CASIO forum
Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 1/2019

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

im CASIO forum zeigen Kolleginnen und Kollegen Anregungen und Beispiele für den gewinnbringenden Unterrichtseinsatz unserer Rechner.

Wir informieren Sie in dieser Ausgabe über einige neue Möglichkeiten, die durch die Weiterentwicklung unserer Rechner entstehen: „Ich löse das Beispiel mal für verschiedene Zahlen mit dem CAS“ ist beispielsweise ein Vorgehen im Leitartikel. Nach Untersuchung eckiger Optimierungsflächen und unförmiger Würfel werden kreisrunde Probleme in der Tabellenkalkulation gelöst und Kanalrohre preiswert verbunden. Der zweifache Blick ins Ausland ist diesmal einer auf die Sprache im Mathematikunterricht und ein weiterer auf eine Abituraufgabe. Einfach und flexibel verstandene Untersuchung von Funktionen z.B. durch Kenntnis von Kurvenklassen ist ebenfalls ein Thema in dieser Ausgabe. Wie immer finden Sie noch einiges mehr, z.B. diesmal drei Zahlen-Knobeleien.

Zum Ausprobieren der Beispielaufgaben im Unterricht können Sie unsere Grafikrechner im Klassensatz einschließlich Zubehör kostenlos für vier Wochen ausleihen. Einen Überblick über dieses und weitere Angebote finden Sie auf unserer Internetseite im Bereich Lehrersupport. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an **education@casio.de**.

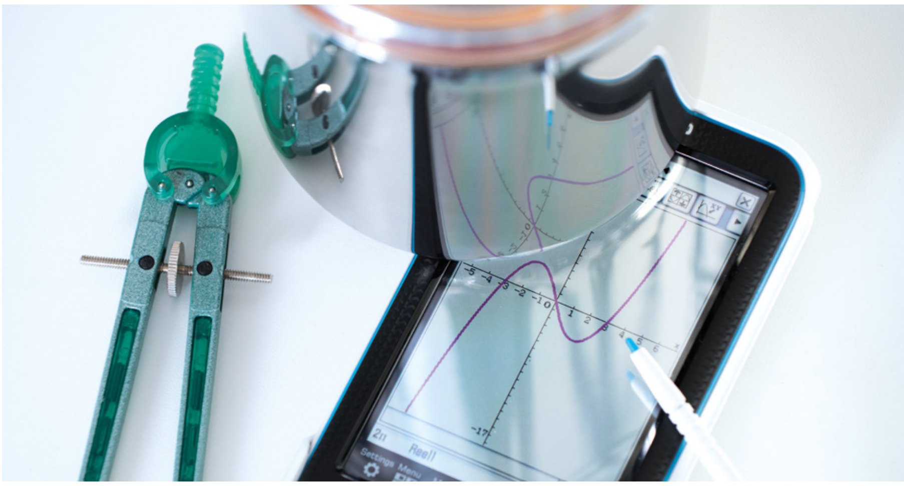
Ihr Redaktionsteam

i.A. CASIO

Forschungsaufgabe

Explorationen mit dem CAS – Ein Beispiel aus der Analysis

Autor: Manuel Garcia Mateos, Landesinstitut für Pädagogik und Medien Saarland



1. Allgemeines zu Explorationsaufgaben im Unterricht

Explorationsaufgaben sind Erkundungsaufgaben. Bei diesen Aufgaben handelt es sich in der Regel um Problemlöseaufgaben, die unterschiedlich (kognitiv) anspruchsvoll sein können. Die Schülerinnen und Schüler sollen hier neben fachlichen Inhalten auch noch andere Sachen lernen, die für den Mathematikunterricht und die Mathematik sehr wichtig sind, z. B.

- **Fragen stellen**
  „Wieso ist das so?“, „Ist das immer so?“
- **Herangehensweisen erlernen**
  „Ich setze mal Zahlen ein“, „Ich fertige eine Tabelle oder Skizze an“, „Ich betrachte Spezialfälle oder einfache Fälle. Erst dann verallgemeinere ich.“
- **Aufgabenstellung verstehen**
  „Was soll ich hier tun? Ich mach mal eine Skizze“, „Hab ich den Text verstanden? Welche Begriffe kenne ich, welche nicht?“, „Wo kann ich nachschlagen? Wen kann ich fragen?“
- **Ideen und Wege sowie Irrwege dokumentieren und reflektieren**
  „Ich rechne mal nach“, „Was passiert in den Extremfällen?“, „Hab ich schon mal so eine Problemstellung gehabt und gelöst? Wie habe ich das gemacht?“, „Dieser Weg klappt nicht. Wieso nicht?“
- **Strategien entwickeln, die in Zukunft helfen könnten**
  „Aha, mit Tabellen kann ich mir ganz schnell einen numerischen Überblick verschaffen“, „Eine Skizze hilft mir“, „Ich

Fortsetzung auf Seite 2

fange mal mit einfachen Zahlen und einfachen Fällen an und ersetze später die Zahlen durch Variablen."

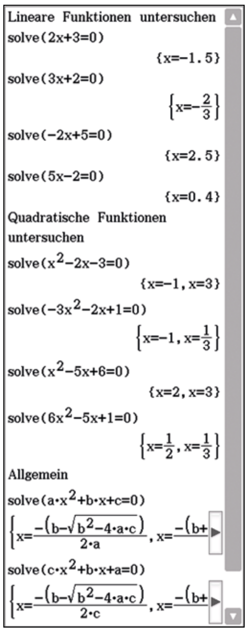
- **Neugier entwickeln**
  „Das ist ja seltsam. Geht das auch mit anderen Figuren?", „Dieser Zusammenhang gilt bei Nullstellen. Wie sieht es denn mit den Extremstellen aus?", „Das gilt bei 90°. Wie sieht es denn bei 45° aus?"
- **Schönheit und Sinnhaftigkeit der Mathematik erfahren**
  „Das ist ja ein schönes/ein seltsames Ergebnis.", „Die Mathematik hilft mir einen Überblick zu verschaffen und Sachen abzuschätzen."
- **mit Technologien und anderen Hilfsmitteln umgehen**
  „Ich löse das Beispiel mal für verschiedene Zahlen mit dem CAS", „Ich lass mir mal den Graphen zu der Funktion für verschiedene Werte anzeigen", „Ich muss hier eine Gleichung lösen, die mich einfach nur Zeit kostet."
- **über den Lösungsweg sprechen und diesen darstellen**
  „Ok. Wie erkläre ich das so, dass andere meine Lösung verstehen? Ich hab ja Zeit und Energie investiert und bin stolz auf meine Lösung.", „Habe ich verstanden, wie ich das gemacht habe? Könnte ich das erklären?", „Wenn ich mir später die Aufgabe noch mal anschaue, dann sollte ich das so aufgeschrieben haben, dass ich das auch lesen kann. Ich formuliere also meine Ideen und Herangehensweisen in Worten."
- **arbeiten mit anderen und andere Blickwinkel aufnehmen**
  „Lasst uns viele Beispiele untersuchen. Wer macht was?", „Wie könnten wir an die Lösung gehen?", „Ich komm hier nicht weiter. Hast du eine Idee?", „Von einer geteilten Idee hat jeder was."
- **…**

Es ist klar, dass der Erwerb von fachlichen Inhalten eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts ist. Der Erwerb dieser allgemeinen mathematischen Kompetenzen macht nur Sinn im Zusammenhang mit fachlichen Inhalten und kann (und darf auch) nicht losgelöst davon im Mittelpunkt stehen. Zentrales Ziel der Explorationsaufgaben ist das Erkunden von mathematischen Zusammenhängen und Beziehungen. Es geht nicht zentral um ein Einüben von Rechenfertigkeiten. Daher sind Explorationsaufgaben sehr oft (relativ) allgemein, offen und textlich nicht einfach formuliert. Explorationsaufgaben können also im Unterricht sehr gut dazu verwendet werden, um über Mathematik zu sprechen und aufzuzeigen, wie Mathematik funktioniert. Sie sind explizit Bestandteil der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (s. KMK Bista AHR 2012, S. 11) der KMK, denn mithilfe von Explorationsaufgaben kann gemäß der drei WINTERschen Grunderfahrungen[1] aufgezeigt werden, dass Mathematik nützlich ist, schön ist und ideenreich ist. Auch die Rolle der digitalen Medien wird in den Bildungsstandards bei diesen Aufgaben explizit hervorgehoben (s. KMK Bista AHR 2012, S. 13).

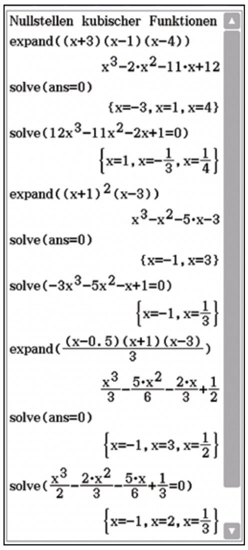
Im Folgenden soll an einem Beispiel der Unterrichtseinsatz von Explorationsaufgaben mithilfe des CAS veranschaulicht werden.
Beispiel: Betrachte ein Polynom P mit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$ und das dazu „gespiegelte" Polynom Q mit $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Nullstellen des Polynoms P und denen des Polynoms Q?

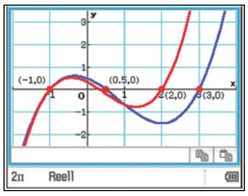
2. Umsetzung der Beispielaufgabe im Unterricht

Bei diesem Beispiel geht es um den Zusammenhang zwischen den Nullstellen zweier Polynome. Die Problemstellung ist für Schüler nicht einfach, da zum einen Begriffe und Formalismen vorkommen, die sie nicht gewohnt sind und zum anderen keine konkreten Zahlen vorgegeben sind. Der erste Schritt ist demnach, zu verstehen, was hier eigentlich gefragt ist. Eine wesentliche Hilfe ist der didaktische Dreiklang:
1) Vom Konkreten zum Abstrakten,
2) Vom Speziellen zum Allgemeinen und
3) Vom Einfachen zum Komplexen.
Der wesentliche Schritt ist, eine Vermutung über die Beziehung einzelner Nullstellen mithilfe des CAS zu erkunden, zu formulieren und zu verifizieren. Arbeitsteilig können die Schülerinnen und Schüler mithilfe des CAS viele konkrete Beispiele betrachten und entsprechende Vermutungen formulieren. Im ersten Schritt können z. B. die Nullstellen linearer Funktionen mit $f(x) = ax + b$ und $g(x) = bx + a$ untersucht und Zusammenhänge formuliert werden. In einem zweiten Schritt dann entsprechend quadratische Funktionen.



Anscheinend sind die Nullstellen der „gespiegelten" Funktionen gerade die Kehrwerte der ursprünglichen Funktionen. Das CAS bestätigt diese Vermutung, wobei die Interpretation der Lösung bei allgemeinen quadratischen Funktionen schon schwierig ist. Schülerinnen und Schüler erkennen in der Regel aus der allgemeinen Darstellung nicht, dass die Lösungen reziprok zueinander sind. Daher ist es nicht ratsam, die „Mächtigkeit" des CAS bei Explorationen direkt vollständig auszunutzen. Ist das nun immer so? Wie sieht es bei kubischen Funktionen aus, für die die Schüler keine allgemeine Lösungsformel haben? Auch hier hilft das CAS weiter.





Im nächsten Unterrichtsschritt muss versucht werden, die Vermutung zu formulieren und diese rechnerisch zu begründen, zu beweisen. Der Beweis geschieht durch Nachrechnen.
Betrachten wir ein Polynom P mit
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
$(a_n \neq 0$ und $a_0 \neq 0)$ und das dazu „gespiegelte" Polynom Q mit
$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.
Es gibt einen Zusammenhang zwischen den Nullstellen von P und den Nullstellen von Q. Ist $r \neq 0$ eine Nullstelle von P, dann ist $1/r$ eine Nullstelle von Q.

Beweis:
Ist r eine Nullstelle von P, $P(r) = 0$, dann ist $Q\left(\frac{1}{r}\right) = a_0\left(\frac{1}{r}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right) + a_n$.
Wird die Gleichung mit $r^n \neq 0$ multipliziert, so ist $r^n Q\left(\frac{1}{r}\right) = a_0 + a_1 r + \cdots + a_{n-1}r^{n-1} + a_n r^n$ $= P(r) = 0$.

3. Ausblick

Die Nullstellen der gespiegelten Funktion entstehen geometrisch durch eine Inversion am Einheitskreis. Es fragt sich nun, wie es mit anderen besonderen Stellen bei Polynomen, etwa Extrem- und Wendestellen ist. Gibt es da auch einen entsprechenden Zusammenhang?

Explorationsaufgaben bieten die Möglichkeit, aktiv zu lernen und die Chance, Mathematik zu machen abseits von Kalkülen. Das CAS ist hierbei ein hilfreiches Werkzeug, das den Explorationsprozess unterstützt.

[1] Nach Heinrich Winter (1928 – 2017) aus Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, S. 37–46 (1995)

Lineare Optimierungsprobleme

Autoren: Prof. Dr. Harald Löwe, Institut Computational Mathematics, Technische Universität Braunschweig. Prof. Dr. Baozhen Lei, College of Robotics, Beijing Union University, China[1]

Reale Anwendungen erfordern häufig das Auffinden eines Maximums einer linearen Funktion unter Nebenbedingungen, die ihrerseits lineare Gleichungen und Ungleichungen sind. Wir beginnen mit einem Beispiel eines solches „Linearen Optimierungsproblems“: Eine Firma produziere zwei verschiedene Pralinenschachteln mit den Namen X und Y. Beide Sorten unterscheiden sich im Gewicht pro Schachtel, in der Mischung der beiden verwendeten Pralinensorten A und B sowie im erzielten Gewinn pro Schachtel:

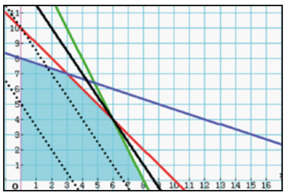
Produkt	A	B	Gewinn
X	100 g	200 g	0,3 €
Y	300 g	100 g	0,2 €

Der Gewinn ergibt sich zu $Z=0{,}3\cdot x+0{,}2\cdot y$ Euro pro Tag, wenn x und y die Anzahl hergestellter Schachteln der Sorte X bzw. Y pro Tag bezeichnet. Aufgabe ist das Maximieren der „Zielfunktion“ Z durch Anpassen der „Steuerungsvariablen“ x und y. Die Werte von x und y werden hierbei durch folgende „Nebenbedingungen“ eingeschränkt: Die Gesamtzahl der hergestellten Schachteln pro Tag sei durch die Kapazität der Produktionsanlage auf insgesamt 10000 Stück limitiert, d.h. $x+y\leq 10000$. Weiterhin mögen pro Tag nicht mehr als 1,6 Tonnen bzw. 2,4 Tonnen von den Pralinensorten A und B zur Verfügung stehen. Multiplizieren der zugehörigen Ungleichungen mit 10 liefert $2\cdot x+y\leq 16000$ sowie $x+3\cdot y\leq 24000$. Hinzu kommt die Bedingung $x,y\geq 0$. Insgesamt ergibt sich

Lineares Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & Z=0{,}3\,x+0{,}2\,y \\ \text{u.d.N} & x+y\leq 10000 \\ & 2\,x+y\leq 16000 \\ & x+3\,y\leq 24000 \\ & x,y\geq 0; \end{array}$$

“u.d.N” steht für „unter den Nebenbedingungen“. Dieses Problem ist sogar grafisch lösbar: Wir verwenden das Grafikmenü des ClassPad, um uns die Menge M der „zulässigen Punkte“, d.h. derjenigen (x,y), die die Nebenbedingungen erfüllen, sowie die „Isogewinn-Geraden“ $0{,}3\,x+0{,}2\,y=c$, auf denen die Zielfunktion einen konstanten Wert c annimmt, anzusehen. Die farbigen Geraden sind die durch die Nebenbedingungen bestimmten Grenzgeraden von M. Die Isogewinn-Geraden (in Schwarz eingezeichnet für $c=1000$, 2000 und 2600) sind parallel.



Die zu $c=2600$ gehörende Isogewinn-Gerade schneidet M gerade noch in der Ecke $(x,y)=(6000,4000)$; eine weitere Steigerung von c ist nicht möglich. Damit realisiert $x=6000$, $y=4000$ den maximal möglichen Gewinn von $c=2600$ €/Tag.
Offenbar wird das Maximum in einer Ecke des Gebiets der zulässigen Punkte angenommen. Für kompliziertere Probleme aber ist ein grafisches Verfahren bzw. die Bestimmung aller Ecken zu aufwendig. Daher verfolgt der Simplexalgorithmus einen anderen Ansatz: Zunächst werden die Nebenbedingungen durch die Einführung sogenannter „Schlupfvariablen“ in ein Gleichungssystem überführt. So ist die Gültigkeit der Ungleichung $x+y\leq 10000$ gleichwertig zur Existenz eines $u\geq 0$ (nämlich $u=10000-x-y$) mit $x+y+u=10000$, wobei u als ungenutzte Kapazität der Produktion eine reale Bedeutung besitzt. Analoge Behandlung der anderen Ungleichungen führt auf eine neue Formulierung des Problems:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & Z=0{,}3\,x+0{,}2\,y \\ \text{u.d.N} & x+y+u=10000 \\ & 2x+y+v=16000 \\ & x+3y+w=24000 \\ & u,v,w,x,y\geq 0 \end{array}$$

Die Ecke $(x,y)=(0,0)$ von M entspricht der „offensichtlichen“ Lösung $x=y=0$, $u=10000$, $v=16000$, $w=24000$. Der zugehörige Gewinn $Z=0$ ist nicht akzeptabel und wird durch Erhöhen von x gesteigert. Wird hierbei $y=0$ beibehalten, so ergibt die zweite Nebenbedingung mit $x\leq 8000$ die größte Einschränkung für x. Wir lösen diese Nebenbedingung nach x auf und setzen in die anderen ein:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & Z=2400-0{,}15\,v+0{,}05\,y \\ \text{u.d.N} & -0{,}5v+0{,}5y+u=2000 \\ & 0{,}5v+0{,}5y+x=8000 \\ & -0{,}5v+2{,}5y+w=16000 \\ & u,v,w,x,y\geq 0 \end{array}$$

Die jetzt „offensichtliche“ Lösung $v=y=0$ führt mit $Z=2400$ zu einem höheren Gewinn. Die fehleranfällige Strategie „Auflösen und Einsetzen“ ersetzen wir durch ein schematisches Verfahren, bei dem wir das Ausgangsproblem in ein sogenanntes „Tableau“ schreiben:

	x	y	
10000	1	1	u
16000	2	1	v
24000	1	3	w
-0	0,3	0,2	

Die Koeffizienten der Variablen x,y sind im Mittelblock; die rechten Seiten der Nebenbedingungen befinden sich links. Die letzte Zeile enthält die Koeffizienten von x,y in der Zielfunktion sowie links den *negativ* notierten Z-Wert für die „offensichtliche“ Lösung $x=y=0$. Die farblichen Markierungen ergeben sich aus dem Wunsch, die zweite Gleichung nach x aufzulösen. Im Schnitt dieser Pivotspalte und Pivotzeile befindet sich das Pivotelement $p=2$. Ein solches Tableau kann auf dem ClassPad durch eine Matrix dargestellt werden.
Überlegen ergibt für das Auflösen und Einsetzen folgende Manipulationen am Tableau:

- Tausche die Namen x und v.
- Ersetze p durch p^{-1}.
- Teile jedes andere Element der Pivotzeile durch p.
- Teile jedes andere Element der Pivotspalte durch $-p$.
- Alle übrigen Elemente f ersetze durch $f-(z\cdot s)/p$, wobei z [bzw. s] dasjenige Element der Pivotzeile ist, das in der Spalte [bzw. Zeile] von f steht.

Der Algorithmus lässt sich im ClassPad als Programm implementieren, vgl. den Screenshot am Ende des Beitrags. Dieses nimmt eine Matrix T (das Tableau) sowie die Nummern i und j der Pivotzeile und -spalte entgegen und gibt das durch „Auflösen und Einsetzen“ veränderte Tableau zurück, sodass lästige Rechnungen entfallen. Die Wahl des Pivotelements illustrieren wir anhand des Tableaus

	x_1	$\cdots$	x_n	
b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	y_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	y_m
$-Z$	c_1	$\cdots$	c_n	

Das Verfahren gelingt nur, wenn sämtliche Einträge b_i nicht-negativ sind und dies auch bleiben, da sonst die „offensichtliche Lösung“ $x_1=\cdots=x_n=0$ nicht zulässig ist, da eines der zugehörigen $y_j=b_j$ negativ wird. Die Auswahl des Pivotelements erfolgt nach diesem Schema:

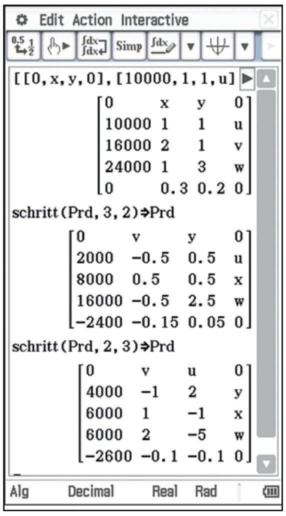
- Sind alle $c_j\leq 0$, so ist die Aufgabe gelöst – die offensichtliche Lösung des Problems ist bereits die optimale.

Fortsetzung auf Seite 4

[1] Die zweite Autorin wurde durch das Visiting Scholar Program of Excellent Young Teachers der Beijing Union University unterstützt.

- Fallen für ein $c_j > 0$ alle a_{ij} nicht-positiv aus, so gibt es Lösungen mit beliebig hohem Zielwert.
- In jedem anderen Fall gibt es ein $c_j > 0$, für das wenigstens ein $a_{ij} > 0$ ist. Ein solches j wird mit maximalem c_j als Pivotspalte gewählt. Die zugehörige Pivotspalte i wird dann durch $a_{ij} > 0$ und $b_i / a_{ij} =$ minimal bestimmt.

Die fällige Rechnung für das Auflösen und Einsetzen wird durch Aufruf des Programmschritts (T, i, j) dem ClassPad überlassen. Es ist aber zu prüfen, dass durch die beschriebene Wahl des Pivotelements die Zielfunktion erhöht wird, während die neuen b_i ebenfalls nicht-negativ ausfallen. Die Rechnung des ClassPads für unser Ausgangsproblem:



Nach zwei Schritten ist die Aufgabe gelöst: Alle „c_i“ sind negativ, sodass ein Erhöhen der Variablen u und v ein Absenken von Z zur Folge hat. Die Wahl von $u = v = 0$ führt daher auf die gesuchte Lösung $x = 6000$, $y = 4000$ und zum Maximalgewinn von $Z = 2600$ €/Tag.

Zum Abschluss noch das kommentierte Programm (das durchaus Verbesserungspotenzial besitzt); eine ausführliche Diskussion des Simplexalgorithmus findet sich in Löwe, Lei: Lineare Optimierung, Mathematikinformation Nr. 68.

Stochastik

Übergang von einer „a priori“- zu einer „a posteriori“-Wahrscheinlichkeit

Autor: Arnold Zitterbart

Es stehen zwei Spielwürfel zur Verfügung: ein normaler Würfel und ein Quaderwürfel („6er-Lego“). Der Spieler wählt verdeckt einen der beiden Würfel. Mit diesem würfelt er im weiteren Verlauf verdeckt, der andere wird für den Rest des Spiels beiseitegelegt. Der Spieler gibt die Würfelergebnisse nacheinander bekannt. Daraus ist fortlaufend die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass der Quaderwürfel gewählt wurde.

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse beim Werfen des Quaderwürfels werden vor dem Spiel empirisch ermittelt[1]:
Bei einem 6er-Legostein sind dies:

$P(2$ – Noppen unten)	= 0,485
$P(1$ – „hochkant“) = $P(3)$	= 0,0065
$P(4$ – Querlage) = $P(5)$	= 0,085
$P(6$ – Noppen oben)	= 0,332

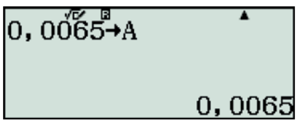
Zu Beginn des Spiels ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Quaderwürfel ausgewählt wurde, 0,5 („a priori“-Wahrscheinlichkeit).
Dann würfelt der Spieler mit dem ausgewählten Würfel und gibt das Ergebnis bekannt. Fällt zum Beispiel die Ziffer 4, so kann der zweite Spieler die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um den Quaderwürfel handelt, als bedingte Wahrscheinlichkeit mit dem Satz von Bayes berechnen:

$$P_4(Q) = \frac{P(4 \cap Q)}{P(4)}$$

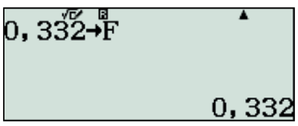
$$= \frac{P(4 \cap Q)}{P(Q) \cdot P_Q(4) + P(\bar{Q}) \cdot P_{\bar{Q}}(4)}$$

$$= \frac{0.085 \cdot 0.5}{0.085 \cdot 0.5 + \frac{1}{6} \cdot 0.5} = 33{,}8\%$$

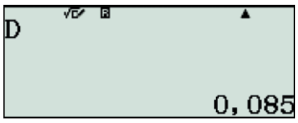
Für den nächsten Wurf kann er diesen Wert als Wahrscheinlichkeit $P(Q)$ nehmen, dass der erste Spieler den Quaderwürfel gewählt hat. Mit dem Satz von Bayes wird dann unter Berücksichtigung des zweiten Wurfergebnisses eine neue Wahrscheinlichkeit $P(Q)$ bestimmt.
Bei der Auswertung kann der WTR die Arbeit wesentlich erleichtern, wenn geschickt mit den Variablen gearbeitet wird.
Zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen beim Quaderwürfel in die Variablen A, B, C, D, E, F ablegen:



...



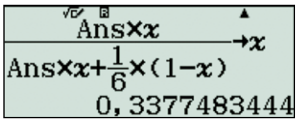
Nach der Wahl des Würfels beträgt die Wahrscheinlichkeit für den Quaderwürfel 0,5. Dieser Wert wird in der Variablen x abgelegt. Fällt im ersten Wurf die „Ziffer 4“, so wird zuerst die Wahrscheinlichkeit $P(4)$ in den Ans-Speicher gelegt, indem der Wert der Variablen D mit ⊟ bestätigt wird.



Die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P_4(Q) = \frac{P(4 \cap Q)}{P(4)} = \frac{P(4 \cap Q)}{P(Q) \cdot P_Q(4) + P(\bar{Q}) \cdot P_{\bar{Q}}(4)}$$

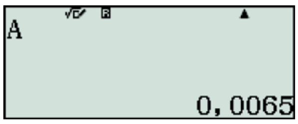
erfolgt entsprechend dem nachfolgenden Screenshot. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass es sich um den Quaderwürfel handelt, wird als „a posteriori“-Wahrscheinlichkeit in die Variable x gelegt.

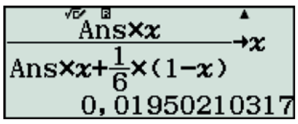


Wird dann eine 1 gewürfelt, so gilt:

$$P_1(Q) = \frac{P(1 \cap Q)}{P(1)} = \frac{P(1 \cap Q)}{P(Q) \cdot P_Q(1) + P(\bar{Q}) \cdot P_{\bar{Q}}(1)}$$

Mit dem WTR:





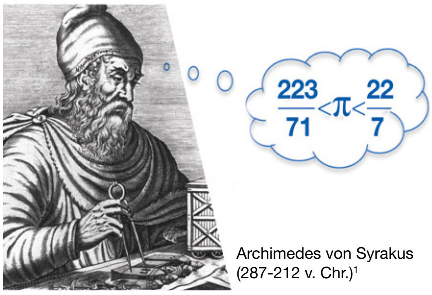
Den etwas komplizierteren Term muss man nicht neu eingeben, sondern kann ihn mit der Tastenkombination ⏶⊟ schnell in die Anzeige holen und berechnen lassen.
Durch weitere Würfelergebnisse kann bald mit „ziemlicher Sicherheit“ gesagt werden, welcher Würfel für das Spiel ausgewählt wurde.

[1] Literatur: http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/ did_stochastik/did_stochastik_3_wahrscheinlichkeitsrechnung.pdf
Eichler, Andreas; Vogel, Markus: Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. Vieweg + Teubner 2009

ClassWiz FX-991DE X: π – Bestimmung auf den Spuren von Archimedes

Autoren: Armin Baeger, Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld

Schon mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner wie dem Casio FX-991DE X ClassWiz ist es möglich, die Arbeitsweisen und Ideen bedeutender Mathematiker im Unterricht nachzuvollziehen.

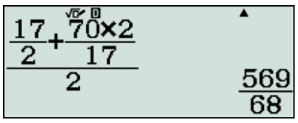


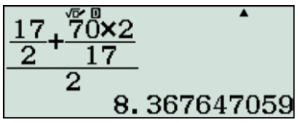
Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr.)[1]

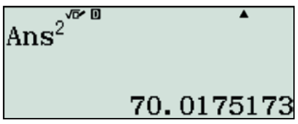
Archimedes antizipierte die moderne Analysis, indem er Ideen der Infinitesimalrechnung und die Intervallschachtelung anwendete, um eine Reihe von geometrischen Sätzen zu beweisen, einschließlich der Fläche eines Kreises, der Oberfläche und des Volumens einer Kugel und der Fläche unter einer Parabel, und er fand eine sehr genaue Annäherung für die Kreiszahl π:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \Leftrightarrow 3.1408 < \pi < 3.1428\,;\ \bar{\pi} = 3{,}1418$$

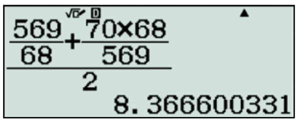
Archimedes kannte eine sehr gute Näherung von Wurzeln durch Brüche.
Z.B. ist $\sqrt{70}$ in erster Näherung $8{,}5 = \frac{17}{2}$ als Mittelwert der benachbarten Zahlen $8 = \sqrt{64} < \sqrt{70} < \sqrt{81} = 9$.
Die nächste Näherung ist der Mittelwert der ersten Näherung sowie des Quotienten aus 70 und des ersten Näherungswerts:

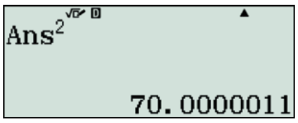


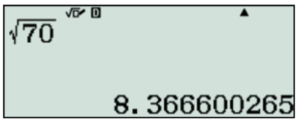




Bereits nach einem weiteren Schritt liegt das Ergebnis auf sechs Dezimalen genau vor, wie eine Überprüfung mit dem Taschenrechner zeigt:

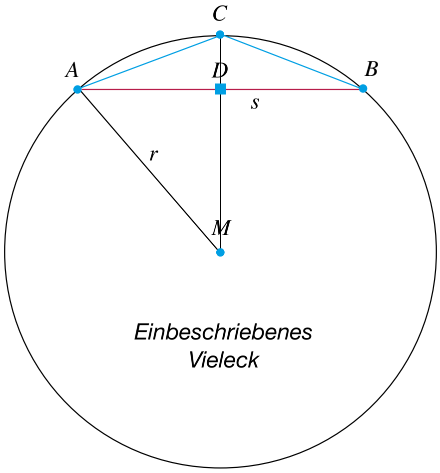






Ferner kannte Archimedes den Satz von Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke.

Archimedes' Methode:



In einen Kreis mit Radius $r = 1$ schrieb Archimedes ein regelmäßiges n-Eck mit der Kantenlänge s ein, das also den Umfang $n \cdot s$ besaß. Er begann mit einem festen n-Eck und verdoppelte mit jedem Schritt die Anzahl der Ecken. Dann machte er dasselbe mit einem umschriebenen Polygon und bildete den Durchschnitt dieser beiden Umfänge.
Seien M der Mittelpunkt des Kreises, $AB = s$ die Kantenlänge des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und BC die Kantenlänge des nächsten regelmäßigen $2n$-Ecks. Rekursiv wird nun BC in Abhängigkeit von $AB = s$ ausgedrückt:

$$AD = \frac{s}{2};\ MD = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} \Rightarrow DC = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$CB = \sqrt{DC^2 + DB^2} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} =$$

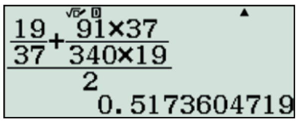
$$= \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$$

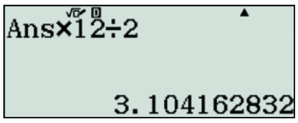
Wir berechnen die Seitenlängen des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, also $s_6 = 1$ und $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, wie oben gezeigt.

$$\sqrt{3} \approx \frac{17}{10} \Longrightarrow \sqrt{3} \approx \frac{\frac{17}{10} + \frac{30}{17}}{2} = \frac{589}{340}$$

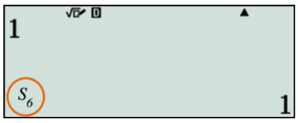
$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx \sqrt{2 - \frac{589}{340}} = \sqrt{\frac{91}{340}} \approx \frac{\frac{19}{2}}{\frac{37}{2}} = \frac{19}{37} \qquad \sqrt{\frac{91}{340}} \approx \frac{\frac{19}{37} + \frac{91 \cdot 37}{340 \cdot 19}}{2}$$

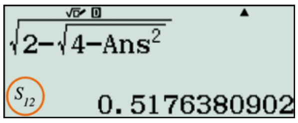
Somit können wir unseren ersten Näherungswert für π als Umfang eines regelmäßigen 12-Ecks berechnen:

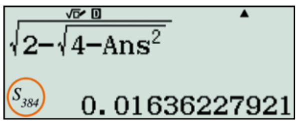


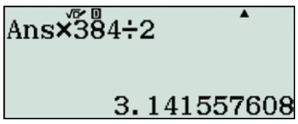


Wir führen nun mit dem ClassWiz FX-991DE X unter der Verwendung der Tasten Ans und = die Rekursion durch, beginnend mit einem regelmäßigen Sechseck mit der Kantenlänge 1. Jeder Schritt verdoppelt die Anzahl der Seiten des n-Ecks.









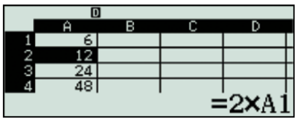
Ein regelmäßiges 384-Eck hat die Kantenlänge 0,02636227921. Damit ergibt sich ein Näherungswert für π von 3,141557608. Entsprechende Überlegungen für das umschriebene regelmäßige 384-Eck führen zu $\pi \approx$ 3,141592654. Der Durchschnittwert 3,141575167 ist eine gute Näherung für π.

Das Problem kann alternativ auch mit der Tabellenkalkulation des FX-991DE X bearbeitet werden: Spalte A enthält beginnend mit A1 = 6 die Anzahl der Seiten der einbeschriebenen n-Ecke, in Spalte B stehen die zugehörigen Seitenlängen s_n. In Spalte C

Fortsetzung auf Seite 6

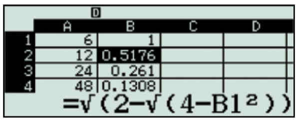
[1] Abbildung Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr.). https://commons.wikimedia. org/wiki/File:Archimedes1.jpg

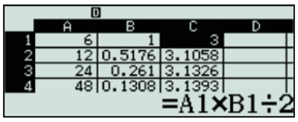
werden die sich daraus ergebenden Näherungswerte für π notiert. In den Spalten D und E stehen die entsprechenden Seitenlängen der umschriebenen n-Ecke und die sich daraus ergebenden Näherungswerte, beginnend mit D1 $= \frac{2}{\sqrt{3}}$.

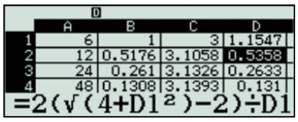


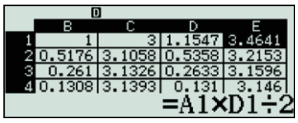
Die Spalteninhalte werden automatisch erstellt, indem die Zellen wie in einer Tabellenkalkulation üblich automatisch mit einem Wert gefüllt werden:
= OPTN 1 2 × OPTN 2 ▲ = =
▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 1 6 = =.

Analog werden die übrigen Spalten gefüllt:









Als Mittelwert von C16 und E16 ergibt sich eine gute Näherung für π.

Anwendungsaufgabe

Das Abwasserproblem[1]

Autor: Jens Weitendorf

Zwei Orte, die 10 km voneinander entfernt liegen, sollen so günstig wie möglich an eine zentrale Abwasserleitung angeschlossen werden. Diese verläuft in 6 km Entfernung parallel zur Verbindungslinie der beiden Orte (s. Abb. 1). Aus Kostengründen ist nur ein einziger Anschluss an diese zentrale Leitung möglich.

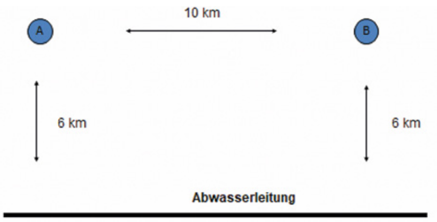


Abb. 1 Darstellung der Situation

Das Problem ist, dass die Funktion, die die Gesamtlänge der Leitung darstellt, eine Funktion von zwei Variablen ist und es zunächst keine Nebenbedingung gibt, die die Anzahl der Variablen reduziert. Möglich wäre es, die partiellen Ableitungen zu bilden und diese dann gleich null setzen.

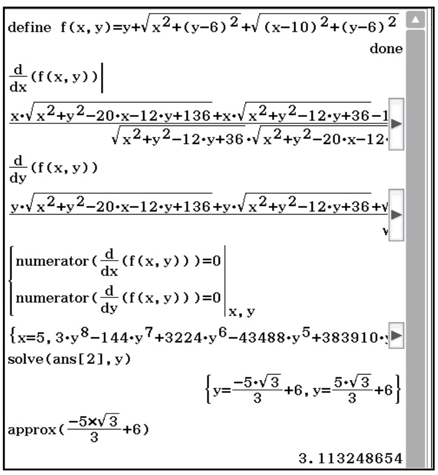


Abb. 2 „Numerator" ruft den Nenner auf

Die den Abstand beschreibende Funktion ist:

$$f(x,y) = y + \sqrt{x^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x-10)^2 + (y-6)^2}$$

Die Lösung erfolgt in zwei Schritten (s. Abb. 2). Der Punkt E, in dem die Leitungen zusammentreffen, hat näherungsweise die Koordinaten $E(5/3{,}11)$[2]. Aus Abbildung 1 wird deutlich, dass es ein Minimum geben muss. Für dieses kommt nur die erste Lösung für die Variable y infrage, da der zweite Wert oberhalb der Strecke AB liegt. Eine 3D-Darstellung der Funktion f bestätigt das[3].

Im Unterricht ist es meistens schwierig zu vermitteln, dass das Problem lösbar ist, indem partielle Ableitungen gebildet werden. Alternativ ist eine Lösung mithilfe der DGS möglich. (s. Abb. 3)

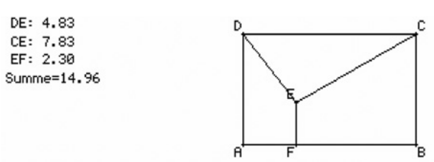


Abb. 3 Simulation mit DGS

Durch Bewegen des Punktes E erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass er auf der Symmetrieachse zwischen D und C liegen muss. Daraus folgt, dass der Punkt E die Koordinaten $E(5/y)$ hat. Das vereinfacht das Problem, da nur noch die Funktion $f(5,y)$ zu betrachten ist und die numerische Lösung ohne Verwendung der partiellen Ableitung möglich ist. (Abb. 4)

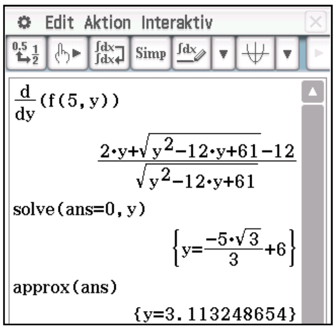


Abb. 4

Der 3D-Darstellung der Funktion ist der relativ flache Verlauf des Graphen im Bereich des Minimums zu entnehmen; ein geringfügiges Verschieben des Punktes führt zu keinem großen Unterschied bei der Leitungslänge. Das bestätigt auch die DGS-Simulation.

Wenn die sich um den Punkt E ergebenden Winkel gemessen werden, wird die besondere Lage von E deutlich: Alle drei Winkel haben die Größe 120°. Ein Hinweis darauf ist der exakte y-Wert für E. Daraus folgt, dass die beiden Katheten in dem Dreieck EE_xE_y die Längen 5 und $\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}$ haben. Die Punkte E_x und E_y sind dabei die Schnittpunkte der Parallelen zu den Koordinatenachsen mit diesen.

Es ergibt sich jetzt die Frage, ob sich das Problem auch allgemein lösen lässt. Allgemein soll dabei heißen, dass die Abstände beliebig sind bzw. die Parallelität zwischen der Verbindungsstrecke AB und der Hauptleitung nicht mehr gegeben ist. Dies wird in einem Folgeartikel im nächsten Forum diskutiert.

[1] Das Problem wurde schon einmal im CASIO forum 1/2009 diskutiert. Die Diskussion fand dort aber nur im geometrischen Rahmen statt. Der vorliegende Artikel beschreibt eine Lösung mit Hilfsmitteln aus der Analysis und begründet eine allgemeine Lösung für verschiedene Abstände. [2] An diesem Beispiel lässt sich die Entwicklung des CAS des ClassPads erkennen. Frühere Versionen waren nicht in der Lage, ein solches nicht lineares Gleichungssystem zu lösen. [3] Die Möglichkeit, die Fläche zu drehen, lässt sich natürlich hier nicht wiedergeben.

Sprachsensibel unterrichten – Wie werden herkömmliche Mathematik-Lehrbücher „sensibel“?

Autorin: Dr. Hilde Kletzl, PH Salzburg, HTBLuVA Salzburg

Die Zielgruppe für die folgenden Unterrichtsrezepte sind Schülerinnen und Schüler mit und ohne Immigrationshintergrund, deren Sprachkompetenz gezielt ausgebaut werden muss für eine weiterführende Schulbildung. Bei dieser Gruppe sind sprachliche Defizite nicht immer sichtbar, treten aber bei der Anwendung von präziser Fachsprache zutage. Gerade bei der Beschreibung komplexer Zusammenhänge, Abläufe und Abhängigkeiten werden Grenzen ihrer Ausdrucksfähigkeit deutlich, sie meiden Aufgabenstellungen, die Argumentationen verlangen oder beantworten diese erst gar nicht. Diese Gruppe schafft es so in die Sekundarstufe II, ohne dass ihre sprachlichen Defizite eklatant sichtbar werden, aber bei der Arbeit mit der Mathematik sind sie eingeschränkt und gehemmt. Die folgenden Methoden dienen dazu, bei ihnen erste Lücken zu schließen; sie sind auch für Schülerinnen und Schüler geeignet, deren Sprachkompetenz bereits auf hohem Niveau ist, um ihre Präzision in der Anwendung von Fachsprache weiter zu schärfen.

Alle hier vorgestellten Methoden werden auf Bespiele angewandt, die in Schulbüchern der Sekundarstufe II vorkommen, ohne dass diese einen besonderen Anspruch auf das Kompetenztraining im Bereich Sprache hätten. Ein Pädagoge kann durch einfache Maßnahmen Beispiele aus dem verwendeten Lehrwerk mit einem sprachlichen Fokus anreichern und so erweitern.

Methoden und Herangehensweisen

Die Toolbox: Die Lehrkraft gibt Sprachbausteine vor, die von den Schülerinnen und Schülern in einen Text eingebaut werden müssen.

Timischl und Kaiser geben in ihrem Lehrwerk beim Technologietraining die folgende Aufgabe; sie kann durch eine sprachliche Komponente erweitert werden: Die Terme und die in der Reihenfolge geänderten Versionen laut vortragen lassen!

Aufgabe:

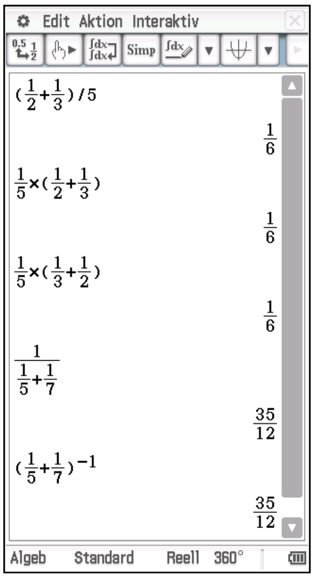
Kontrolliere das Ergebnis bei Verwendung des Taschenrechners durch Nachrechnen in einer anderen Reihenfolge als beim ersten Mal. Runde auf Tausendstel:

$$b)\ \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{5} \qquad c)\ \frac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}$$

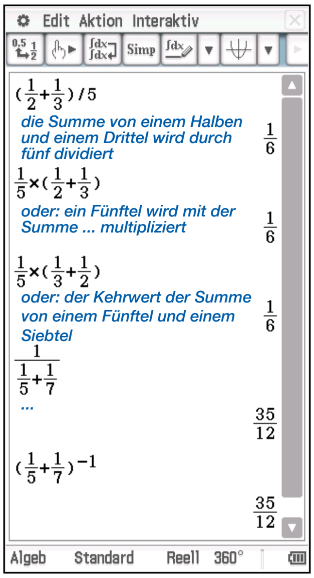
(Timischl & Kaiser, 2011.114-115)

Wie kommt hier die Toolbox zur Anwendung? Die Lehrkraft gibt Begriffe vor, die beim Vortragen der Lösungsversionen Verwendung finden. Beispielsweise: Summe, Kehrwert, Halbes, Drittel, ein Fünftel etc.

Welche Möglichkeiten ergeben sich im ClassPad?



Einfach einmal laut lesen:



Mit der Vorgabe von Begriffen schafft der Pädagoge einen Rahmen für ein sprachlich höheres Ausdrucksniveau. Es ist ein erster Schritt für die selbstständige Anwendung von Fachbegriffen.

Lückensätze – der erste Schritt zum Argumentieren

Aufgabe:

4.110 Aus einer quadratischen Platte wird eine Kreisscheibe, aus einer anderen gleichartigen Platte werden vier gleich große Kreisscheiben herausgeschnitten (Abb.). Warum haben die vier kleinen Kreisscheiben den gleichen Flächeninhalt wie die große Kreisscheibe?

(Timischl & Kaiser, 2011)

Für Schülerinnen und Schüler am Beginn der Sek II ist es nicht so einfach, hier eine schlüssige Argumentation zu führen.

Mögliche Lückensätze, die als Unterstützung von der Lehrkraft vorgegeben werden können:

Bei der großen Kreisscheibe ist der Radius ____________________ wie die Seitenlänge des umschließenden ____________________.

(Lösung: halb so lang / Quadrats)

Bei den kleinen Kreisscheiben ist der Radius ________________ der Seitenlänge des umschließenden ____________________.

(Lösung: ein Viertel / Quadrats)

Um das Anforderungsniveau noch einmal zu senken, kann auch hier eine Toolbox mit einer Auswahl von richtigen und falschen Sprachbausteinen für die Lücken angeboten werden. Toolbox: halb so lang, Quadrats, ein Viertel, Rechtecks, ein Viertel so lang, die Hälfte, ...

Sprachlich werden hier Strukturen zum Ausdrücken von Vergleichen trainiert.
Die Fläche der großen Kreisscheibe wird nun mit ____________________ berechnet. Für die kleinen Kreisscheiben ergibt sich folgende Formel ____________________.

(Lösung: Formeln einsetzen)

Fortsetzung auf Seite 8

Eine Zusatzaufgabe, um diese Strukturen zu vertiefen:

Aufgabe:
Gilt der Zusammenhang auch für eine gleichmäßige Aufteilung in 16 kleine Kreise bei ähnlich symmetrischer Anordnung? Argumentiere erneut schrittweise!

Lücken haben den Vorteil, dass der Pädagoge die verwendeten Sprachstrukturen steuern und dadurch seinen Schützlingen ein höheres Sprachniveau zumuten kann, als das ohne Vorgabe möglich wäre.
Mit dieser ersten gesteuerten Verwendung von Sprachstrukturen erhält der Lernende die Möglichkeit, diese in „gesicherter" Umgebung auszuprobieren und sie dann später selbst frei zu verwenden. Spracherwerb funktioniert schließlich vielfach im ersten Schritt mit Nachahmung in der Tradition des Behaviorismus. (Cf. Thomas Herbst, Rita Stoll et Rudolf Westermayr 1991. 257)

Freie Lücken – key word transformations
Dieses System des Sprachtrainings stammt aus den Cambridge-Prüfungen für Englisch als Fremdsprache wie zum Beispiel das FCE. (Cf. John Hughes und Jon Naunton 2015. 35) Dabei wird für eine Lücke ein Wort angeboten, aber es müssen noch zusätzlich Strukturen eingefügt werden, sodass der Satz sinnvoll wird.

Diese Art des Lückensatzes gibt mehr Freiheit, aber sie fordert auch mehr. Eine Struktur ist vorgegeben, die Lösung erschließt sich nicht so schnell.

Aufgabe:
Vervollständige mit max. 5 Wörtern und verwende dabei Kreisscheibe!
Der Radius ____________________ der Seitenlänge des umschließenden Quadrats.
(Lösungen: der kleinen Kreisscheibe ist ein Viertel/der großen Kreisscheibe ist die Hälfte)
Diese Lückenkonstruktion lässt zwei völlig unterschiedliche Denk- und Lösungsansätze zu und weicht damit von den oft allzu starren Strukturen des Behaviorismus ab. Sprache braucht Strukturen, aber auch Freiheit, um sich entfalten zu können.

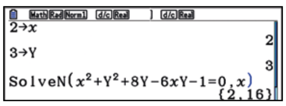
Quellen:
- Herbst, Thomas, Rita Stoll, Rudolf Westermayr. Terminologie der Sprachbeschreibung. Ismaning: Hueber, 1991.
- Hughes, John, Jon Naunton. Spotlight on First FCE. 2nd Ed. Andover: National Geographic Learning, 2015.
- Timischl, Wolfgang, Gerald Kaiser. Ingenieur-Mathematik 1. Wien: Dorner, 2011.

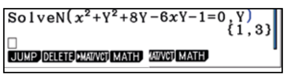
Blick ins Ausland

Eine Abituraufgabe aus den Niederlanden

Übersetzung aus dem Niederländischen

Zeige:
Die Gleichung $x^2 + y^2 + 8y - 6xy = 1$, x, y ganzzahlig hat unendlich viele ganzzahlige Lösungen.
Die Gleichung lautet umgestellt:
$x^2 + y^2 + 8y - 6xy - 1 = 0$
Zunächst ist festzustellen: Falls eine Lösung x_1 der Gleichung $x^2 + bx + c = 0$, $b, c \in \mathbb{Z}$, ganzzahlig ist, so ist auch die zweite Lösung x_2 der Gleichung eine ganze Zahl. Dies ergibt sich aus dem Satz von Vieta, da $x_1 + x_2 = -b$ und $b \in \mathbb{Z}$ ist.
Durch Ausprobieren (und durch SolveN auf dem grafischen Taschenrechner) ergeben sich (unter anderem) $x = 2$ und $x = 3$ als mögliche Ergebnisse.





- $(2, 3)$ ergibt bei $y = 3$ wieder $(2,3)$, aber auch $(16, 3)$
- $(16, 3)$ ergibt bei $x = 16$ wieder $(16, 3)$, aber auch $(16, 85)$
- $(16, 85)$ ergibt bei $y = 85$ wieder $(16, 85)$, aber auch $(494, 85)$
- $(494, 85)$ ergibt bei $x = 494$ wieder $(494, 85)$, aber auch $(494, 2871)$ usw.

Beweis der Aussage:
Schritt 1:
Annahme: $(x, y) = (m, n)$, eine Lösung der gegebenen Gleichung mit $n > m$ und $m \geq 2$.
Einsetzen von $y = n$ in die Gleichung $x^2+y^2+8y-6xy-1 = 0$ ergibt die Gleichung $x^2+n^2+8n-6nx-1=0 \leftrightarrow x^2-6nx+n^2+8n-1=0$

$x = m$ ist eine Lösung dieser Gleichung. Nenne die zweite Lösung m_1.
Die Summe dieser zwei Lösungen ist $6n$.
Also ist $m_1 = 6n-m = 5n+n-m$. Weil $n > m$, gilt $m_1 > 5n$. Also ist $m_1 > n$.
Also ist $(x, y) = (m_1, n)$ eine neue Lösung der Gleichung, aber jetzt mit $m_1 > n$.

Schritt 2:
Angenommen, $(x, y) = (m, n)$ ist eine Lösung der gegebenen Gleichung, mit $m > n$ und $n \geq 3$.
Einsetzen von $x = m$ ergibt die Gleichung $m^2+y^2+8y-6my-1 = 0 \leftrightarrow y^2+(8-6m)y+m^2-1 = 0$

$y = n$ ist eine Lösung dieser Gleichung. Nenne diese zweite Lösung n_1. Die Summe dieser 2 Lösungen ist $-(8-6m)$.
Also ist $n_1 = -8+6m-n = -8+5m+m-n$.
Da $m>n$, gilt $n_1>-8+5m \leftrightarrow n_1>-8+3m+2m$.
Weil $m>3$, gilt $n_1>-8+9+2m$, also $n_1>1+2m$.
Somit ist $(x,y) = (m, n_1)$ eine neue Lösung, aber jetzt mit $n_1>m$.

Damit ist gezeigt, dass nach der Lösung (2, 3) immer neue Lösungen gefunden werden können, wobei nach Schritt 1 der x-Wert größer wird und danach nach Schritt 2 der y-Wert größer wird. Also ist mit einer Art vollständiger Induktion ein Beweis geliefert.

Rätselecke

Knobeleien

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

Knobelei 1:
In welcher Zeile und in welcher Spalte steht die Zahl 2019 in dem folgenden Schema?

1	3	6	10	15	...
2	5	9	14	20	...
4	8	13	19	26	...
7	12	18	25	33	...
11	17	24	32	41	...
16	23	31	40	50	...
⋮		⋱			⋮
...		...			...

Knobelei 2:
Welcher Wert ist größer?
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{6000} + \left(\frac{2}{3}\right)^{6000}$$
oder
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6000} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6000} ?$$

Knobelei 3:
Mathematiker stimmen sich gerne auf das neue Jahr dadurch ein, dass sie Berechnungen notieren, deren Ergebnis die neue Jahreszahl ist. In dieser Rechnung darf aber immer nur eine Ziffer verwandt werden, zugelassen sind alle Grundrechenarten. Z.B. ist [(5+5+5+5/5)·5·5+(5–5/5)]·5–5/5 = 2019 eine solche Aufgabe mit der Ziffer 5. Ziel ist es, die ausgesuchte Ziffer dabei so selten wie möglich zu verwenden.

„Strahlensatz“ für Integrale

Autorin: Susanne Bünger, Lessing-Gymnasium Frankfurt

Der Querschnitt eines 4 m tiefen Flussbetts kann durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9}x^2$ beschrieben werden.

Aufgabe:

a) Berechnen Sie die Breite des Flusses und beschriften Sie die Koordinatenachsen.

b) Berechnen Sie, wie viel Wasser der Fluss auf einem Kilometer Länge führt, wenn er ganz gefüllt ist.
(Kontrollergebnis: V = 32.000 m³)

c) Bestimmen Sie mithilfe einer Stammfunktion, wie hoch der Fluss gefüllt sein muss, damit er nur halb so viel Wasser führt.

Jeder Schüler kennt diese Situation: In der Matheklausur fehlt noch die Lösung der letzten Teilaufgabe. Auch nach mehrmaligem Lesen der Aufgabenstellung und mehreren Versuchen ist der richtige Ansatz unauffindbar. Die Zeit neigt sich langsam dem Ende zu. Dann mal schnell einen Lösungsweg notieren – besser als gar nichts. Ob das stimmen kann? Egal!
Gegeben war ein Flussbett mit einer parabelförmigen Querschnittsfläche von 32 m², 12 m breit und 4 m tief, und der Gleichung der Parabel – Flüsse haben bekanntlich immer einen regelmäßigen, parabelförmigen Querschnitt.

Wäre die Aufgabe leicht lösbar mit einer Ursprungsgerade als Funktion? Einfach die „Fläche unter dem Fluss“ (zwischen x-Achse und Funktionsgraph) betrachtet und die Flussbreite für die halbierte Fläche ausgerechnet. Die Vermutung war, dass dieser Ansatz womöglich auch für Parabeln funktioniert, da strengmonotone Potenzfunktionen ja sehr ähnlich sind. Den Taschenrechner genommen und die Flussbreite berechnet. Da die Fläche unter dem gesamten Fluss 16 m² groß war (48 m² – 32 m²), liegt im ersten Quadranten davon die Hälfte: 8 m². Jetzt wird die Obergrenze a des Integrals über der Funktion im Intervall von null so bestimmt, dass das Ergebnis der halbierten Fläche von nur noch 4 m² entspricht. Wegen der Achsensymmetrie der Parabel ist es ausreichend, die Funktion nur für ihre positiven x-Werte zu betrachten. Das Ergebnis für a ist 4,76 m, was dann nur noch in die Funktion eingesetzt werden muss, um die gesuchte Flusstiefe von 2,52 m zu erhalten. Das Ergebnis erschien mit Blick auf eine Skizze plausibel! Dann war die Zeit für die Klausur auch schon abgelaufen und so durfte jetzt der Mathematiklehrer über die Richtigkeit dieses Ansatzes urteilen.

Eigentlich sollte zuerst der x-Wert des Schnittpunktes zwischen dem Funktionsgraphen und der konstanten Flusshöhe c = 4 m berechnet werden, um dann die Fläche zwischen y = 4 und dem Funktionsgraphen zu berechnen (16 m², davon 8 m² im ersten Quadranten und 4 m² bei Niedrigwasser). Das Ergebnis für die Flusshöhe bei niedrigem Wasserstand ist auch hier 2,52 m. Genau das gleiche Ergebnis wie bei dem oben beschriebenen Ansatz! Das hat den Lehrer zunächst verwirrt, da er eigentlich nicht dachte, dass bei dieser Aufgabe statt der Fläche zwischen der Wasserlinie und der Funktion einfach die Fläche unter der Funktion verwendet werden kann. Auch seinen Kollegen und ehemaligen Professoren war das nicht bekannt, sodass bisher keiner zeigen konnte, dass schon irgendjemand früher auf diese Regelmäßigkeit bei Flächenverhältnissen gekommen ist. So wurde dieser Satz dann aufgeschrieben und bewiesen:

Für alle Funktionen der Form $f(x) = c \cdot x^n$ (mit $n \neq 1$) gilt:

$$\frac{\int_0^b f(x)\,dx}{\int_0^a f(x)\,dx} = \frac{\int_0^b f(b) - f(x)\,dx}{\int_0^a f(a) - f(x)\,dx}$$

Das bedeutet, dass das Verhältnis zwischen einer größeren Fläche unter einer solchen Funktion f(x) im Intervall von 0 bis b und einer kleineren Fläche unter dieser Funktion im Intervall 0 bis a sich nicht ändert, wenn die Fläche über dem Graphen von f(x) im Intervall von 0 bis b berechnet und von der Konstanten f(b) subtrahiert – durch die Fläche über dem Graphen im Intervall von 0 bis a – von der Konstanten f(a) subtrahiert – dividiert wird. Anders formuliert bedeutet das, dass die prozentuale Veränderung einer Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse der Veränderung der Fläche zwischen dem Funktionsgraph und einer Parallelen zur X-Achse entspricht.

Beweis:

$$\frac{\int_0^b c \cdot x^n\,dx}{\int_0^a c \cdot x^n\,dx} = \frac{\int_0^b c \cdot b^n - c \cdot x^n\,dx}{\int_0^a c \cdot a^n - c \cdot x^n\,dx}$$

$$\frac{\frac{c}{n+1} \cdot b^{n+1}}{\frac{c}{n+1} \cdot a^{n+1}} = \frac{c \cdot b^{n+1} - \frac{c}{n+1} \cdot b^{n+1}}{c \cdot a^{n+1} - \frac{c}{n+1} \cdot a^{n+1}}$$

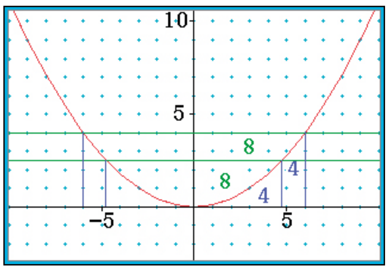
$$\frac{b^{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{b^{n+1}(c - \frac{c}{n+1})}{a^{n+1}(c - \frac{c}{n+1})}$$

$$\frac{b^{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}} \quad q.e.d.$$

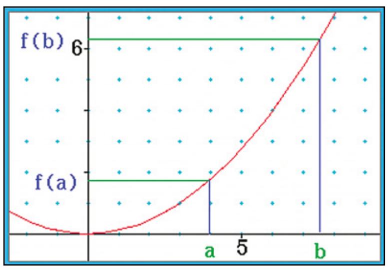
Der Satz kann auch so formuliert werden: Das Flächenverhältnis der Fläche „über dem Funktionsgraphen“ zur Fläche unter ihm für jeden eingesetzten x-Wert ist konstant. Dieser Satz gilt aber allerdings wirklich nur für Funktionen des Typs $f(x) = c \cdot x^n$ und nur, wenn die untere Intervallgrenze null ist. Zudem muss n ungleich –1 sein. Diese Größenverhältnisse bei Flächen haben mich dann sehr interessiert, sodass ich mich bei „Jugend forscht“ angemeldet habe und auch tatsächlich den Regionalwettbewerb in Frankfurt in der Sparte „Mathematik/Informatik“ gewonnen habe.

Ausgehend von diesem Satz war die Frage, ob dieser Satz auch für Rotationskörper gilt. Da Rotationskörper aus unendlich vielen infinitesimalen Körpern bestehen, war klar, dass der Satz auch für Rotationskörper gelten muss. Mit meinem Casio Taschenrechner erneut einfach Zahlen eingesetzt und wieder eine ähnliche Regelmäßigkeit beobachtet. So erschien es lohnend, den Satz auch für Rotationskörper zu beweisen. Das ist dann auch gelungen. Leider hat der „Strahlensatz“ für Integrale praktisch gesehen wohl nicht so viele Anwendungsmöglichkeiten, aber es geht hierbei ja auch nicht darum, dass die Welt mit dem Satz ein besserer Ort wird, sondern es ist eine sehr interessante mathematische Gesetzmäßigkeit, die – einmal gehört – sehr einfach erscheint, obwohl es nach einigem Nachdenken doch etwas Besonderes ist, gerade weil es eigentlich so einfach ist.

Hier noch einmal eine grafische Verdeutlichung zu der Aufgabenstellung mit dem Fluss:



Und eine grafische Verdeutlichung zum Satz generell:



„Kurvendiskussion“ mit Köpfchen und (fast) ohne Kalkül

Autorin: Julie Valerius, Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien – Trier

Die rasante digitale Entwicklung hat den Themenbereich „Kurvendiskussion“ wie kaum einen anderen beeinflusst und verändert. Welche Kenntnisse und Fähigkeiten sollen Schüler in diesem Zusammenhang (noch) besitzen?
Als ich vor mehr als zwanzig Jahren anfing zu unterrichten, gehörte für mich zur „Kurvendiskussion“ ganz klar das Abarbeiten verschiedener Kriterien mit dem Ziel, einen Funktionsgraphen zu zeichnen. Immerhin gab es kaum Plotprogramme und diese waren schon gar nicht für alle verfügbar. Heute ist der Sinn dieses Kalküls nur noch schwer zu vermitteln, bieten doch Apps für Smartphones und Taschenrechner per Knopfdruck sofort die Möglichkeit, Graphen darzustellen. Abgesehen davon ist die damals sehr verfahrensorientierte Vorgehensweise mit der Forderung nach einem problem- und kompetenzorientierten Unterricht nicht mehr zu vereinbaren.
Bleibt die Frage, welche Fähigkeiten und Fertigkeiten die Lernenden entwickeln sollen. Der Graph per Knopfdruck erscheint dabei als das analoge Phänomen zum Kalkül – nur auf digitaler Ebene.
Der rheinlandpfälzische Lehrplan fordert unter anderem „Den Graphen der Ableitungsfunktion zu einem vorgegebenen Graphen skizzieren“, also das Verständnis graphischer Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitungsfunktionen. Ebenso findet sich darin „Notwendige und hinreichende Kriterien für Monotonie und Existenz von Extrema und Wendepunkten anschaulich begründen und einzelne Kriterien beweisen“, ein Aspekt, der in einigen (wenigen) Lehrwerken zum Anlass genommen wird, die Kompetenz K1 (Mathematisch argumentieren) zu fördern. Unter dem Punkt „Ganzrationale Funktionen untersuchen“ wird unter anderem der Einsatz von Funktionsplotprogrammen empfohlen.
Ergänzend dazu sollten meiner Ansicht nach Schüler einen Überblick über den grundsätzlichen Verlauf der Graphen ganzrationaler Funktionen verschiedenen Grades besitzen und in der Lage sein, den Graphen anhand des Funktionsterms begründet zu skizzieren. Im weiteren Verlauf des Analysisunterrichts kann diese Fertigkeit auf weitere Funktionsklassen ausgeweitet werden.

Im Folgenden möchte ich darlegen, wie dies mit einfachen, flexiblen und verständnisorientierten Argumenten geschehen kann.

In einem aktuellen Schulbuch ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x$ als Beispiel für eine „Kurvendiskussion“ im klassischen Sinne, schön aufgeteilt in 7 Schritte, über fast eine Buchseite ausgeführt.

Abseits des Kalküls hingeschaut fällt auf, dass

- der Graph aus dem „Negativen kommt“ und ins „Positive geht“ (Globalverhalten),
- eine Punktsymmetrie zum Ursprung vorliegt (nur ungerade Exponenten),
- der Graph aufgrund der Linearfaktorzerlegung $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x=\frac{1}{3}x(x-3)(x+3)$ drei einfache Nullstellen besitzt,
- es maximal zwei Extrempunkte geben kann, da die Ableitungsfunktion vom Grad zwei ist.

Mit diesen vier Eigenschaften ist der Verlauf des Graphen bereits eindeutig festgelegt. Wenn die exakten Koordinaten des Hoch- bzw. Tiefpunktes benötigt werden, so bleibt noch die Gleichung f´(x) = 0 zu lösen und die Ergebnisse in f(x) einzusetzen. Welcher der dadurch erhaltenen Extrempunkte der Hoch- bzw. Tiefpunkt ist, ergibt sich unmittelbar aus dem Globalverhalten – ohne hinreichendes Kriterium.
Als Wendepunkt kommt allein aus Symmetriegründen nur (0/0) infrage – ohne f´´ und hinreichendes Kriterium.

Zusammenfassend sind also Kenntnisse über den Globalverlauf eines Graphen (Grenzwerte), Symmetrie zum Ursprung und zur y-Achse sowie Zusammenhänge zwischen Linearfaktorzerlegung und dem Verhalten an den Nullstellen notwendig. Letzteres bietet im Übrigen einen wunderbaren Anlass zu entdeckendem Lernen, unterstützt durch GTR oder CAS, das zu folgenden Erkenntnissen führen sollte:

- an einer Nullstelle mit gerader Vielfachheit wechselt die Funktion ihr Vorzeichen nicht
- an einer Nullstelle mit ungerader Vielfachheit findet ein Vorzeichenwechsel statt
- je höher der Exponent/die Vielfachheit, umso „flacher“ verläuft der Graph in der Umgebung der Nullstelle

UND:

- die Vielfachheit einer Nullstelle reduziert sich mit jeder Ableitung um 1

Während die drei ersten Feststellungen noch unmittelbar durch Vorzeichenregeln und Potenzen rationaler Zahlen mit Betrag kleiner als 1 begründbar sind, erschließt sich die Gültigkeit der letzten Aussage erst z.B. im Zusammenhang mit der Produktregel.

Wird auf diese Weise gearbeitet, so ergeben sich eine Fülle spannender Fragen und Aussagen. Fast in jedem Schulbuch ist inzwischen die Aufgabe zu finden „Begründe, dass bei einer ganzrationalen Funktion 3. Grades mit zwei Extrempunkten diese stets symmetrisch zum Wendepunkt liegen“. Dieses ist mit Rückgriff auf die Eigenschaften quadratischer Funktionen ein leichtes Unterfangen. Ebenso finden sich Anregungen ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu klassifizieren, also der Frage nachzugehen, wie viele unterschiedliche Typen es überhaupt gibt.
Für Funktionen vom Grad 3 sind es gerade einmal 3 unterschiedliche Formen, die anhand verschiedener Möglichkeiten der Linearfaktorzerlegung (3 einfache Nullstellen, eine doppelte und eine einfache, nur eine einfache Nullstelle, eine dreifache Nullstelle) und der Eigenschaften der quadratischen Ableitungsfunktion (keine, eine doppelte oder zwei einfache Nullstellen) leicht zu identifizieren sind.
Bei Funktionen 4. Grades können mithilfe der Linearfaktorzerlegung der Ableitungsfunktion fünf (bis auf Verschiebungen und Spiegelungen) verschiedene „Grundformen“ ausgemacht werden:

Bild 1:
f´ hat eine dreifache Nullstelle.

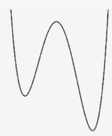


Bild 2:
f´ hat drei einfache Nullstellen.

Bild 3:
f´ hat eine einfache und eine doppelte Nullstelle.

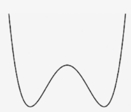


Bild 4:
f´ hat drei einfache Nullstellen und f (ggf. nach Verschiebung) zwei doppelte N. bzw. ist achsensymmetrisch.

Bild 5:
f´ hat nur eine einfache Nullstelle.

Abb.1

Mit diesem Wissen erscheint es noch überflüssiger, kalkülmäßig Funktionen zu „diskutieren“, insbesondere in Anbetracht des Übungsmaterials, das in manchen Schulbüchern angebotenen wird.
Werden Bild 2 und 4 in Abbildung 1 verglichen, so stellt sich die Frage, ob alle Funktionen 4. Grades mit zwei doppelten Nullstellen achsensymmetrisch sein müssen – oder gibt es auch in x-Richtung „schiefe Ws“?
Wird davon ausgegangen, dass diese Funktionen die „Bauart“ $(x–a)^2(x–b)^2$ mit a,b > 0 haben müssen, so lässt sich rechnerisch leicht zeigen, dass diese immer symmetrisch zu $x = \frac{a+b}{2}$ sind, wobei sich auch hier sicherlich noch andere Argumente finden lassen.
Die Untersuchung wird auch kaum schwieriger, wenn Funktionen 5. Grades betrachtet werden:
Untersucht wird die Funktion
$f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x$

- Linearfaktorzerlegung: $x \cdot (\frac{1}{10}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 6)$
- Punktsymmetrie zum Ursprung
- Globalverhalten: vom Negativen ins Positive
- Nun muss noch f´ zurate gezogen werden: $f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$ besitzt vier einfache Nullstellen, damit gibt es zwei Hochpunkte und zwei Tiefpunkte, wobei an der Stelle mit dem kleinsten x-Wert ein Hochpunkt vorliegen muss (Globalverhalten!). Zwischen den Extrempunkten und im Ursprung liegt jeweils ein Wendepunkt. (Es sind maximal 3 Wendepunkte möglich, da f´´ eine Fkt. 3. Grades ist.)

Damit ist ein Überblick über den Verlauf des Graphen eindeutig gegeben.
Auch hier stellt sich wieder eine interessante Frage:
Liegen auch hier – wie bei Funktionen 3. Grades – die Extrempunkte punktsymmetrisch zu den Wendepunkten?
Dazu folgende Gedanken:
f´ muss eine achsensymmetrische Funktion vom Grad 4, mit 4 einfachen Nullstellen sein, also die Bauart besitzen
$(x^2 – a)(x^2 – b) = x^4 – (a+b)x^2 + ab$, mit a,b >0.

Extrempunkte finden sich damit an den Stellen $\pm\sqrt{a}$ *und* $\pm\sqrt{b}$, die Wendestellen liegen außer bei x = 0 bei x = $\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ und damit (außer W(0/0)) nicht in der Mitte der Extremstellen. Auch hierfür gibt es sicherlich noch nicht-rechnerische Argumente.

Bemerkungen zum Einsatz des ClassWiz:

Bei vielen in Schulbüchern angebotenen Übungen zur Funktionsuntersuchung an Polynomfunktionen erschließt sich die Linearfaktorzerlegung unmittelbar durch Ausklammern und den Blick auf die ganzzahligen Teiler des konstanten Gliedes, sodass kein Taschenrechner notwendig ist.
Der ClassWiz löst Polynomgleichungen bis zum Grad 4, wobei die Vielfachheit der Nullstellen nicht angezeigt wird. Eine Lösung wäre, im Setup komplexe Lösungen zuzulassen. Werden allerdings beispielsweise für eine Funktion 4. Grades nur zwei reelle Nullstellen angezeigt, können sich die Fälle $(x–a)(x–b)^3$, $(x–a)^2(x–b)^2$ oder $(x–a)^3(x–b)$ dahinter verbergen. Hier bleibt entweder das Ausprobieren durch Ausmultiplizieren oder – noch eleganter – der Blick auf die Nullstellen der Ableitungsfunktion, wodurch die dreifache Nullstelle der Funktion als doppelte Nullstelle der Ableitungsfunktion leicht zu identifizieren ist. Der ClassWiz kann auch hier helfen: Er findet Nullstellen von Ableitungen mittels Newtonverfahren.

Bemerkungen zum Unterricht:

Im Rahmen der Untersuchung ganzrationaler Funktionen habe ich sowohl in Grund- als auch in Leistungskursen immer wieder den Weg beschritten, den Verlauf von Graphen mit möglichst wenigen Rechnungen argumentativ zu ermitteln. Es hat sich gezeigt, dass die Schüler dies gerne aufnahmen und ein regelrechter Wettstreit entbrannte, wer am schnellsten und mit den besten (wenigsten) Argumenten den Verlauf richtig skizzieren konnte. Einige wenige nutzten allerdings die – parallel ebenfalls angebotene – Methode der kalkülorientierten Untersuchung mithilfe notwendiger und hinreichender Kriterien, was vermutlich als der sicherere Weg empfunden wurde.
Auch bei der Untersuchung komplexerer Funktionen (e-Funktionen, ln-Funktionen, zusammengesetzte oder verkettete Funktionen) griffen viele Schüler später gerne darauf zurück, den Verlauf über Grenzwertbetrachtungen oder andere Eigenschaften zu erschließen, bevor die zweite Ableitung, die dann häufig sehr komplex ist, zur weiteren Analyse herangezogen wurde.
Insgesamt ist festzustellen, dass die Förderung des flexiblen, problemorientierten Denkens (K2) und der Fähigkeit des mathematischen Argumentierens (K1) mit dieser Herangehensweise unterstützt werden kann, wobei die meisten Schüler einen Mathematikunterricht, der sich wenig auf Kalkül und rezeptartige Verfahren stützt, als anregender und sinnvoller empfinden.

Literatur:

- PROEPPER (2006): Die Kurvendiskussion ist tot – es lebe die Diskussion über Kurven; http://www.algebra.tuwien.ac.at/institut/schulmathematik/praesentationen/proepper.pdf [26.11.18]
- Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur Rheinland-Pfalz (2014): Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe; Anpassung an die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife

Buchvorstellungen

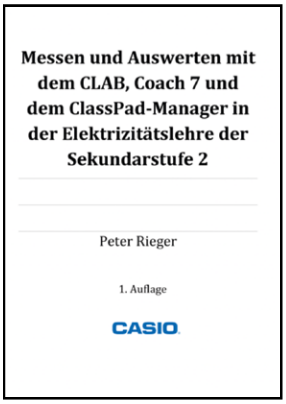
Messwerterfassung mit dem GTR

Autor: Michael Bostelmann

Die neueste Auflage eines Klassikers ist fertiggestellt. Michael Bostelmann hat seine umfangreiche Sammlung an Experimenten aus der Physik überarbeitet für den FX-CG20/FX-CG50 und die neueste Version von E-Con, dem integrierten Messwerterfassungs-Programm. Mit verschiedensten Sensoren werden Experimente gut nachvollziehbar durchgeführt und mit den Bordmitteln der CASIO GTR ausgewertet.

Messen und Auswerten mit dem C-Lab, Coach und dem ClassPad-Manager in der Elektrizitätslehre

Autor: Dr. Peter Rieger



Messwerterfassung mit Spezialisierung auf die Elektrizitätslehre ist das Thema des brandneuen Buches von Dr. Peter Rieger von der Universität Leipzig. Sowohl mit dem Computer als auch mit ClassPad werden zahlreiche Experimente aus der Elektrizitätslehre durchgeführt und ausführlich ausgewertet. Auch eine Anleitung für den Datenaustausch und die allgemeine Bedienung der Messwerterfassung ist enthalten und erleichtert so auch Einsteigern den Umgang mit dem C-Lab.

Sie finden die neuen Bücher kostenfrei als PDF in unserer Materialdatenbank:
www.casio-schulrechner.de

Lehrer-Info-Service

Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen der Lehrpläne in den Bundesländern harmoniert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaussand zum Beispiel zu folgenden Themen:

- CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten
- Informationen zu regionalen Veranstaltungen
- Neuerungen in den Zulassungsrichtlinien
- bundeslandspezifische Angebote
- Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht

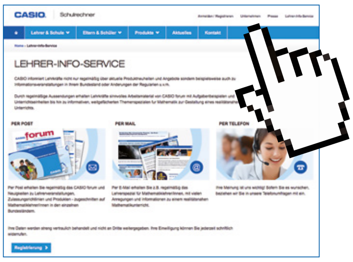
Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.

Anmeldung

Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten – dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

Anmeldung im Netz

Unter dieser Web-Adresse können Sie unsere Informationen abonnieren:
www.casio-schulrechner.de/lehrerinfoservice



Anmeldung per QR-Code

Scannen Sie einfach den **QR-Code**.

Kontakt

Educational Team

Unsere Spezialisten rund um das Thema Schulrechner von CASIO und deren Einsatz im Mathematikunterricht stehen Ihnen bei Fragen jederzeit zur Verfügung:
Telefon: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-100
E-Mail: education@casio.de
Homepage: www.casio-schulrechner.de

CASIO European Support Center

Für Beratung und technische Informationen wenden Sie sich an das CASIO European Support Center:
Telefon: +49 (0)40/528 65-802
Fax: +49 (0)40/528 65-888
E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen

Bei Fragen rund um das Thema Reparatur stehen Ihnen Experten unter folgenden Kontaktdaten zur Verfügung:
Telefon: +49 (0)40/528 65-203
Fax: +49 (0)40/528 65-242
E-Mail: repair@casio.de

Testsoftware und Updates zum Herunterladen

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: **edu.casio.com**

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.5000
FX-CG20/50	3.11/3.20
FX-9860GII	2.09
Software	
ClassPad II Manager Subscription (Android/IOS)	2.01.5000
ClassPad Manager	3.06.6000
FX-CG20/50 Manager	3.11/3.20
FX-Manager Plus	2.09
ClassWiz Emulator Subscription	2.00

Updates bis Januar 2019

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm

- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

4 549526 606557

119SGR-FORUM25-DE

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Bildquellen:
S. 1: M. Mettin, Offenbach; www.m-momente.de

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team • education@casio.de

Design:
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, HH