem Rechner überlassen werden. Wenn man den ClassPad benutzt, ergibt sich die Frage, welche Umformungen zu den Rechnerergebnissen führen. Dies könnte eine Motivation sein, diese Umformungen zu hinterfragen. Die Grenzwertprozesse sind natürlich in beiden Fällen noch vorzunehmen, wobei dies natürlich auch mit dem ClassPad möglich wäre. Wir würden zunächst eine Hilfsmittel freie Diskussion im Unterricht vorziehen. Man könnte es aber auch das CAS machen lassen, sollte danach aber die Umformungen besprechen. Die Potenzregel für Ableitungen lässt sich durch Grenzwertbildung bestimmen. Wenn man die dem CAS überlässt, sollte im Unterricht geklärt werden, wie man zu diesem Ergebnis gelangt. Die Umformungen in der Abbildung links lassen sich leicht händisch durchführen. Die eigentliche Grenzwertbildung ist sowieso im Unterricht werkzeugfrei zu besprechen.

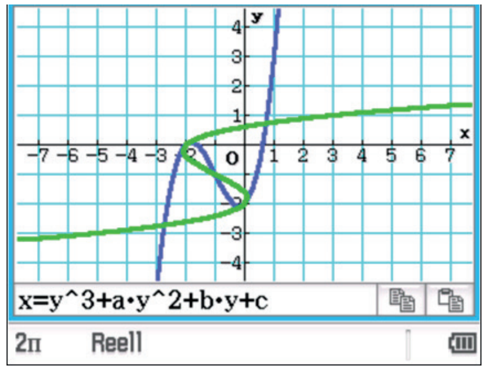
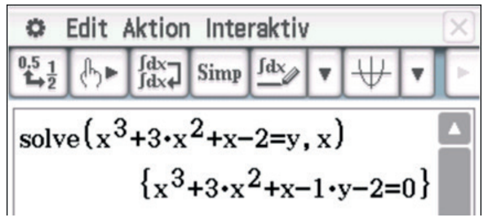
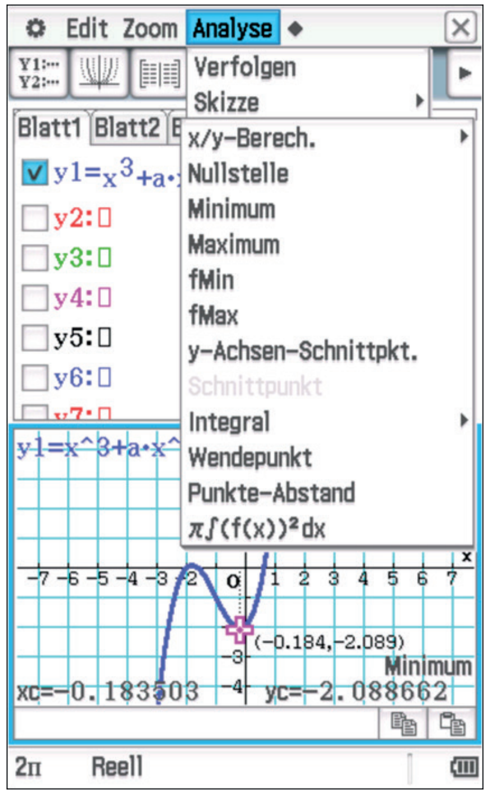
Untersuchung von Funktionsgrafen

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen • Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte Die Schülerinnen und Schüler (1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen, (3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),	 

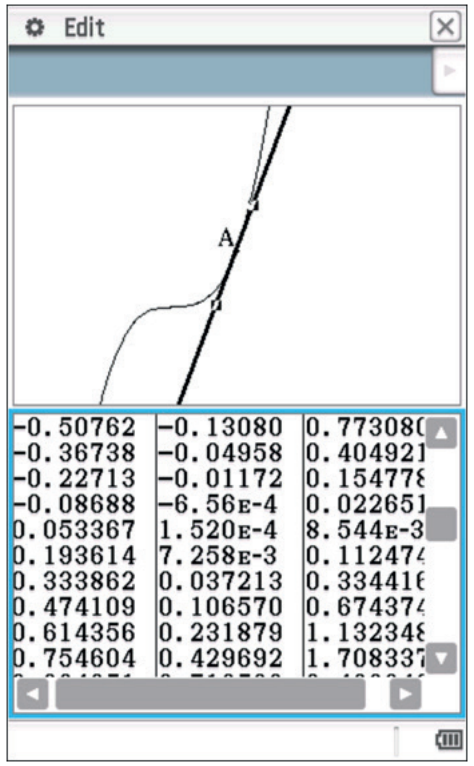
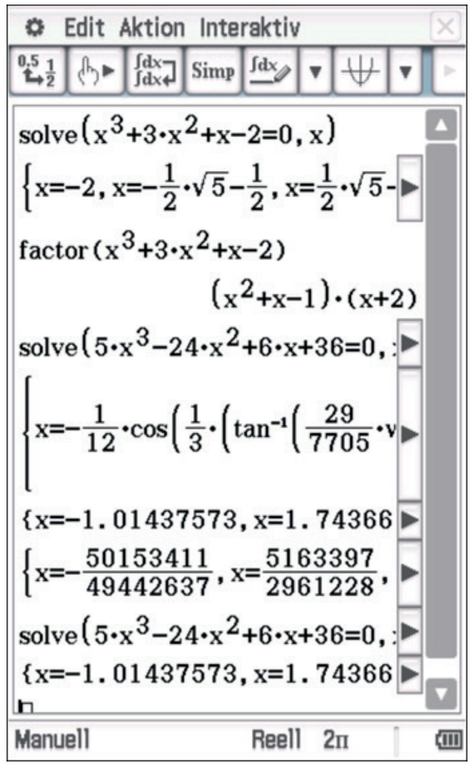
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Funktionsgrafen und Funktionsgleichung eignet sich der Einsatz von Schiebereglern. Es ist möglich, bis zu drei Schieberegler gleichzeitig einzusetzen. Es ist dabei zu beachten, dass die benutzten Variablen den durch den Schiebevorgang festgelegten Wert auch in anderen Menüpunkten behalten. Das heißt, es handelt sich um globale Variablen. Für das Zeichnen benutzt man: . Die Schieberegler werden dann automatisch erzeugt. Die Einstellung der Regler kann mit verändert werden. Der ClassPad bietet einige Analysewerkzeuge. Mit Hilfe der Cursor Tasten lässt der Punkt (gekennzeichnet durch das grüne Kreuz) auf dem Grafen bewegen. Der Menüpunkt *Verfolgen* bietet die Möglichkeit, einen Punkt auf den Grafen zu setzen und diesen mit Hilfe der Cursor Tasten auf dem Grafen zu bewegen. Die Koordinaten des Punktes werden dann angegeben. Der Befehl Kreis zeichnet einen solchen, nachdem ein Punkt für den Mittelpunkt und einer für einen Randpunkt eingegeben worden ist. Die Kreisgleichung wird dann angegeben.	Durch den Einsatz eines Funktionsplotters kehrt sich die Kurvendiskussion um. Früher wurde diese durchgeführt mit dem Ziel, Kenntnis über den Funktionsgrafen zu erhalten. Durch den Plotter ist der Graf bekannt und die Schülerinnen und Schüler können selbständig herausfinden, was interessante Punkte sind und wie diese mit der Gleichung der Funktion zusammenhängen. Des Weiteren können sie sich einen Überblick darüber verschaffen, wie die Grafen von Potenzfunktionen im Prinzip verlaufen. Dies gilt auch für weitere Funktionsklassen. Für die Untersuchung ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler gleichzeitig nur eine der Variablen verändern. Der Einfluss eines Faktors vor dem x^3 müsste gesondert untersucht werden. Da das absolute Glied nur eine Verschiebung in y Richtung bewirkt, bietet es sich an, dafür eine feste Zahl zu wählen und die Variable als Koeffizient vor das x^3 zusetzen. Die Analyse Möglichkeiten des ClassPad weisen darauf hin, dass die Behandlung von Funktionsgrafen sich grundlegend ändert, wenn man solche digitalen Medien einsetzt. Es geht zum Beispiel nicht mehr darum, die Gleichung einer Tangente zu bestimmen, sondern eher um die Frage, wie sich eine solche bestimmen ließe. Ein entsprechender Algorithmus muss im ClassPad implementiert sein.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen • Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte Die Schülerinnen und Schüler (1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen, (3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion), (11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen, (12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung, (16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten, (17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,	 

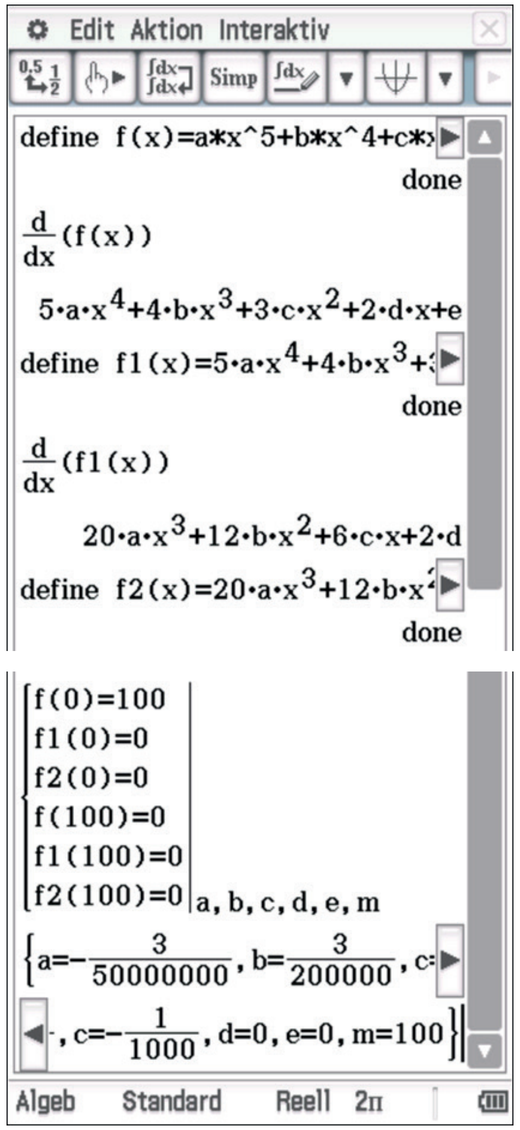
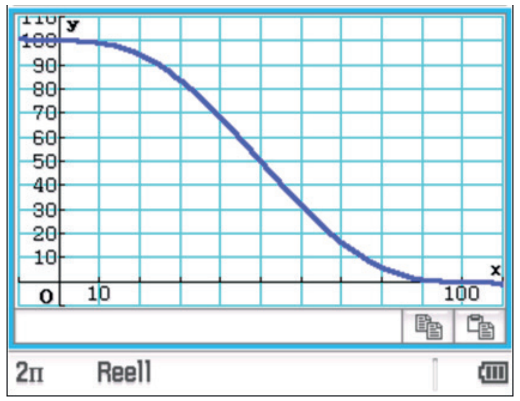
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Wenn man den Einfluss von Parametern auf Funktionsgrafen und deren Ableitungsgrafen untersuchen möchte, wäre es sinnvoll aus Gründen der Übersicht, diese vorher entsprechend zu definieren. (s. Abb. links) Dieses lässt sich aber leider nicht durchführen, da man eine Fehlermeldung erhält, wenn man anstatt der Terme (s. Abb. links unten) f(x) usw. eingibt. Die Anzahl der Schieberegler ist auf 3 begrenzt.	Mit Hilfe des ClassPad haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, eigenständig die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen und deren Grafen zu erkunden. Durch die gemeinsame Darstellung der Funktion und ihrer Ableitungen werden auch die Zusammenhänge deutlich.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen • Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte Die Schülerinnen und Schüler (1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen, (3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),	  

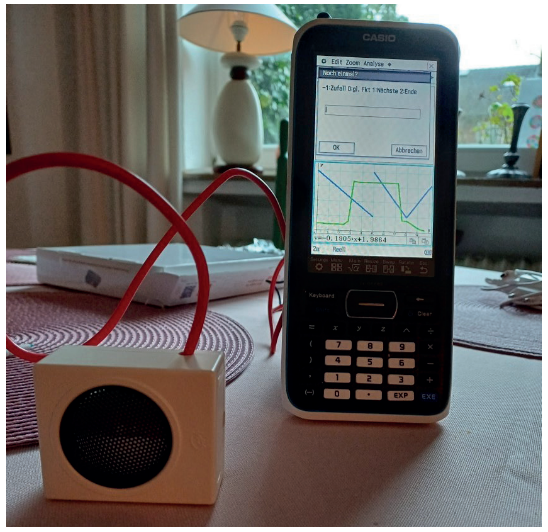
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die Befehle für die Umkehrfunktion usw. findet man unter dem Menüpunkt: *Analyse* Die gesamten Punkte, die zu einer Kurvendiskussion gehören sind unter dem Menüpunkt *Analyse* aufgelistet. Im x/y-Bereich. lassen sich zu vorgegebenen x bzw. y-Wert der y bzw. x-Wert berechnen. *Minimum und Maximum* beziehen sich auf die lokalen Minima und Maxima. fMin und fMax beziehen sich auf das globale Minimum bzw. Maximum bezogen auf den in angegebenen Bereich. Mit dem Befehl Punkte-Abstand lassen sich zwei Punkte auf den Grafen setzen und deren Abstand wird dann angegeben.	Der Begriff Umkehrfunktion ist kritisch zu betrachten, da der dargestellte Graf kein Funktionsgraf ist. Es gibt Gleichungen dritten Grades, die das CAS lösen kann. Die angegebene gehört offensichtlich nicht dazu. So bleibt die Frage offen, auf welche Art der Graf der „Umkehrfunktion entsteht. Gleichungen dritten und höheren Grades werden dann natürlich numerisch gelöst. Auf die Möglichkeiten, Gleichungen 3. Grades zu lösen, gehen wir weiter unten noch genauer ein. Durch die Unterscheidung von Minimum und fMin bzw. Maximum und fMax erhalten die Schülerinnen und Schüler einen Hinweis, dass lokale Minima und das globale Minimum zu unterscheiden sind. Gleiches gilt auch für die Maxima.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
• Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte Die Schülerinnen und Schüler (16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten, (17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,	
(2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel, Obwohl ausdrücklich darauf hingewiesen wird, dass die Gleichungen ohne Hilfsmittel zu lösen sind, wollen wir trotzdem die Möglichkeiten des ClassPad darstellen.	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Genau wie oben kann man nochmal die Animation einrichten und laufen lassen. Der Ausschnitt aus der Tabelle wurde so gewählt, dass der interessante Bereich um x = 0 sichtbar wird.	Die Animation wurde zwar schon für die Visualisierung der Ableitungsfunktion genutzt. Jetzt lässt sich der Blick aber darauf wenden, was sich im Grafen ändert, wenn die Tangente den Grafen durchläuft. Obwohl man die Steigung der Tangente auch aus der Visualisierung der Ableitung leicht ablesen kann, ist es hilfreich, die konkreten Werte sich im Bereich des Koordinatenursprungs zu vergegenwärtigen. Bzgl. der Krümmung muss darauf hingewiesen werden, dass es sich nur um qualitative Aussagen handelt. Einen Term, der das Krümmungsverhalten quantitativ beschreibt, wird in den Hinweisen für 12 / 13 hergeleitet.
Der ClassPad bietet verschiedene Möglichkeiten für das Lösen kubischer Gleichungen. Mit Hilfe von *Interaktiv -> Umformungen -> faktoris -> factor* kann ein Term in Faktoren zerlegt werden. Den Befehl *solve* findet man an verschiedenen Menüpunkten. Zum einen in der Tastatur *Math.* Das Programm gibt, wenn es möglich ist, die exakten Lösungen an. Dies entspricht dem Weg, wenn man *Interaktiv -> (Un-)Gleichungen* wählt. Näherungslösungen erhält man dann mit Wenn man *Weiterführend -> solve* wählt, hat man die Wahl zwischen einer exakten Lösung *(solve)* oder einer numerischen Lösung.	Die Entscheidung, ob eine Gleichung exakt oder numerisch gelöst werden soll, kann vor allem in Klausuren für die Schülerinnen und Schüler bedeutsam sein. Wenn das Programm versucht, die Gleichung exakt zu lösen, kann dies unter Umständen relativ lange dauern (15 Minuten und länger). Hier macht es zeitlich gesehen einen erheblichen Unterschied, ob dies auf dem Handheld oder mit dem Manager auf einem Computer durchgeführt wird. Für exakte Lösungen sind wahrscheinlich die Cardanischen Formeln integriert. Die Behandlung dieser übersteigt natürlich das Schulniveau, was aber nicht heißt, dass darauf nicht hingewiesen werden sollte, wenn der ClassPad im Unterricht eingesetzt wird. Für das numerische Lösen gibt es das Newton- bzw. das Intervallhalbierungsverfahren. Die Behandlung von Näherungsverfahren ist laut Lehrplan nicht vorgesehen. Bei Benutzung von Rechnern zur Lösung von Gleichungen empfehlen wir das Halbierungsverfahren zumindest zu erläutern.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen • Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte Die Schülerinnen und Schüler (16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten, (17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung, (19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Um es übersichtlich zu gestalten, wird die Funktion mit den zu bestimmenden Koeffizienten definiert. Ableitungen lassen sich über *Interaktiv -> Berechnungen -> diff* bestimmen. Damit die Berechnung ausgeführt wird, muss im *Grundformat* der *Assistent* nicht markiert sein. Die berechneten Ableitungen werden dann ebenfalls als f1 und f2 definiert. Gleichungssysteme lassen sich mit Hilfe von (*Keyboard Math1*) lösen. Die Taste ist entsprechend oft zu betätigen. Für die Visualisierung kann man die berechneten Koeffizienten entsprechend der berechneten Werte definieren (mit dem Zuordnungspfeil oder mit *define*) oder die Werte sind halt direkt einzugeben.	Nachdem die Bedeutung der 2. Ableitung geklärt wurde, macht es Sinn, das Trassierungsbeispiel nochmals zu diskutieren. Bzgl. der ersten Lösung mit den beiden Parabeln wurde das Problem des Lenkungsrucks nicht berücksichtigt. So ergibt sich zum Beispiel bei Modelleisenbahnen das Problem, wenn eine gerade Schiene mit einer gebogenen verbunden wird, dass beim Übergang die Krümmung sich ruckartig ändert. Das heißt, eine Lösungsfunktion muss folgende Eigenschaften haben. $f(0)=100$ $f'(0)=0$ $f''(0)=0$ $f(100)=0$ $f'(100)=0$ $f''(100)=0$ Es gilt also, 6 Bedingungen zu erfüllen. Das bedeutet, wir wählen als Ansatz eine Funktion 5. Grades

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler *(6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen*	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Für das Aufnehmen von Bewegungen mit einem Ultraschall Bewegungssensor ist eine Messwerterfassung mit dem CLAB für Casio Grafikrechner und eine entsprechende Software erforderlich. Die Messwerterfassung ist nur mit dem Handheld und nicht mit dem Manager möglich. Mit der in der Abbildung links dargestellten Apparatur ist es zum einen möglich, Bewegungen wie zum Beispiel ein Hinunterrollen auf einer Schiefen Ebene oder Schwingungen datenmäßig zu erfassen, zum anderen, können mit Hilfe eines entsprechenden Diagramms Abstände zum Ultraschall Bewegungssensor vorgegeben werden. Ein Programm für die Messwerterfassung ist im Handheld Teil des Menüs. Ein Programm für das Nachvollziehen vorgegebener Weg-Zeit-Grafen kann man von der Homepage von Casio downloaden und dann mit Hilfe von *Datentausch* auf das Handheld übertragen	Das Bild links zeigt einen vorgegebenen Weg (blauer Graf), der durch Auf- und Abgehen in Richtung auf den Sensor von Schülerinnen Schülern nachvollzogen werden soll. Der grüne Graf zeigt einen nicht gelungenen Versuch. In dem verwendeten Programm gibt es neben dem in der Abbildung gezeigten weitere Grafen, die verschiedene Möglichkeiten abdecken. Schülerinnen und Schüler verstehen so auf Anhieb, dass die Steigung des vorgegebenen Grafen der Geschwindigkeit entspricht und dass Weg-Zeit-Funktionen stetig sein müssen. Auch die Bedeutung von Knicks wird verständlich, weil das eine abrupte Geschwindigkeitsänderung bedeutet. Schülerinnen und Schüler verwechseln leicht den Grafen eines s-t-Diagramms mit der Bahnkurve. Auch dieser Fehleinschätzung kann man durch Benutzung der Apparatur vorbeugen.

Arbeitsblätter: Analysis

1. Im Folgenden handelt es sich um einen Gesetzesvorschlag der EU:

Amts-Mathematik
Bei Gruppentierhaltung muss für jedes Kalb in Abhängigkeit von der Widerristhöhe in Zentimetern eine frei verfügbare Mindestfläche in Quadratmetern gemäß nachstehender Formel vorhanden sein:
(Mathematische Exponentenschreibweise)
Mindestfläche cm (hoch) 2 gleich 0,40 x (hoch) 2 plus 70x plus 2720.
(Aus dem neuen Entwurf des Bundes für eine Kälberhaltungsverordnung.)

In dem Vorschlag wird eine quadratische Funktion für das Maß der Mindestfläche für Kälber vorgeschlagen.
Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich an und zeichnen Sie den Funktionsgrafen.
Aus dem Verlauf des Grafen ergibt sich, dass man im relevanten Bereich auch eine lineare Funktion wählen könnte. Geben Sie die Gleichung einer solchen linearen Funktion an.
Diskutieren Sie die sich ergebenden Unterschiede bezogen auf die Mindestfläche, wenn die quadratische durch eine lineare Funktion ersetzt wird.

2. Geben Sie im Modul Grafik & Tabelle den Funktionsterm $a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ ein. Geben Sie zusätzlich cos(x) ein. Für die Darstellung, nach dem beide Funktionsterme markiert sind, wählen Sie . Wenn nicht drei Schieberegler zu sehen sind, schauen Sie im Variablenmanager nach, ob die Variablen schon belegt sind.

a) Welche Auswirkungen haben Veränderungen der Variablen a, b und c für den Grafen? Verändern Sie zurzeit nur einen Koeffizienten.

b) Ist es möglich, die beiden Funktionsgrafen der sin- und cos-Funktion zur Deckung zu bringen? Was bedeutet dies für die sin- und cos- Funktion?

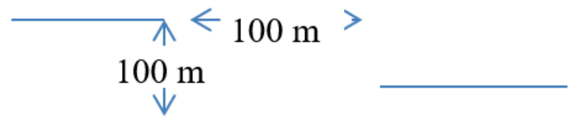
c) Es gilt: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Lassen Sie den Grafen der tan-Funktion zeichnen und erklären Sie den Verlauf im Hinblick auf die Definition.

3. Verfahren Sie entsprechend der Aufgabe 2 mit folgenden Potenzfunktionen:
$f(x)=a \cdot x^3+b \cdot x^2+c \cdot x+d$
$f(x)=a \cdot x^4+b \cdot x^3+c \cdot x^2+d \cdot x+e$

Sie können im ClassPad immer nur 3 verschiedene Koeffizienten zurzeit variieren. Wählen Sie die 3 aus und ändern Sie die Ausgewählten, wenn es Ihnen erforderlich scheint. Notieren möglichst viele Eigenschaften der Grafen.

4. Gegeben sind zwei waagerechte Eisenbahngleise, die für die Planung durch einen Funktionsgrafen verbunden werden sollen.



Wenn man einfach die beiden Endstücke durch eine Gerade verbinden würde, ergäbe sich in den Schienen ein Knick, was natürlich nicht sein darf.
Von daher gibt es die Möglichkeit, diese mit zwei Viertelkreisen, dem Grafen einer trigonometrischen Funktion oder zwei Parabelabschnitten zu verbinden.
Bestimmen Sie jeweils die entsprechenden Funktionsgleichungen.

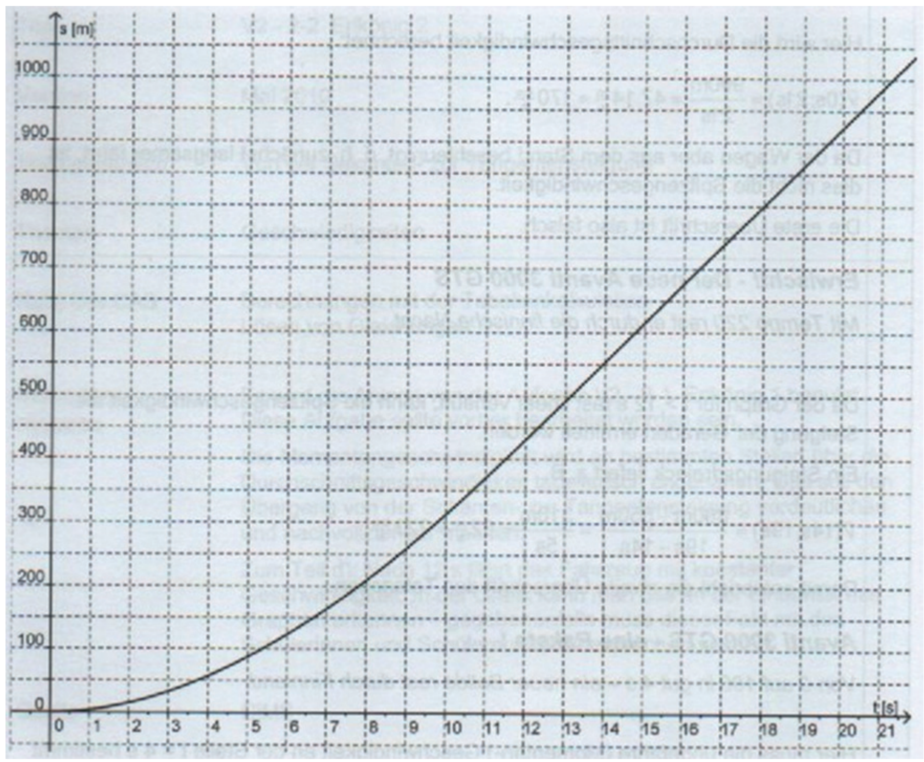
5. Das folgende Diagramm wurde von dem Bordcomputer eines neu entwickelten Autos aufgenommen. Es soll die Leistungen des Autos zeigen. Für den Prospekt sollen folgende Fakten aufgenommen werden:

a) Für den ersten km benötigt das Auto 21s.

b) Das Auto erreicht eine Geschwindigkeit von mindestens $v = 220\,\frac{km}{h}$.

c) Für das Erreichen der Geschwindigkeit $v = 100\,\frac{km}{h}$ benötigt das Auto 4s.

Überprüfen Sie die gemachten Aussagen anhand des Diagramms.



d) Begründen Sie, dass man den Verlauf des Grafen im Intervall [0s/12s] ganz gut durch die Funktion $f(x)=-0{,}07t^3+3{,}82t^2+0{,}14t$ darstellen kann.

Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Intervallen:
[0s/8s], [4s/8s], [7s/8s], [7,9s,8s] und [7,99s/8s]
[8s/12s], [8s/10s], [8s/9s], [8s/8,1s] und [8s/8,01s].
Schließen Sie daraus auf die Momentangeschwindigkeit für t = 8s.

e) Begründen Sie, dass die Funktion f für t≥12 keine sinnvolle Beschreibung ist.

f) Geben Sie für diesen Zeitraum einen geeigneten Funktionsterm an.

(Diese Aufgabe wurde mit Abwandlungen aus dem CiMS-Projekt Hamburg übernommen.)

6. Bestimmung der Steigung des Grafen von $f(x) = x^3$ im Punkt P(1/1).

Wählen Sie dazu den Geometrie Modus und geben Sie die Funktion f(x)=x^3 ein. Setzen Sie auf den Grafen einen Punkt A und verschieben Sie ihn so, dass seine Koordinaten (1/1) sind. Wählen Sie in der Nähe des Punktes einen weiteren Punkt B. Im Bereich *Ansicht* gibt es den Befehl *Zoomfeld*. Legen Sie ein solches Zoomfeld um die Punkte A und B. Verbinden Sie den Punkt mit dem Punkt B durch eine Strecke und verschieben Sie danach den Punkt B näher an den Punkt A. Wiederholen Sie diesen Vorgang mehrfach.
Wenn Sie die Strecke markieren, können Sie im Messfenster die Steigung der Strecke sich angeben lassen.
Erklären Sie mit ihren eigenen Worten, was das, was Sie durchgeführt haben, für die Steigung von Funktionsgrafen bedeutet.
Wie groß ist ihrer Meinung nach die Steigung von $f(x) = x^3$ im Punkt A(1/1)?

Tipp: Falls Sie Probleme haben, die Strecke zu markieren, weil sie kaum vom Funktionsgrafen zu unterscheiden ist, wählen Sie einfach, wenn der Funktionsgraf markiert ist: *Edit -> Eigenschaften -> Ausblenden*

7. Jemand benötigt für eine 2,5km lange Ortsdurchfahrt 180 Sekunden. Die Auswertung des elektronischen Fahrtenbuchs, das die Fahrtzeit und die zurückgelegte Strecke speichert, hat ergeben, dass die Weg-Zeit-Funktion in etwa durch folgende Funktion $s(t) = -\frac{5}{27}t^3 + \frac{5}{6}t^2$

a) Was gibt s(t) in welcher Einheit an? Was t in welcher Einheit?

b) Klären Sie, ob es sein kann, dass die maximal erlaubte Geschwindigkeit $v = 50\frac{km}{h}$ nicht überschritten wurde.

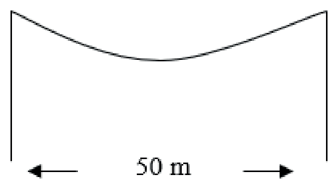
c) Nach einer Strecke von 2km ist ein Blitzer aufgebaut.
Wurde die erlaubte Geschwindigkeit an dieser Stelle eingehalten?

8. Nachdem Sie die Steigung an einer Stelle bestimmt haben, wollen wir dies verallgemeinern.
Gehen Sie dazu in das Geometrie Modul des ClassPads und geben Sie die Funktion $f(x) = x^3$ ein. Wählen Sie als Nächstes: *Zeichnen -> Konstruiere -> Tangente an Kurve*
Markieren Sie den erzeugten Punkt und den Funktionsgrafen

Edit -> Animieren -> Animation hinzufügen
Edit -> Animieren -> Ablaufen (einmal)

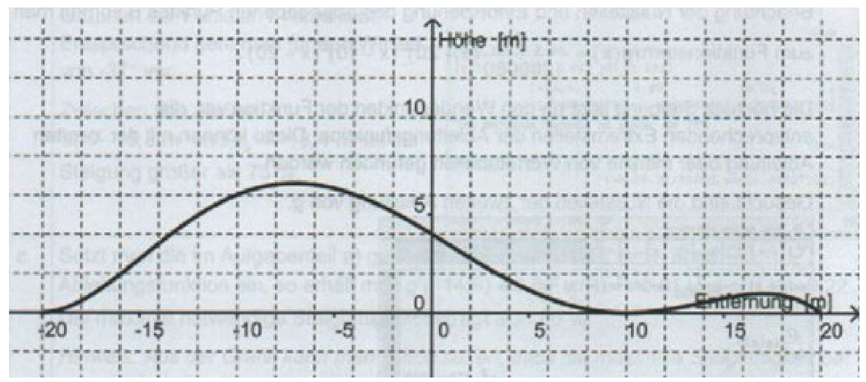
Markieren Sie danach den Punkt A und wählen im Messfenster das Tabellensymbol. Durch das Tippen auf den Bildschirm an einer beliebigen Stelle wird die Markierung des Punktes aufgehoben. Markieren Sie danach die Tangente, wählen das Symbol für die Steigung und die Tabelle.
Wir interessieren uns für die Funktion, die in Abhängigkeit von x die Steigung der jeweiligen Tangente angibt. Dazu markieren wir die Spalte mit dem x-Wert und die Steigung. Mit dem Stift ziehen wir die Tabellenwerte in den Geometrie Bereich. Die Werte werden jetzt grafisch dargestellt.
Ihre Aufgabe ist es nun, für den entstandenen Grafen eine passende Funktionsgleichung zu finden.
Verfahren Sie ebenso mit $f(x)= x^2,x^4,x^5$ usw. sin(x)
Haben Sie eine Vermutung, welche Form die Ableitung von $f(x)=x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ haben könnte?

9. An zwei Masten ist ein Kabel aufgehängt. Das Kabel darf in der Mitte höchstens 8m durchhängen.



Bestimmen Sie, wie groß der Winkel zwischen Kabel und Mast mindestens sein muss.
Hinweis: Ein durchhängendes Kabel wird zwar durch Kettenfunktionen beschrieben, allerdings kann man den Fehler, der durch eine Modellierung mit Parabeln entstehen kann, vernachlässigen.

10. Über eine Deichanlage mit dem abgebildeten Profil soll Material transportiert werden.



Die Raupe, die das Material transportieren soll, hat eine Steigfähigkeit von 75%. Klären Sie zeichnerisch und rechnerisch, ob dies möglich ist.
Falls das nicht der Fall ist, berechnen Sie, wie groß die Steigfähigkeit mindestens sein muss.

Tipp: Für die rechnerische Bestimmung sollten Sie für den Grafen einen passenden Funktionsterm finden.
(Diese Aufgabe wurde mit Abwandlungen aus dem CiMS-Projekt Hamburg übernommen.)

Lösungen für einige Arbeitsblätter

Lösung für Aufgabe 3:

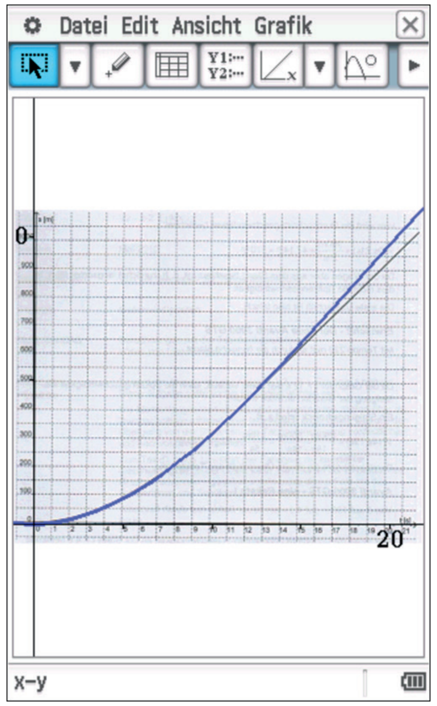
a) Ist direkt ablesbar

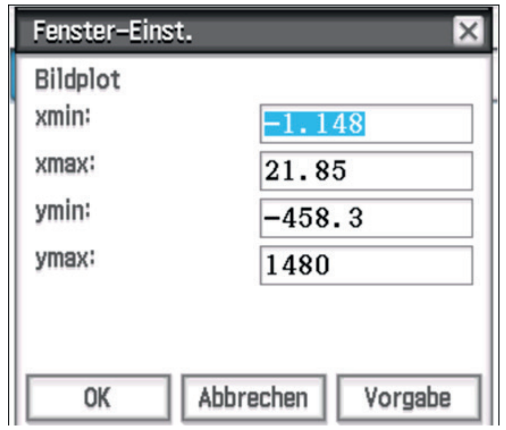
b) Für t≥12 s hat man einen fast linearen Verlauf.

Intervall $[18s/20s]$: $\bar{v} = \frac{925m-800m}{20s-18s} = 61{,}25\frac{m}{s} = 225\frac{km}{h}$
Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall

c) Näherungsweise lässt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall [3s/5s] bestimmen. $\bar{v} = \frac{90m-30m}{5s-3s} = 30\frac{m}{s} = 108\frac{k}{h}$

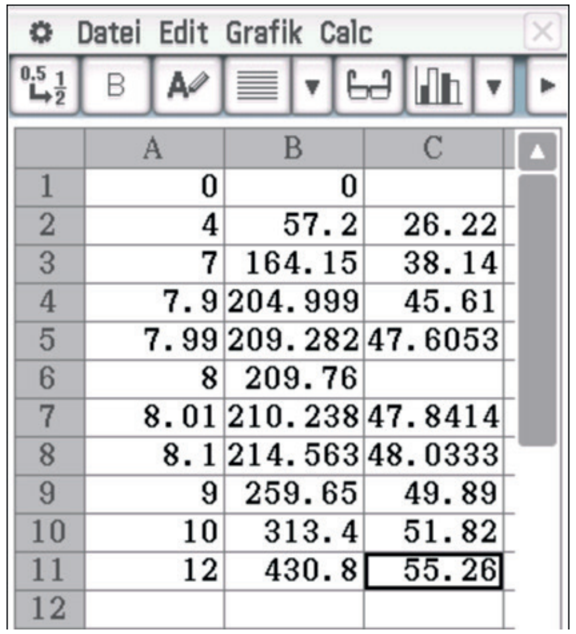
d) Lässt sich durch das Einsetzen einiger Werte überprüfen. Der ClassPad bietet allerdings die Möglichkeit, die vorgegebene Grafik in das Menü Bildplot zu übertragen und dann den Grafen der gegebenen Funktion darüber zu legen.





Für das Übertragen muss die vorgegebene Grafik natürlich zunächst gescannt werden. Für die Übertragung in das für den ClassPad notwendige Format benötigt man die Casio Picture Conversion Engine und den QuickTime Player. Danach ist die konvertierte Grafik in den Ordner Picture des Mangers bzw. des Handhelds zu übertragen. Das im Bildplot vorgegebene Koordinatensystem ist natürlich anzupassen.

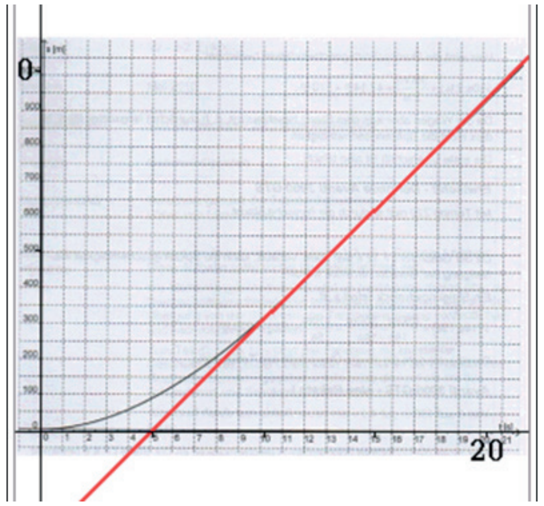
Man wähle dazu im Menü . Eine Einstellung, die ganz gut passt, findet man oben rechts.
Für die Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeiten wählt man am geeignetsten die Tabellenkalkulation.



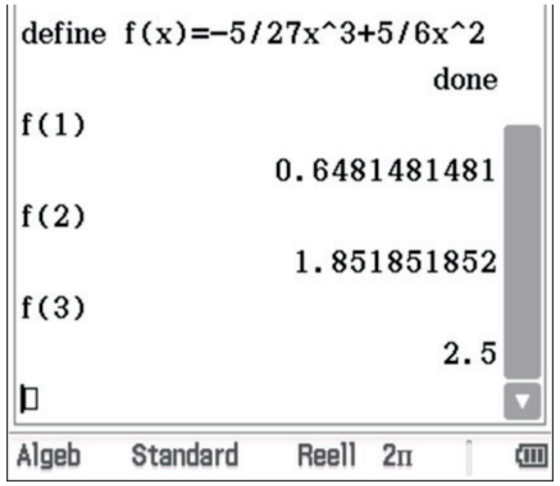
	A	B	C
1	0	0	
2	4	57.2	26.22
3	7	164.15	38.14
4	7.9	204.999	45.61
5	7.99	209.282	47.6053
6	8	209.76	
7	8.01	210.238	47.8414
8	8.1	214.563	48.0333
9	9	259.65	49.89
10	10	313.4	51.82
11	12	430.8	55.26
12			

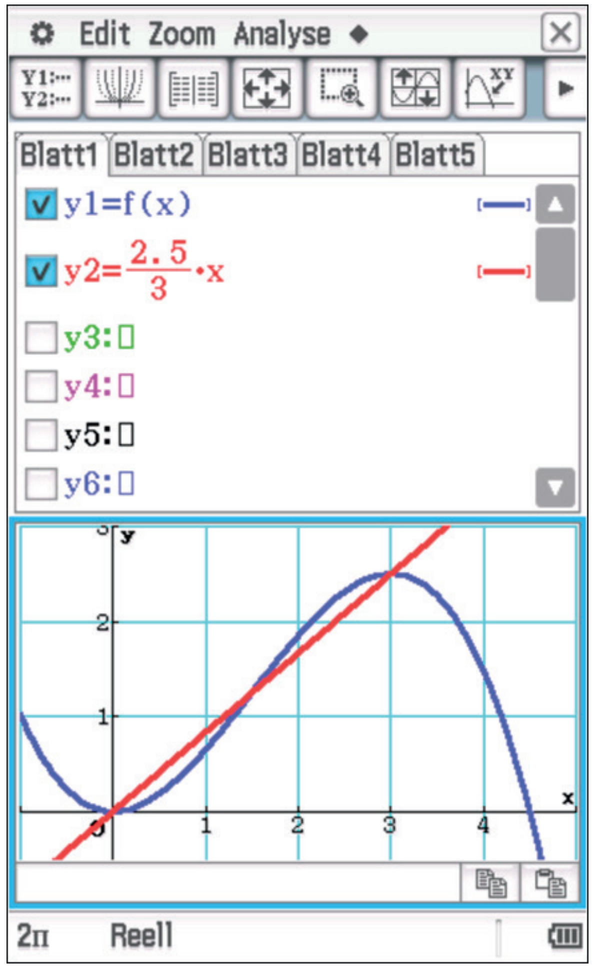
Es ist hilfreich, wenn man die Funktion vorher im Bereich *Main* definiert.

e) Dass man für *t* ≥12s einen eher linearen Verlauf hat, ist direkt aus der Grafik oben abzulesen. Aus abgelesenen Werten lässt sich ein Funktionsterm für eine lineare Funktion bestimmen. *g*(x)= 61,5t - 307. Diese lässt sich auch entsprechend eintragen.



Lösung für Aufgabe 5:
Für die Beantwortung der Frage macht es Sinn, den angegebenen Funktionsgrafen mit dem linearen, der eine konstante Geschwindigkeit voraussetzt, zu vergleichen. Durch Einsetzen einiger Werte für t erkennt man, dass s(t) die zurückgelegte Strecke in km und t die die Zeit in Minuten angibt.

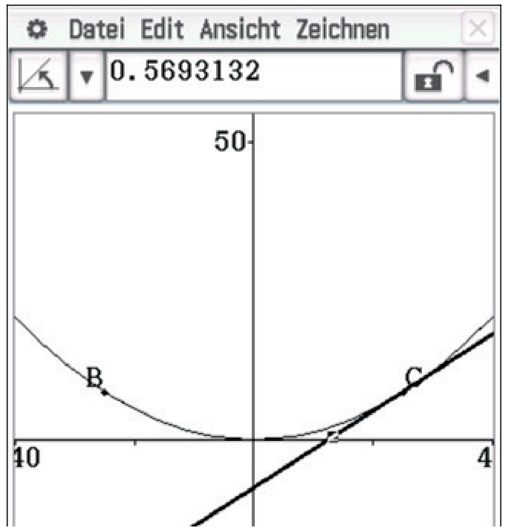




Aus der Grafik ist nicht eindeutig zu erkennen, ob die Steigung des Grafen der Funktion s(t) an der Stelle t = 2 s größer ist als die der Geraden.
Als Näherungswert erhält man für t = 2 s: $v \approx 1{,}111\ \frac{km}{Minute} = 66{,}6\frac{km}{h}$. Damit ist die gemessene Geschwindigkeit deutlich größer als die erlaubte.

Lösung Aufgabe 7:
Man legt ein Koordinatensystem so, dass der tiefste Punkt des Kabels im Koordinatenursprung liegt. Gesucht ist eine quadratische Funktion *f(x)=* a·x^2.

Des Weiteren gilt: f(25) = 8. => $a = \frac{8}{625}$ $\quad f'(x) = \frac{16}{625}x$ => $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{16}{25}\right) \approx 57°$



Man kann es auch zeichnerisch lösen. Die Funktionsgleichung wurde übernommen. Es ist nicht möglich, im Geometrie Bereich einen Schieberegler für einen Funktionskoeffizienten zu erzeugen; ansonsten hätte man die Parabel auch direkt anpassen können. Ein Punkt A und B wurden für x = 25 und x = -25 eingefügt. Unter Zeichnen -> Konstruiere -> Tangente an Kurve lässt sich diese am Punkt A (25/8) antragen. Zur besseren Übersicht wurde der Punkt A verborgen, da automatisch ein neuer Punkt C erzeugt wird. Im Messefenster lässt sich dann nach Markierung der Tangente der Winkel ablesen, der dem oben berechneten entspricht.

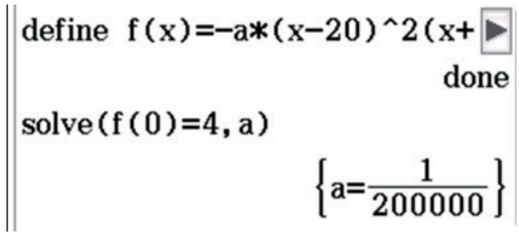
Lösung Aufgabe 8:

Wenn man in der Nähe der Stelle x = -15 näherungsweise eine Tangente einzeichnet, so hat diese eine Steigung m ≈ 0,8 = 80%.

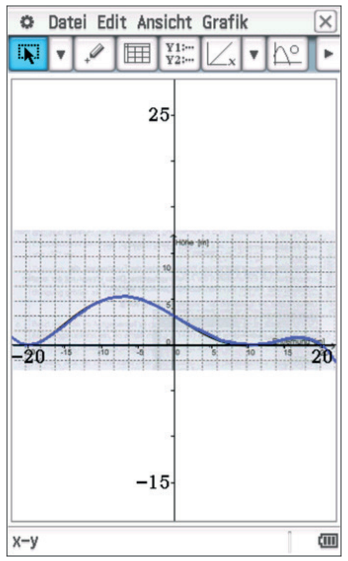
Für eine genauere Untersuchung nähern wir den vorgegebenen Grafen durch den Grafen einer ganzrationalen Funktion an. Unter Berücksichtigung der Nullstellen machen wir den Ansatz:

$f(x) = -a(x+20)^2 (x-10)^2 (x-20)$

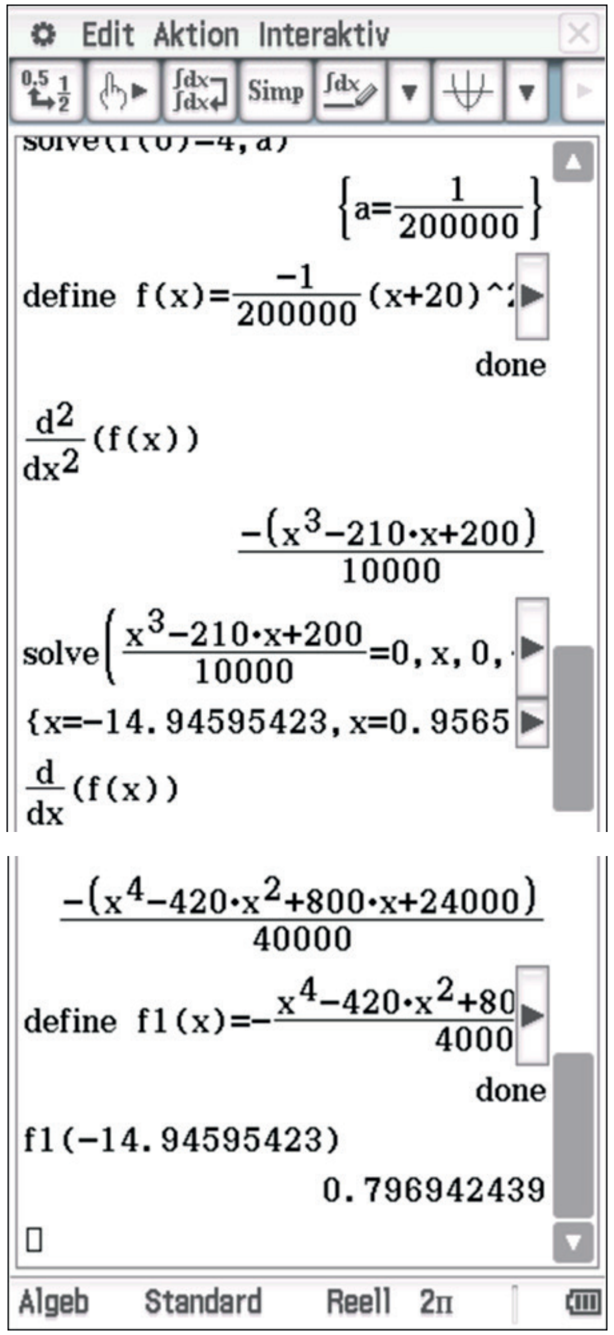
Es muss gelten: $f(0) = 4$

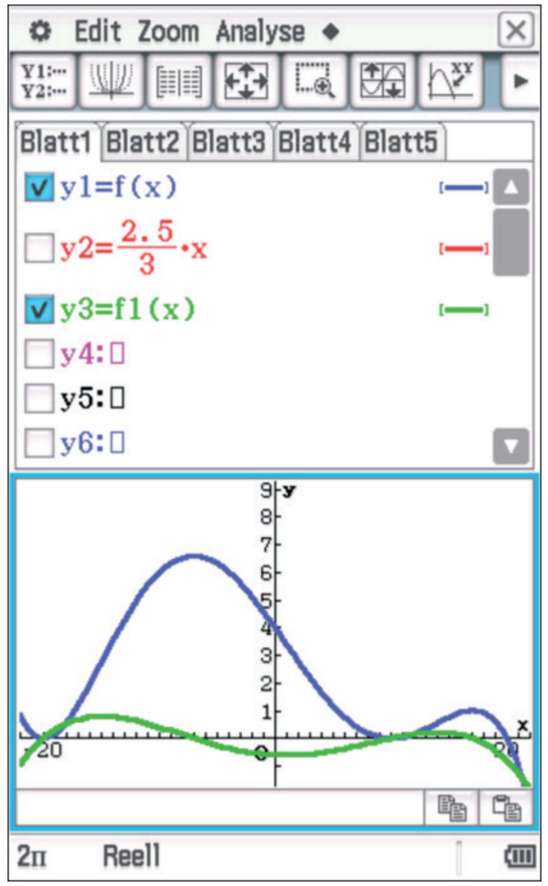


Daraus folgt: $f(x) = -\frac{1}{200000}(x+20)^2(x-10)^2(x-20)$



Mit Hilfe des Menüpunkts *Bildplot* erkennt man, dass sich eine ganz gute Übereinstimmung ergibt. (Für die Übertragung der Grafik siehe Lösung Aufgabe 3) die folgende Abbildung zeigt die erforderlichen Berechnungen mit dem ClassPad.

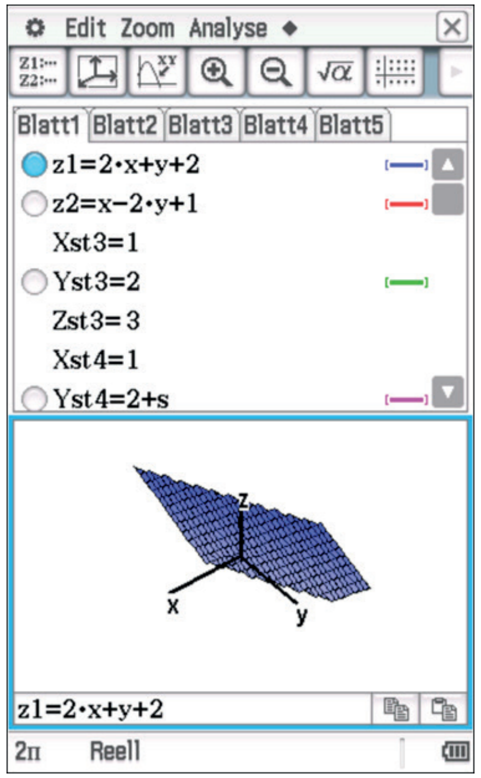
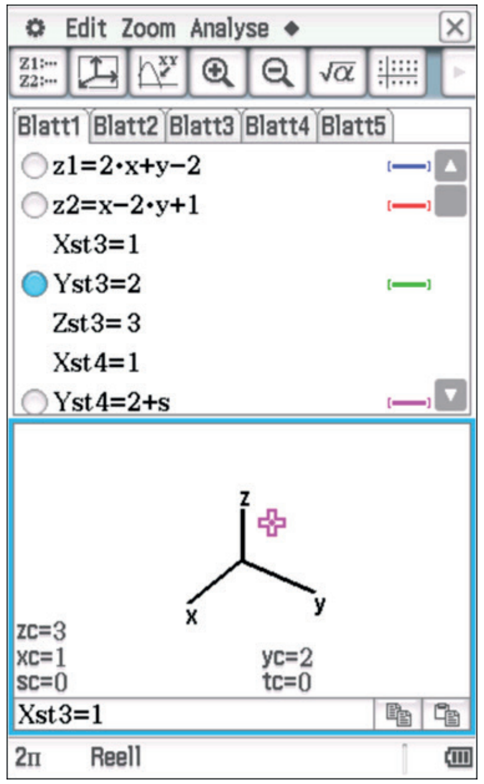


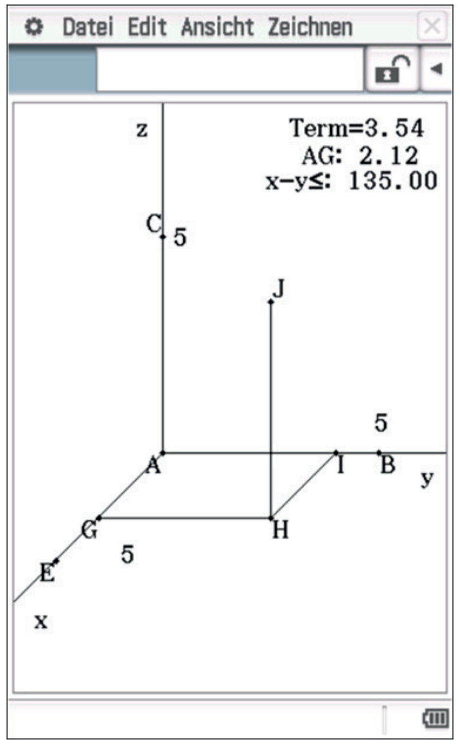
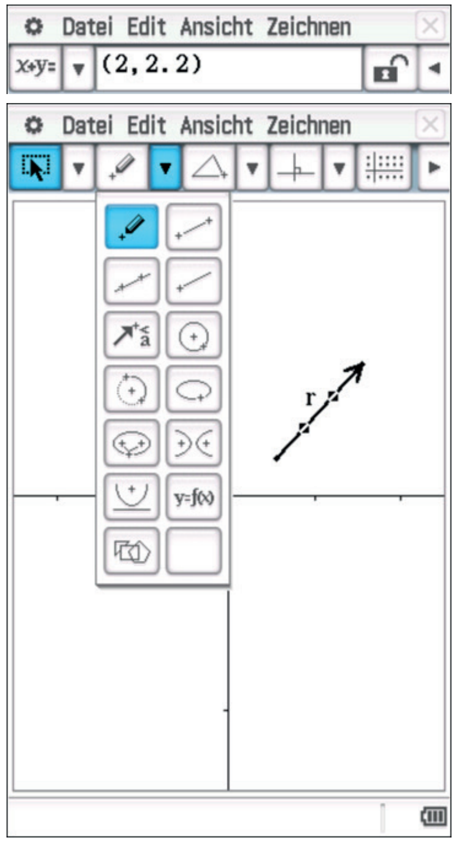


Die berechneten Werte sind in guter Übereinstimmung mit den aus der Zeichnung abgelesenen.

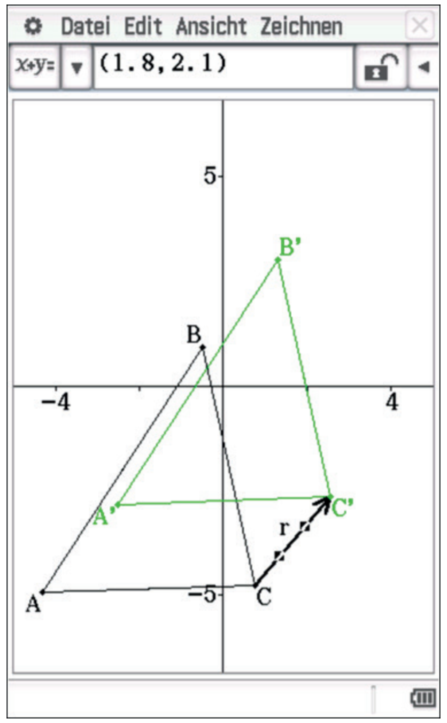
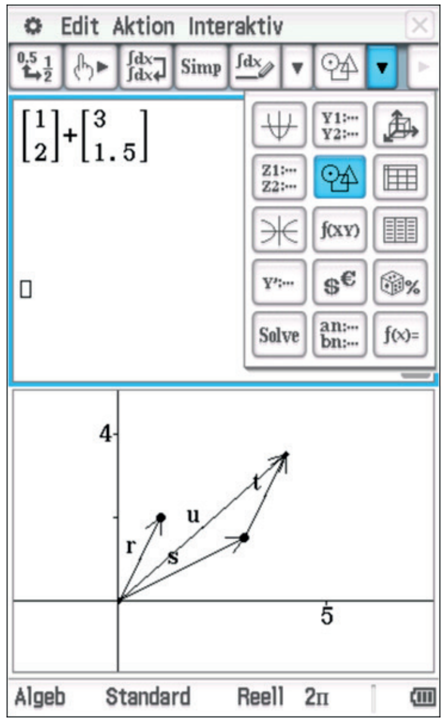
Aus dem Grafen der ersten Ableitung ist erkennbar, dass im Intervall [-20/20] die Steigung 80 % nicht übersteigt.

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

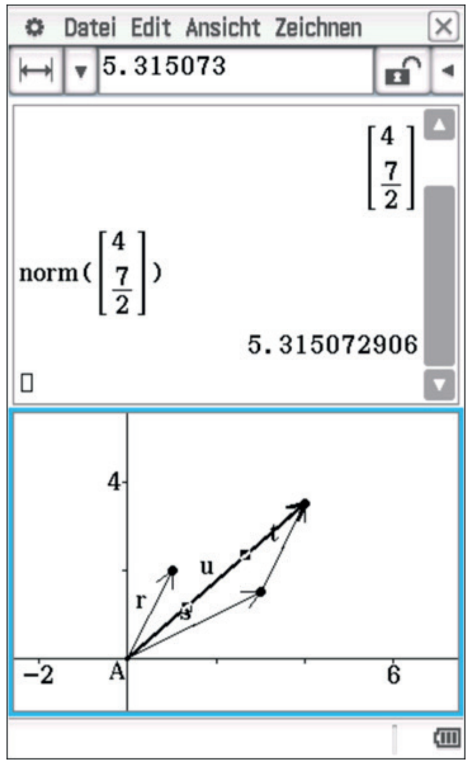
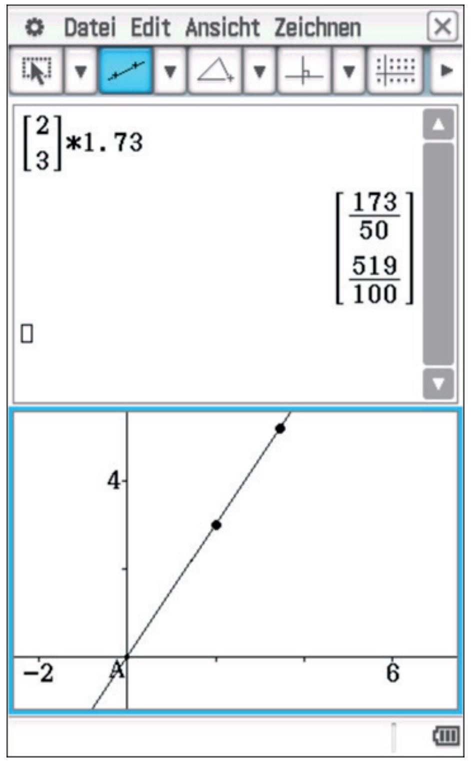
Bezug zum Lehrplan	Screenshot	Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Inhaltliche Schwerpunkte: • Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren Die Schülerinnen und Schüler (2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar	 	Der ClassPad bietet zwar eine 3d-Grafik, mit der es aber im Prinzip nur möglich ist, Ebenen abzubilden, die in Koordinaten- oder Parameterform gegeben sind. Durch Fortlassen der Variablen lassen sich auch einzelne Punkte darstellen. Da dieser Punkt nur durch einen Pixel dargestellt wird, ist er nicht wirklich sichtbar. Durch die Wahl von [icon] wird der Punkt durch das Kreuz gekennzeichnet und die Koordinaten werden angezeigt. Dieser Befehl dient eigentlich dazu, Punkte auf einer dargestellten Ebene in Abhängigkeit der Parameter zu verschieben. Da jetzt keine Parameter vorhanden sind, liegt der Punkt fest.	Aus der Abbildung links ist ein Zusammenhang zwischen den gegebenen Koordinaten des Punktes und seiner Lage im Raum nicht erkennbar. Von daher schlagen wir vor, im Geometrie Bereich eine entsprechende Konstruktion zu erstellen.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren Die Schülerinnen und Schüler (1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum, (2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Ein 3D Bild lässt sich natürlich im Geometrie Bereich erstellen. Allerdings ist es aufwendig. Zunächst wird der Punkt A in den Koordinatenursprung gelegt. Die Punkte B und C haben die Koordinaten B(0/5) und C(5/0). Durch die Punkte A und B und A und C werden Halbgeraden gelegt, die nach Wahl der Punkte automatisch rechtwinklig zueinanderstehen. Der Punkt E wird zunächst beliebig gesetzt und durch die Punkte A und E dann ebenfalls eine Halbgerade gelegt. Die Halbgeraden AE und AB werden markiert und der Winkel zwischen ihnen wird im Messfenster so eingestellt, dass er 120° beträgt. Danach wird der Punkt E so verschoben, dass der Abstand AE 2,5 Einheiten beträgt. Der Punkt J soll die Koordinaten (3/4/5) haben. Dazu wird auf die Halbgerade AE der Punkt G mit dem Abstand 1,5 zum Punkt A gelegt. Durch G wird eine Parallele zu AB und auf diese der Punkt H mit dem Abstand *GH*=4 gelegt. Die Parallele wird wegen der besseren Übersicht markiert und ausgeblendet. G und H werden durch eine Strecke verbunden. Durch H wird eine Parallele zu AC gelegt, J mit dem Abstand *HJ*=5 eingetragen, die Parallele ausgeblendet und die Strecke eingetragen. Eingabe von Text: *Zeichnen -> Text* Mit dem Stift lässt sich dann der Text an beliebige Stellen verschieben.	Der Punkt J hat die Koordinaten J(3/4/5). Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dreidimensionale Koordinatensysteme darzustellen. In der Abbildung links wird es so realisiert, dass der Winkel α zwischen der x- und der y-Achse den Wert α =135° hat. Die Einheiten auf der y- und der z-Achse sind gleich. Die Einheit auf der x-Achse ist mit $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ zu multiplizieren. Die Lage des Punktes erhält man dann wie im 2-dimensionalen, wobei der Winkel zwischen den Achsen zu berücksichtigen ist. Für die eigene Anschauung sollten die Schülerinnen und Schüler eine solche Konstruktion selbst durchführen, wobei dies natürlich auch händisch gemacht werden kann.
Vektoren sind nur im 2-dimensionalen im Geometriebereich darstellbar. Im Messbereich (s. Abb. links oben) werden die Koordinaten des zugehörigen Ortsvektors angegeben. Dabei ist es erforderlich, dass der Vektor als Ganzes markiert ist. Markiert man nur die Pfeilspitze, werden die Koordinaten dieser als Punkt angegeben. Ansonsten lässt sich noch der Betrag, die Steigung (der Quotient aus x- und y-Koordinate) und der Winkel zur x-Achse messen.	Da sich im ClassPad Vektoren nicht im 3-dimensionalen darstellen lassen, muss man sich bzgl. der Visualisierung der Operationen mit Vektoren auf 2 Dimensionen beschränken. Da der Begriff des Vektors für die Schülerinnen und Schüler neu ist, empfehlen wir, es zunächst bei 2 Dimensionen zu belassen. Des Weiteren sollte diskutiert werden, inwieweit man über die geometrische Interpretation hinausgeht und Vektoren auch als Datenspeicher versteht.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Die Schülerinnen und Schüler (3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,	
• Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar • Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität Die Schülerinnen und Schüler (4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras, (5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Zunächst wurde das Dreieck ABC gezeichnet. Es spielt dabei keine Rolle, ob dieses einzeln über Punkte und Strecken oder als Ganzes durch erzeugt wurde. Verschiebung: *Zeichnen -> Konstruiere -> Verschiebevektor*. Der Vektor ist dabei nicht zeichnerisch, sondern als $\binom{x}{y}$ einzugeben. Wenn nichts markiert ist, wird alles verschoben. Will man nur Teile verschieben, sind diese vorher zu markieren. Die verschobenen Punkte werden automatisch mit Namen versehen. Der Vektor $\vec{r}$ wurde nachträglich dazu eingetragen. Durch das Markieren können seine Koordinaten dann abgelesen werden.	Verschiebungen in der Ebene sind eigentlich eher der Sekundarstufe I zuzuordnen. Da aber die Vektoren neu eingeführt werden, ist es für die Schülerinnen und Schüler sicher Verständnis fördernd, wenn dies auch zu Beginn der Einheit Lineare Algebra angeboten wird.
Vektoren können über das Keyboard (*Math2*) direkt eingegeben werden. Das Fenster des ClassPad lässt sich unterteilen, so dass der Bereich Main zusammen mit der Geometrie (s. Abb. links) bearbeitet werden kann. Wenn man einen Vektor markiert und diesen in den Geometrie Bereich zieht, erscheint dort leider nur der Punkt mit den entsprechenden Koordinaten (Spitze von r und s). Durch Verbindung des Ursprungs mit dem Punkt lässt sich der Vektor dann einzeichnen. Leider ist es nicht möglich, einen der Vektoren so zu verschieben, dass der Fußpunkt an die Sitze des anderen gesetzt wird. So muss man alternativ zunächst einen beliebigen Vektor an den Fußpunkt des anderen setzen. Im Messfenster lassen sich dann die Koordinaten entsprechend anpassen. Nach Markierung des durch Addition hervorgegangenen Vektors lassen sich dessen Koordinaten angeben.	Für die Definition der Vektoraddition kann man algebraisch (koordinatenweise Addition) oder geometrisch (Fußpunkt des einen an die Spitze des anderen) vorgehen. Der jeweils andere Aspekt ergibt sich dann. Aus beiden Vorgehensweisen folgt sofort die Kommunikativität der Vektoraddition.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
• Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar • Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität Die Schülerinnen und Schüler (4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras, (5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,	 

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Man kann sowohl im Algebra- als auch im Geometriebereich, den Betrag eines Vektors angeben. Im Bereich *Interaktiv* gibt es für die Vektoren ein Untermenü. In der Geometrie erhält man die Länge im Messfenster. Wenn man mehreres messen möchte, kann man die Daten aus dem oberen Bereich in den aktiven Geometrie Bereich oder in den Bereich *main* ziehen. Verändert man die ursprünglichen Objekte, so werden auch die gemessenen Daten automatisch verändert.	Die direkte Angabe von Längen von Vektoren verschleiert die Methode, wie die Länge zu berechnen ist. Auf der anderen Seite folgt aus der Tatsache, dass der ClassPad Längenangaben bereitstellen kann, dass es eine rechnerische Möglichkeit gibt, die Länge zu berechnen. Die Anwendung des Satzes von Pythagoras liegt dann auf der Hand.
Die Multiplikation mit einem Skalar lässt sich im Bereich *main* direkt durchführen.	Durch die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar werden kollineare Vektoren erzeugt. Da im Geometrie Bereich nur die Vektorspitzen als Punkte dargestellt werden, müssen diese Punkte mit dem Koordinatenursprung auf einer Geraden liegen.
Die beiden Vektoren wurden markiert und in den Zeichenbereich gezogen. Aber, wie oben schon erwähnt, werden nur die Punkte, die auf der Pfeilspitze liegen gezeichnet. Die Gerade wurde zusätzlich gezeichnet.	

<table>
<tr><th>Bezug zum Lehrplan</th><th>Screenshot</th></tr>
<tr><td>

Inhaltliche Schwerpunkte:

• Geraden und Strecken: Parameterform

Die Schülerinnen und Schüler

(7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,

Inhaltliche Schwerpunkte:

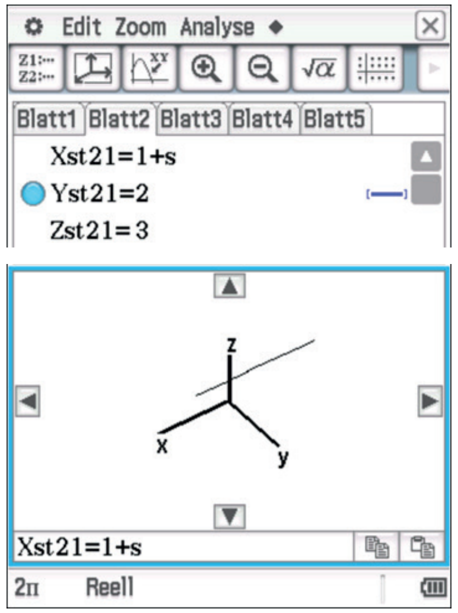
• Lagebeziehung von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
• Schnittpunkte: Geraden

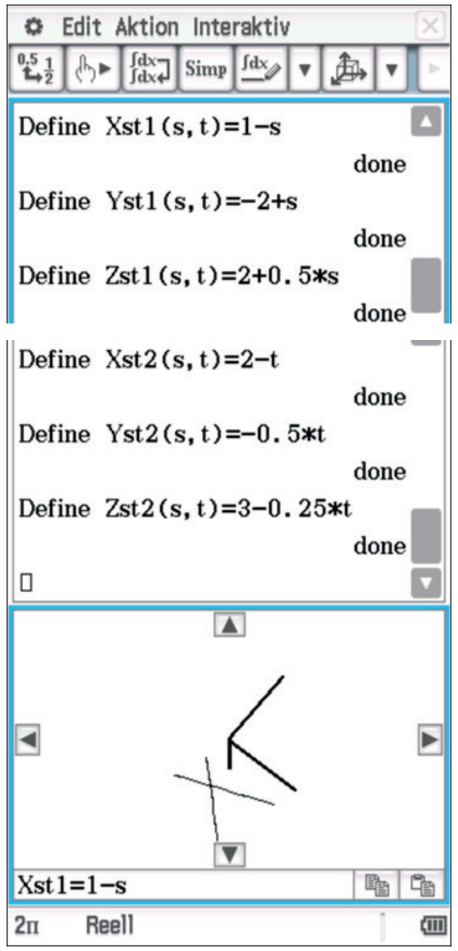
Die Schülerinnen und Schüler

(9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden.

Leider trennt der Lehrplan die Behandlung von Geraden und Ebenen. Wir halten es aber für ein tieferes Verständnis für die Lagebeziehungen für sinnvoll, schon jetzt den Zusammenhang zu Ebenen zu diskutieren.

</td><td>





</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Hinweise zur Bedienung</th><th>Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik</th></tr>
<tr><td>

Es gibt keine Umgebung, in der sich Geraden im Raum direkt darstellen lassen. Es geht nur im 3d-Bereich, indem man die Koordinaten Darstellung wählt und nur eine Variable angibt (s. Abb. links). Nur eine „vollständige“ Ebene würde in der angegebenen Farbe dargestellt werden.

Es ist auch nicht direkt möglich, zwei Objekte gleichzeitig zu visualisieren. Dies lässt sich nur mit einem Trick realisieren. so dass man zum Beispiel die Lage zweier Geraden zueinander visualisieren kann. Eigentlich ist dieser Bereich nur dazu gedacht, eine Ebene visuell darzustellen.

Wenn man trotzdem zwei Elemente z. B. eine Gerade und eine Ebene oder zwei Geraden gleichzeitig visualisieren will, kann man dies tun, indem man die entsprechenden 3d Variablen zunächst im Bereich *main* definiert (s. Abb. links). Die Zuordnungen werden dann automatisch in den 3D-Bereich übertragen. Die Zeichnung lässt sich dann im 3D-Bereich erstellen aber auch direkt in *main*, indem (oben rechts) gewählt wird.

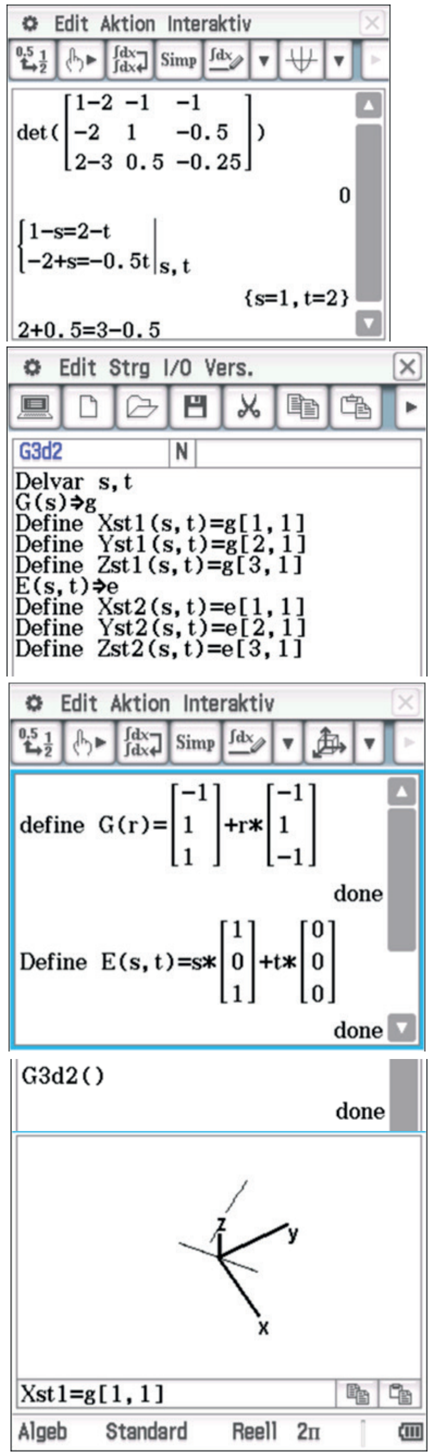
Um die Zeichnung zu erhalten, ist oben im Bereich Raute „*Neu zeichnen*“ zu wählen.

</td><td>

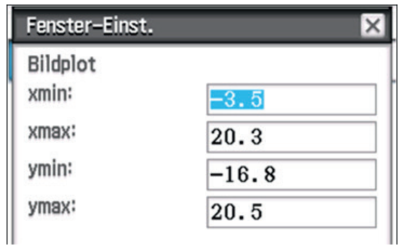
Die Darstellung von Geraden ist eher nicht überzeugend. Ein Vorteil ist allerdings, dass der Zusammenhang zu Ebenen deutlich wird. Dadurch, dass nur eine Variable genutzt wird, beträgt der Freiheitsgrad nur noch 1.
Die Lage kann dadurch verdeutlicht werden, dass das Koordinatensystem gedreht werden kann.
Auch der Unterschied zu Strecken wird in der Abbildung nicht deutlich.

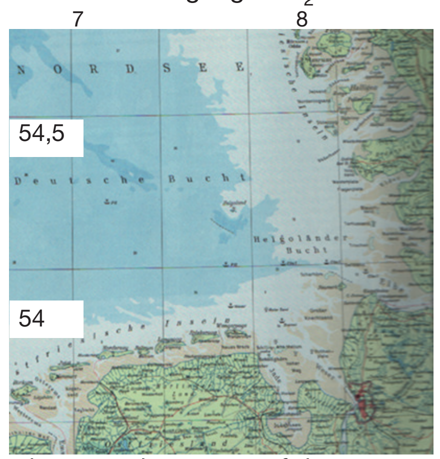
Durch Drehungen können die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Geraden sich tatsächlich schneiden, da sich unabhängig von der Drehung immer ein Schnittpunkt ergibt.

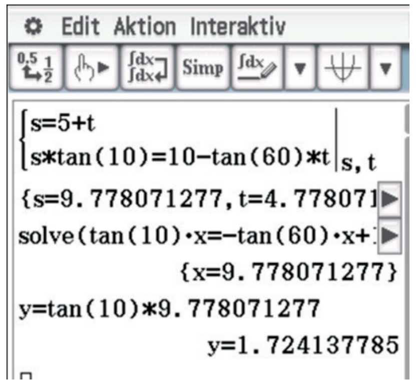
</td></tr>
</table>

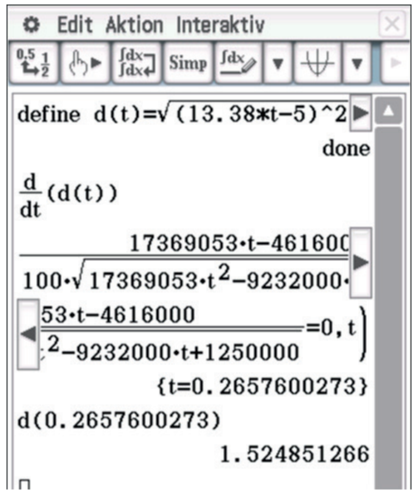
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Geraden und Strecken: Parameterform Die Schülerinnen und Schüler (7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar, *Inhaltliche Schwerpunkte:* • Lagebeziehung von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend • Schnittpunkte: Geraden Die Schülerinnen und Schüler (9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden.	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Das Symbol für Matrizen findet man in der *Math2* Tastatur. Genau wie für die Vektoren ist die Taste eventuell mehrfach zu betätigen. Im Bereich *Interaktiv* gibt es einen Unterbereich für Matrizen, in dem sich natürlich auch der Befehl für die Determinanten Berechnung findet. Dank des CAS lässt sich auch die Formel für die Berechnung einer Determinante zeigen, indem man an Stelle der Zahlen Variablen einsetzt. Oben wurde darauf hingewiesen, dass die gleichzeitige Darstellung zweier Objekte im dreidimensionalen nicht möglich ist. Des Weiteren ist es erforderlich, dass die übliche Parameter Darstellung entsprechend übertragen wird. Dies lässt sich umgehen, wenn ein Programm wie das links in der Abbildung dargestellte erzeugt wird und dies im Bereich *main* aufgerufen wird. (s. Abb. links) Die Darstellung ist so allgemein gehalten, dass eine Ebene und eine Gerade gleichzeitig dargestellt werden können. Bei der zweiten Definitionsgleichung wurde der Freiheitsgrad einfach reduziert, so dass sich eine Gerade ergibt. Um die Darstellung zu erhalten, ist im Bereich *main* das Symbol für die dreidimensionale Darstellung anzuklicken, und indem man mit dem Stift auf den unteren Bereich geht, ist oben im Bereich Raute „*Neu zeichnen*“ zu wählen.	Gegeben sind zwei Geraden durch: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix}$ Das Gleichsetzen führt zu einem Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Zunächst ist zu überprüfen, ob die beiden Richtungsvektoren linear abhängig sind oder nicht. Wenn diese unabhängig sind, lässt sich vorher testen, ob es eine Lösung überhaupt geben kann. Dies geschieht, indem man überprüft, ob die drei Vektoren, die sich aus den zwei Richtungsvektoren und der Differenz der Stützvektoren ergeben, in einer Ebene liegen. Wenn das der Fall ist, muss die sich ergebende Determinante den Wert 0 haben. Da vorher die lineare Unabhängigkeit der beiden Richtungsvektoren überprüft wurde, muss es eine eindeutige Lösung geben. Die Abbildung links zeigt, dass es in diesem Fall genau eine Lösung gibt. Ebenen sollen zwar erst im Folgejahr Thema sein, für das Verständnis erscheint es uns aber sinnvoll, Ebenen schon jetzt mit heranzuziehen. Es ist nicht möglich, Vektorgleichungen direkt einzugeben, die zeilenweise in ein Gleichungssystem überführt werden. Inwiefern es für die Schülerinnen und Schüler hilfreich ist, eine Darstellung direkt aus der Parameterform zu erhalten, ist im Einzelfall zu entscheiden. Auf der anderen Seite wird durch die direkte Eingabe in den ClassPad deutlich, dass Parameter Gleichungen für Geraden und Ebenen zeilenweise zu interpretieren sind.

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
Inhaltliche Schwerpunkte: • Geraden und Strecken: Parameterform • Lagebeziehung von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend • Schnittpunkte: Geraden Die Schülerinnen und Schüler (1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum, (3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit, (4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras, (7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar, (8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext, (9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden, (10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge, (11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen, (12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.	  

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
Die Landkarte wurde gescannt und mit Hilfe der Casio Picture Conversion Engine (lässt sich von der Homepage von Casio herunterladen) und dem Quick Time Player (direkt aus dem Netz) in das für die Weiterverarbeitung mit dem ClassPad notwendige Format übertragen. Danach muss es noch in die Datei Picture (Handheld oder Manager je nachdem) kopiert werden. Im Bereich *Bildplot* lässt es sich dann aufrufen. Einige Mühe bereitet das Anpassen des vorgegebenen Koordinatensystems an die Längen- und Breitengrade. Mögliche Daten siehe Abbildung links unten. Geradengleichungen können im Menü Bildplot nur in der normalen und nicht in der Parameterform eingegeben werden. Man findet den dafür notendigen Untermenüpunkt im Menü *Grafik -> Grafik-Editor*	Die Karte unten wurde aus einem Atlas übertragen. Um Bezüge zur Realität herzustellen, wurde ein Kartenausschnitt mit Längen- und Breitengraden gewählt. Für die Umrechnung gilt in etwa: Der Abstand zwischen 2 Längengraden entspricht ca. 66 km, zwischen 2 Breitengraden ca. 110 km. Das Koordinatensystem in der Abbildung links wurde so angepasst, dass 10 Einheiten einem Längengrad in x-Richtung und 10 Einheiten in y-Richtung einem halben Breitengrad entsprechen. Damit die Schiffsruten in die Karte zu übertragen sind, müssen diese natürlich auf das Koordinatensystem bezogen umgerechnet werden. Gegeben sind zwei Schiffe mit ihren Standorten und Kursen. Schiff 1: 54° n. Br. / 7° ö. Lä. und Schiff 2: 54,5° n. Br. / 7,5° ö. Lä Schiff 1 fährt in nordöstlicher Richtung, wobei der Winkel zum Breitengrad $\alpha_1 = 10°$ beträgt, Schiff 2 fährt in südöstlicher Richtung, wobei der Winkel zum Längengrad $\alpha_2 = 30°$ beträgt.  Umrechnungen bezogen auf das Koordinatensystem im Menü *Bildplot*: Ausgangspunkte Schiff1: (0/0) Schiff2: (5/10) Schiffsruten: Schiff1: $y_1 = \tan(10°) \cdot x$ $v_1 = 18$ Knoten Schiff2: $y_2 = -\tan(60°) \cdot x + 10 + 5 \cdot \tan(60°)$ $v_2 = 21$ Knoten

<table>
<tr><th>Bezug zum Lehrplan</th><th>Screenshot</th></tr>
<tr><td>
Inhaltliche Schwerpunkte:
• Geraden und Strecken: Parameterform
• Lagebeziehung von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
• Schnittpunkte: Geraden
Die Schülerinnen und Schüler
(1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
(4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
(7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
(8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
(9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
(10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
(11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
(12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.
</td><td>




</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Hinweise zur Bedienung</th><th>Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik</th></tr>
<tr><td>
Eine direkte Eingabe der Geradengleichungen zur Berechnung des Schnittpunktes ist nicht möglich; es geht nur zeilenweise.
Die Abstandsfunktion wurde als d(t) definiert.
Mit Interaktiv -> Berechnungen -> diff wird die erste Ableitung bestimmt. Als Variable ist jetzt natürlich t anstatt x einzugeben.
Zur Bestimmung des Minimums wird diese 0 gesetzt, und der Wert in d(t) eingesetzt.
</td><td>
Die entsprechenden Parametergleichungen lauten:
Schiff1: Schiff2:
$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(10°) \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -tan\,(60°) \end{pmatrix}$
Durch Gleichsetzen lässt sich der Schnittpunkt der Schiffskurse bestimmen. Die Werte beziehen sich auf das angegebene Koordinatensystem. Durch die Darstellung in der Zeichnung haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, ihr Ergebnis zu überprüfen.
Dass die Kurse sich schneiden, bedeutet nicht, dass die Schiffe zusammenstoßen. Dazu sind die Geschwindigkeiten in Bezug auf die zurückgelegten Wege zu berücksichtigen.
Für einen Vergleich mit den Geschwindigkeiten sind die Wege in km umzurechnen.
10 Einheiten in x-Richtung entsprechen ca. 66 km,
in y-Richtung ca. 55 km.
Schiff 1: $s_1 \approx \sqrt{(9{,}778 \cdot 6{,}6)^2 + (1{,}724 \cdot 5{,}5)^2} \approx 65{,}228\ km$
$t_1 = \frac{65{,}228}{18 \cdot 1{,}852} \approx 1{,}957\ h$
Schiff 2: $s_2 \approx \sqrt{(9{,}778 - 5)^2 \cdot 6{,}6^2 + (10 - 1{,}724)^2 \cdot 5{,}5^2} \approx 55{,}374\ km$
$t_2 = \frac{55{,}374}{21 \cdot 1{,}852} \approx 1{,}424\ h$
Das heißt, Schiff 2 ist ca. eine halbe Stunde vor Schiff1 am Schnittpunkt der beiden Kurse.
Interessant ist noch die Frage, wie groß der minimale Abstand zwischen den beiden Schiffen ist.
Für die beiden Schiffe lässt sich der jeweilige Ortsvektor in Abhängigkeit von der Zeit t bestimmen.
Schiff 1: Richtung: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\,(10°) \end{pmatrix}$
$\vec{u}_{1neu} = 18 \cdot 1{,}852 \cdot \vec{u}_{10} \approx \begin{pmatrix} 32{,}83 \\ 5{,}79 \end{pmatrix}$
Richtung: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{-\tan(60°)} \end{pmatrix}$
Schiff 2: $\vec{u}_{2neu} = 21 \cdot 1{,}852 \cdot \vec{u}_{10} \approx \begin{pmatrix} 19{,}45 \\ -33{,}68 \end{pmatrix}$
Ortsvektoren P zum Zeitpunkt t:
Schiff 1: Schiff 2:
$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 32{,}83 \cdot t \\ 5{,}79 \cdot t \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 5 + 19{,}45 \cdot t \\ 10 - 33{,}68 \cdot t \end{pmatrix}$
Bestimmung des Abstands:
$d(t) = \left\lceil \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} \right\rceil = \sqrt{(13{,}38t - 5)^2 + (39{,}47t - 10)^2}$
Der minimale Abstand wird als nach ca. 0,266 Stunden erreicht und beträgt ca.1,525 km.
</td></tr>
</table>

Arbeitsblatt zu Geraden in der Ebene

1. Schiffe und ihre Kurse

7 8

Der Abstand zwischen 2 Längengraden entspricht ca. 60km, zwischen 2 Breitengraden ca. 110 km. Schiff 1 hat die Position 54° n. Br. / 7° ö. Lä. und Schiff 2 hat die Position 54,5° n. Br. / 7,5° ö. Lä..
Schiff 1 läuft den Hafen von Hamburg und Schiff 2 den Hafen von Bremen an. Legen Sie auf die Karte ein Koordinatensystem so, dass der Ursprung in der Position von Schiff 1 liegt und der 54. Breitengrad die x-Achse und der 7. Längengrad die y-Achse bildet. Wählen Sie als Einheit 1km.

a) Geben Sie die Position der Schiffe in Bezug auf das Koordinatensystem an.
b) Schiff 1 hat eine Geschwindigkeit von $v = 18$ Knoten und Schiff 2 eine Geschwindigkeit $v = 21$ Knoten. Schiff 1 fährt in nordöstlicher Richtung, wobei der Winkel zum Breitengrad $\alpha_1 = 10°$ beträgt, Schiff 2 fährt in südöstlicher Richtung, wobei der Winkel zum Längengrad $\alpha_2 = 30°$ beträgt.
Geben Sie Geradengleichungen in der Parameterform und in der Form $y=m\cdot x+b$ bezogen auf das Koordinatensystem an, die den Weg der Schiffe beschreiben.
c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden sich ergebenden Geraden.
d) Ermitteln Sie anhand der Geschwindigkeiten, ob die Schiffe sich tatsächlich treffen.
e) Bestimmen Sie ggf. den minimalen Abstand zwischen den Schiffen.

124CPBUCH10-D

4 549526 617997

www.casio-schulrechner.de