CASIO forum

Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 2/2021

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

wer hat nicht im letzten Jahr ausprobiert, welche Möglichkeiten sich gerade im Mathematikunterricht durch Lernsoftware bieten und was gut funktioniert und was nicht? Wir stellen eine Lernplattform vor, die didaktisch geschickt mit gestaffelten Hilfen und viel Anschauung Schüler bei der Beschäftigung mit dem Unterrichtsstoff unterstützt. Sie stammt aus Norwegen und ist schon über 15 Jahre sehr erfolgreich im Einsatz.

Computeralgorithmen sind ein so wichtiger Bestandteil der Mathematik und vieler anderer Bereiche, dass grundsätzliches Verständnis einfacher Beispiele einen guten Beitrag zum Weltverständnis bieten kann. Wir zeigen ein Beispiel mit Python. Seismische Geschwindigkeiten, verständnisfördernde Faktorisierung, lineare Regression als Anwendung der analytischen Geometrie, Ermitteln von Konfidenzintervallen und Zugänge zum Beweisen sind weitere Themen. Es gibt wieder ein interessantes Rätsel und Tipps & Tricks.

Einen Überblick über Support-Angebote finden Sie auf unserer Internetseite. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an education@casio.de.

Ihr Redaktionsteam

Erfahrungsbericht

Erfahrungen mit ClassPad Learning während der Entwicklungsphase

Autor: Armin Baeger, Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld

Die seit Langem von der Gesellschaft geforderte Digitalisierung des Unterrichts hat in der Corona-Pandemie kräftig an Fahrt aufgenommen. Aus Mitteln des Digitalpakts der Bundesregierung wird die digitale Infrastruktur der Schulen mit Glasfaseranschlüssen, WLAN und digitalen Präsentationsgeräten wie Beamern oder digitalen Tafeln in den Unterrichtsräumen geschaffen oder modernisiert. Viele Schulträger kaufen Notebooks und Tablets für die flächendeckende Ausstattung aller Schüler mit digitalen Endgeräten.

Lernen Schüler damit besser? Meine Antwort darauf lautet: „Vielleicht.“ Auf den Lehrer kommt es an, wie bereits Hattie in seiner Studie deutlich herausgearbeitet hat. Guter Unterricht kann durch den Einsatz des Computers besser werden, schlechter Unterricht kann aber auch schlechter werden. Der Computer selbst macht zunächst einmal gar nichts. Jeder kann nur selbst lernen, das kann ihm niemand abnehmen. Wenn also der digitale Ausbau der Schulen erfolgreich sein soll, müssen die Lehr- und Lernprozesse

Fortsetzung auf Seite 2

neu gedacht und neu gestaltet werden. „Wer aber Digitalisierung so versteht, dass alles nur noch digital gehen soll, begeht einen folgenschweren Fehler. Wir müssen uns immer wieder neu überlegen: Was sollen Schüler noch per Hand können und tun und was nicht (mehr)? Das ist der Kern der Digitalität in der Schule.“[1]
Im Mathematikunterricht kann auf digitale Werkzeuge und digitale Medien zurückgegriffen werden. Werkzeuge sind Hilfsmittel, die die Arbeit erleichtern und Lernaktivitäten ermöglichen bzw. unterstützen.[2] Hiermit sind insbesondere systematische Variation und dynamische Visualisierung gemeint. Bewährt haben sich dabei GTR, z.B. Casio FX-CG50, CAS-Rechner wie der Casio ClassPad und Mathematiksoftware wie Dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulation, Funktionenplotter, Statistiksoftware usw. Häufig findet man diese Module inzwischen in Multirepräsentationssystemen wie ClassPad oder GeoGebra. Digitale Medien dagegen sind Träger oder Übermittler von Informationen. Dies können Lernvideos, Podcast-Beiträge oder Lernumgebungen sein, die den Lernenden zum Erarbeiten oder Üben z.B. in Form von Moodle-Kursen zur Verfügung gestellt werden. Neue Medien sind solche Lernumgebungen nur insofern, als sie den bereits in den 70er-Jahren des vergangenen Jahrhunderts weit verbreiteten programmierten Unterrichten in digitaler Form neu präsentieren und mit neuen Möglichkeiten der Individualisierung des Lernens und des Feedbacks anreichern.

Ab September 2021 startet nun auch Casio mit einer Lernsoftware für Mathematik: ClassPad Learning basiert auf der Lernplattform „Kikora“, einem Anbieter von Lernsoftware in Norwegen, einem Land, das in Europa zu den Spitzenreitern bei Lernstandserhebungen im MINT-Bereich gehört. Die Aufgaben sind an die deutschen Lehrpläne angepasst und decken alle Jahrgangsstufen von der Grundschule bis zum Abitur ab. Die Lernplattform arbeitet browserbasiert und funktioniert daher plattformunabhängig auf allen Smartphones, Tablets, Notebooks und PCs. Eine hohe Datensicherheit gemäß DSGVO ist ebenso selbstverständlich wie die Speicherung auf deutschen Servern. Ferner besitzt ClassPad Learning eine Schnittstelle, über die es die Klassenverwaltung aller gängigen Lernmanagementsysteme wie iServ, Moodle usw. übernehmen kann.

ClassPad Learning bietet eine Reihe interessanter Möglichkeiten, die den Lernprozess unterstützen. Entdeckendes Lernen ist ebenso möglich wie das Training der Problemlösekompetenz. Schwerpunkt ist das Üben, welches auf drei Niveaustufen differenziert stattfindet, die der Lehrer individuell jedem einzelnen Schüler zuordnen kann. Die Software ist für das eigenständige Lernen gemacht, sodass die Lernenden während der Übungen schrittweise Rückmeldungen erhalten und gestufte Lernhilfen abrufen können. Lehrkräfte erhalten eine detaillierte Übersicht zu den Lernständen der einzelnen Schülerinnen und Schüler und haben so die Möglichkeit, individuell auf deren Schwächen und Stärken einzugehen. Dass ClassPad Learning auch im Präsenzunterricht sinnvoll genutzt werden kann, zeigt eine Diskussionsoption, die bei allen Lerneinheiten zum Austausch innerhalb der Lerngruppe anregt. Hierbei handelt es sich um Aufgaben, die nicht automatisch ausgewertet werden, sondern deren Ergebnisse gesammelt und zur Diskussion bereitgestellt werden.

Erste Erfahrungen

Im Frühsommer 2021 hatte ich Gelegenheit, Einblick zu nehmen in eine Vorversion von ClassPad Learning. Zu diesem Zeitpunkt konnte ich mir zum Aufgabenbestand der Oberstufe noch keinen Eindruck machen. Implementiert waren bereits Aufgabenmodule für die Sekundarstufe I und das Klassenmanagementsystem. Somit war es möglich, erste Erfahrungen zu sammeln und darüber zu berichten.

Die Bedienung ist erfreulich einfach und selbsterklärend. Selbst mathematische Eingaben erfordern keine spezielle „Sprache“, da das zugrunde liegende Mathematik-Tool GeoGebra ist, das als allgemein bekannt vorausgesetzt werden kann. Für die Nutzer gibt es Hinweise zur Bedienung. Ein Highlight ist die implementierte Programmiersprache PYTHON.

Eine Klasse einrichten

Um mit Kikora / ClassPad Learning arbeiten zu können, muss zunächst eine Klasse/ Lerngruppe eingerichtet werden. Dies gelingt über das übersichtliche und selbsterklärende Menü problemlos. Ein zeitraubendes Erfassen der Namen aller Schülerinnen und Schüler ist nicht erforderlich, da sie sich mithilfe eines geteilten Links selbst einschreiben und automatisch Mitglied der Klasse werden (Abbildung 1).

Abb. 1: Einschreiben mit geteiltem Link

Bequem wird auch die Alternative sein, Klassen aus dem schulischen Lernmanagementsystem automatisch zu übernehmen. Diese Option wird voraussichtlich ab 2022 zur Verfügung stehen.

Am Beispiel „Satz des Pythagoras“ soll dargestellt werden, wie eine Lerneinheit der Lerngruppe zugeteilt wird und welche Möglichkeiten Schüler und Lehrkräfte beim Lernen und Auswerten haben (Abb. 2).

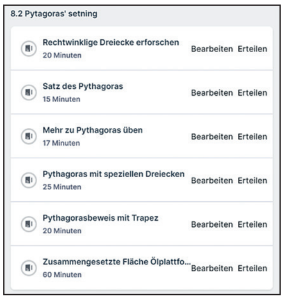


Abb. 2: Module der Lerneinheit Pythagoras

Aufgaben zuweisen

Ein Lernmodul kann einer Klasse sofort als Ganzes zugewiesen werden (Erteilen) oder nach Auswahl von einzelnen Aufgaben aus dem Modul (Bearbeiten), wenn etwa das Modul zu umfangreich erscheint oder ein Fokus auf einzelne Aufgabentypen gesetzt werden soll. Wählt der Lehrer „Erteilen“, so öffnet sich ein umfangreiches Untermenü, das eine sehr individuelle Zuweisung der Aufgaben ermöglicht.

Abb. 3: Menü zur Zuweisung eines Moduls

Das Modul kann nicht nur einer ganzen Klasse, sondern auch nur einzelnen Schülerinnen und Schülern zugewiesen werden. Dies kann der individuellen Förderung genauso dienen wie einem gezielten Nacharbeiten eines Lernstoffs. Wird das Modul als Hausaufgabe eingesetzt, kann ein Abgabedatum eingestellt werden. Es folgen modulabhängig verschiedene Schalter, z.B.: Sollen die Schüler auf Lernhinweise und Lösungsschritte zugreifen können? Dies ist für das selbstständige Arbeiten wichtig und sinnvoll. Soll die Aufgabe für die Diskussionsphase eingeschlossen sein? Diese Option bietet sich an, wenn im Unterrichtsgespräch über eine Aufgabe diskutiert werden soll, da verschiedene Antworten innerhalb der Lerngruppe zu erwarten sind. Bei diesem Aufgabentyp erhalten die Schüler keine direkte Rückmeldung. Ihre Lösung geht in ein Abstimmungsergebnis ein. Ein Beispiel für eine solche Aufgabe zeigt Abbildung 4.

[1] Elschenbroich, H.-J., Digitalisierung oder Digitalität? In: NMU Journal 5/2019, S. 256-257
[2] Elschenbroich, H.-J., Digitale Werkzeuge und Medien im Mathematikunterricht. In: Elschenbroich, H.-J. & Greefrath, G. (Hrsg.), Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen, 2011, S. 8-10

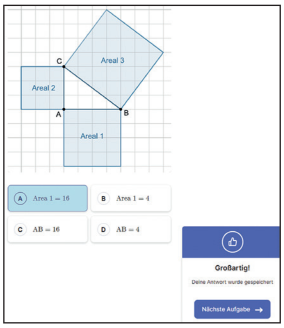


Abb. 4: Eine Abstimmungsaufgabe

Bearbeitung des Aufgabenmoduls durch die Lernenden

Das Modul „Satz des Pythagoras" beginnt mit einer Einführung. Dabei werden sehr unterschiedliche Aufgabenformate verwendet, die ein intelligentes Üben ermöglichen, z.B. Berechnungsaufgaben, Multiple-Choice-Aufgaben, Variation geometrischer Objekte. Nach Lösung einer Aufgabe erfolgt eine unmittelbare Rückmeldung wie in Abbildung 5 oder durch einen gewonnenen Pokal bei richtiger Antwort. „Pokale sammeln" soll im Sinne von Gamification die Motivation fördern.

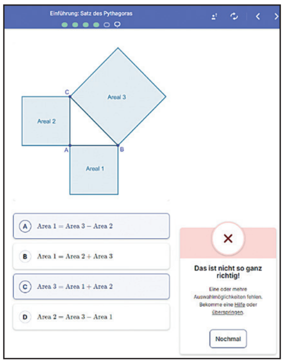


Abb. 5: Eine richtige Lösung wurde nicht gefunden

Nach Beendigung der Einführung erhalten alle eine abschließende Bewertung und Links zu weiterführenden Übungen auf zwei Niveaustufen (Abbildung 6). Je nach Modul bietet ClassPad Learning bis zu drei Niveaustufen an.

Abb. 6: Differenzierung

Die anschließenden Übungsaufgaben dienen der Vertiefung des Stoffs. Dabei werden die Lernenden nicht allein gelassen. Abbildung 7 zeigt eine Aufgabe, bei der sie neben einem grundsätzlichen Hinweis bis zu drei Hilfen zum Finden der Lösung bekommen können.

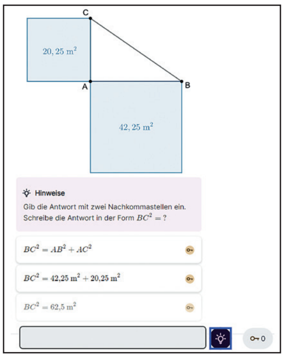


Abb. 7: Alle Hilfen wurden benötigt

Nach Abschluss des Übungsmoduls gibt es einen Abschlusstest. Die Ergebnisse werden dem Lehrer übermittelt. Der Schüler erhält lediglich eine Mitteilung über die Anzahl der korrekten Lösungen und einen Ratschlag für sein weiteres Lernen (Abbildung 8).

Abb. 8: Nach dem Modul

Lernberichte

Ein mächtiges Element in ClassPad Learning ist der Lernbericht, mit dem sich die Lehrkraft jederzeit einen Überblick über den Lernstand ihrer Schülerinnen und Schüler verschaffen kann (Abbildung 9). Die Informationen können sowohl für die ganze Klasse als auch für jeden einzelnen Schüler abgerufen und zur individuellen Beratung verwendet werden. Die Lernzeit kann nach Schülern sowie nach den zugeteilten Lerneinheiten ausgewertet werden.

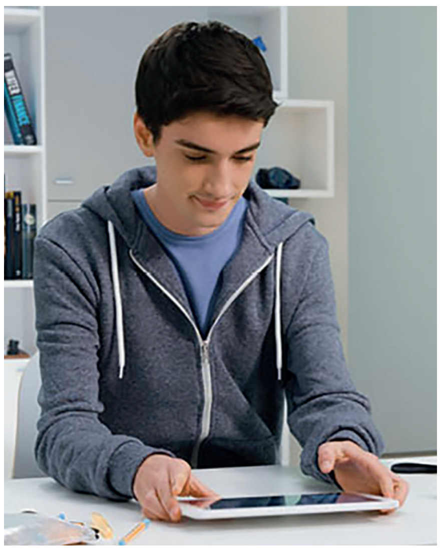
Abb. 9: Klassenbericht

Für Diagnose und weitere Förderung wichtiger sind die Lernberichte. Hier kann der Lehrer sich genau ansehen, welche Aufgaben Schwierigkeiten bereitet haben, was gut gekonnt wurde und wo ein Gespräch oder zusätzliches Aufgabenmaterial zur Förderung nötig sind. Einen solchen ausführlichen Lernbericht zeigt Abbildung 10; hier bereitete offenbar Aufgabe 6.1a Probleme, die zunächst zweimal falsch und dann nach einer Hilfe korrekt gelöst wurde. Auf diese Aufgabe wird vom System ausdrücklich hingewiesen.

Abb. 10: Ein individueller Lernbericht

Fazit:

ClassPad Learning ist eine interessante Lernumgebung, die gut in die Zeit passt. In den Monaten mit Homeschooling und Wechselunterricht wurde die Digitalisierung in den Schulen vorangebracht, Schüler wurden mit digitalen Endgeräten ausgestattet und individuelles Lernen mit digitalen Werkzeugen wurde in den Fokus genommen. Da ClassPad Learning in der Vollversion alle Schularten von der Grundschule bis hin zum Abitur abdecken soll, kann in jeder Unterrichtssituation – auch im Präsenzunterricht – Mathematik effizient gelernt werden und niemand muss auf Feedback und Lerntipps verzichten.



Mut zu Matrizen – ein Zugang zu Matrizen und linearen Gleichungssystemen

Autorin: Antje Franke-Börner, Freiberg-Colleg, Freiberg

1 Einführung – Seismische Geschwindigkeiten

Erdbeben gehören zu den größten Naturkatastrophen, die in einigen Regionen der Erde das Leben vieler Menschen bedrohen können. Ausgehend von einem Erdbebenherd in der Tiefe breiten sich seismische (mechanische) Wellen aus, die bei der Ankunft an der Erdoberfläche zerstörerische Wirkung entfalten können. Auf ihrem Weg durchlaufen die Wellen verschiedene Arten von Gesteinen, die jeweils eine charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeit aufweisen. Die Definition der physikalischen Größe Geschwindigkeit v als Quotient aus zurückgelegtem Weg Δs und der dafür benötigten Zeit Δt

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

bildet die Grundlage, um Erdbebenherde zu orten und Informationen über die Struktur der Erdkruste zu erhalten. Dabei werden umfangreiche Datensätze mithilfe der Lösung großer linearer Gleichungssysteme ausgewertet. So entstehen Modelle der Erdkruste mit seismischen Geschwindigkeiten (vgl. Abb. 1 für das Küstengebiet von Costa Rica). Eine starke Vereinfachung dieser Situation eignet sich hervorragend, um in der Sekundarstufe 2 das Rechnen mit Matrizen anschaulich und plausibel einzuführen.

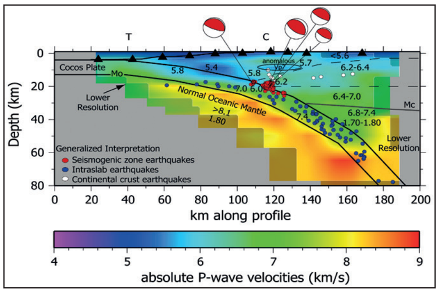


Abb. 1: Modell der Erdkruste an der Küste Costa Ricas. Farbig codiert ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der zuerst ankommenden Longitudinalwelle (Primärwelle). Unterschieden wird zwischen Erdbebenherden an den Plattengrenzen (rote Punkte) und innerhalb der abtauchenden Platte (blaue Punkte). Zu ausgewählten Herden wird im oberen Teil der Abbildung die Verteilung von Druck- und Zugkräften gezeigt. Bildquelle: http://faculty.smu.edu/hdeshon/research.html

2 Vereinfachung – Modell seismischer Geschwindigkeiten

Für den Unterricht eignet sich ein vereinfachtes Modell wie in Abb. 2. Wenn die Kästchen fortlaufend von links nach rechts und oben nach unten nummeriert werden, befinden sich in der ersten Zeile die Zellen mit den Nummern 1 bis 10, in der zweiten Zeile die mit den Nummern 11 bis 20 usw. Den Zellen werden jeweils die Geschwindigkeiten v_j mit der Zellennummer j zugeordnet, also v_1 bis v_{10} in der ersten Zeile, v_{11} bis v_{20} in der zweiten Zeile usw. Damit ergeben sich die Gesamtlaufzeiten der Wellen auf den eingezeichneten Wegen mit der Nummer i vom Erdbebenherd bis zum Empfänger als die Summe der einzelnen Laufzeiten in den durchlaufenen Zellen folgendermaßen:

$$t_1 = s_{1,22} \cdot \frac{1}{v_{22}} + s_{1,12} \cdot \frac{1}{v_{12}} + s_{1,2} \cdot \frac{1}{v_2}$$

$$t_2 = s_{2,22} \cdot \frac{1}{v_{22}} + s_{2,23} \cdot \frac{1}{v_{23}} + s_{2,13} \cdot \frac{1}{v_{13}} + s_{2,14} \cdot \frac{1}{v_{14}} + s_{2,4} \cdot \frac{1}{v_4}$$

$$t_3 = s_{2,22} \cdot \frac{1}{v_{22}} + s_{2,23} \cdot \frac{1}{v_{23}} + s_{2,14} \cdot \frac{1}{v_{14}} + s_{2,15} \cdot \frac{1}{v_{15}} + s_{2,5} \cdot \frac{1}{v_5} + s_{2,6} \cdot \frac{1}{v_6}$$

Es ist üblich, statt der reziproken Geschwindigkeit die Slowness k zu benutzen. Mit $j = \frac{1}{v_j}$ ergibt sich:

$$t_1 = s_{1,22} \cdot k_{22} + s_{1,12} \cdot k_{12} + s_{1,2} \cdot k_2$$
$$t_2 = s_{1,22} \cdot k_{22} + s_{1,12} \cdot k_{12} + s_{1,2} \cdot k_2$$
$$t_3 = s_{2,22} \cdot k_{22} + s_{2,23} \cdot k_{23} + s_{2,14} \cdot k_{14} + s_{2,15} \cdot k_{15} + s_{2,5} \cdot k_5 + s_{2,6} \cdot k_6$$

Dieses System linearer Gleichungen lässt sich kurz aufschreiben als $\mathbf{S}\vec{k} = \vec{t}$ mit

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{m,1} & s_{m,2} & \dots & s_{m,n} \end{pmatrix}, \ \vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}, \ \vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{S}$ lässt sich dabei als Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten einführen. Die Elemente der Matrix sind die Längen der Wege des i-ten Wellenweges $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$ in der j-ten Zelle $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Sie wird daher auch als Weglängenmatrix bezeichnet. Die Spaltenvektoren $\vec{t}$ und $\vec{k}$ heißen Laufzeit- bzw. Slownessvektor. m ist die Anzahl der betrachteten Wellenwege bzw. Empfänger, n die Anzahl der Zellen. Die Behandlung dieses Gleichungssystems hat das Ziel, k_j bzw. v_j zu bestimmen und damit Strukturaussagen zum Aufbau der Erde zu treffen.

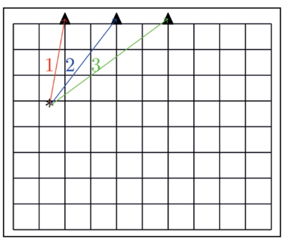


Abb. 2: Einfaches Modell mit dem Erdbebenherd (*), Empfängern (▲) für seismische Wellen an der Erdoberfläche und 3 exemplarisch als Strecken eingetragenen Wellenwegen.

3 Im Unterricht

Als Einstieg in die Unterrichtssequenz bieten sich eine Zusammenstellung von Pressemeldungen über aktuelle Erdbeben und entsprechendes Filmmaterial beispielsweise auf YouTube an. Eine Erläuterung der geophysikalischen Zusammenhänge bis zur Einführung des linearen Gleichungssystems mit seinen Bestandteilen ist sinnvoll. Danach gilt es, einige grundlegende Begriffe zu Matrizen zu klären. Hierbei hilft die Tabelle Arbeitsblatt Matrizen – Begriffe, Typen, Eigenschaften, die beispielsweise im Rahmen einer Gruppenarbeit als Puzzle zusammengesetzt werden kann. In den folgenden Stunden können mithilfe der entsprechenden Arbeitsblätter Erarbeitungsphasen zur Matrix-Vektor-Multiplikation, Matrix-Matrix-Multiplikation und Lösung linearer Gleichungssysteme gestaltet werden. Dabei wird ein Modell aus nur vier Teilgebieten mit vier Wellenwegen betrachtet (vgl. Abb. 3). An jede Erarbeitungsphase sollten sich Übungsaufgaben zur entsprechenden Rechenoperation anschließen.

Als weitere Anwendung der Matrizenrechnung bietet es sich an, die Wirkung von Rotationsmatrizen zu untersuchen. Zusätzlich lassen sich die Addition von Matrizen als Verschiebung und die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar als Streckung/Stauchung geometrischer Figuren erläutern.

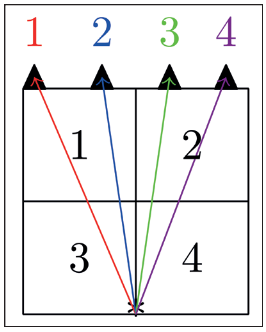


Abb. 3: Modell aus vier Teilgebieten. Es werden Laufzeiten für vier Wellenwege betrachtet.

Finden Sie die zugehörigen Arbeitsblätter in der Materialdatenbank.

Aufgabenbeispiel

Berechnung von Konfidenzintervallen (FX-87DE Plus 2nd edition und FX-87DEX)

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

Der Einsatz der Taschenrechner FX-87DE Plus 2nd edition oder FX-87DEX CLASSWIZ bei der Ermittlung von Konfidenzintervallen wird an folgender Aufgabe demonstriert:

Bei einer Kontrolle wurde festgestellt, dass von 548 Fahrern nur 411 den Sicherheitsgurt anlegten. Bestimmen Sie das Vertrauensintervall, in dem mit 90 % Sicherheit der Anteil derjenigen unter allen Autofahrern liegt, die sich anschnallen.

Der Aufgabe wird entnommen:
$n = 548$; $h = \frac{411}{548}$ und $\beta = 0{,}90$.

Wenn bei einer Bernoullikette der Länge n die relative Häufigkeit h beobachtet wird, dann werden die Grenzen des β-Vertrauensintervalls $I = [p_1; p_2] = \{x \mid p_1 \le x \le p_2\}$ zu einer vorgegebenen Vertrauenswahrscheinlichkeit β exakt bestimmt, indem die Gleichung $|h-p| = C\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ nach p aufgelöst wird.
Dabei ist $C = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$.

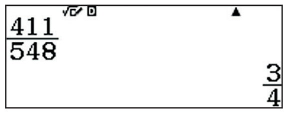
Näherungslösungen können mithilfe der Formeln
$p_1 \approx h - C\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$ und $p_1 \approx h - C\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$
ermittelt werden.

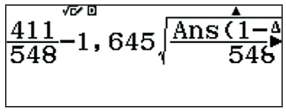
Die Ermittlung von C erfolgt im Menü Verteilungen mithilfe der inversen Normalverteilung. Für Fläche wird $(1+0{,}9) \div 2$ eingegeben, $\sigma = 1$ und $\mu = 0$ werden bestätigt, es ergibt sich $C \approx 1{,}645$, dieser Wert wird notiert. Die Lösungen der Gleichung $|h-p| = C\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ können als Lösungen einer quadratischen Gleichung berechnet werden. Das erfordert einige Umformungen, bis die Lösungsformel für quadratische Gleichungen zur Anwendung kommen kann. Weniger aufwendig wird es, wenn die Lösungen der Gleichung mittels Iteration ermittelt werden.
Für $h \ge p$ ergibt sich $p = h - C\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Diese Gleichung eignet sich als Iterationsgleichung $p_{n+1} = h - C\sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}}$.

Wird ein $p_0 < h$ als Startwert gewählt, so konvergiert die Folge (p_n) gegen die untere Grenze p_1 des Vertrauensintervalls.
Wird als Iterationsgleichung $p_{n+1} = h + C\sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}}$ verwandt und ein $p_0 > h$ als Startwert gewählt, so konvergiert diese Folge (p_n) gegen die obere Grenze p_2 des Vertrauensintervalls.

Alle Eingaben erfolgen im Menü „1: Berechnungen“. Zunächst wird p_0 als $\frac{411}{548}$ eingegeben.





Anschließend wird die Iterationsgleichung mithilfe von [Ans] eingetippt. Fortgesetztes Betätigen der Taste [=] zeigt, dass die Folge konvergiert mit dem Grenzwert $\approx 0{,}7184$.
Wird in dem zuletzt eingegebenen Term das Minus zu Plus geändert, erkennt man durch wiederholtes Betätigen der Taste [=], dass die obere Grenze des Vertrauensintervalls $\approx 0{,}7791$ beträgt. Damit ist $[0{,}72; 0{,}78]$ das 90 %-Vertrauensintervall.

Die Berechnung der Grenzen des Vertrauensintervalls mithilfe der Näherungsformeln gestaltet sich günstig, wenn zunächst $h = \frac{411}{548}$ gespeichert wird, z. B. in Speicher A.

Mit $A - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{A(1-A)}{548}}$ und $A + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{A(1-A)}{548}}$ ergeben sich die untere bzw. obere Grenze des Vertrauensintervalls zu $0{,}7186$ bzw. $0{,}7804$.

Rätselecke

„Schwer ist leicht was“ (Karl Valentin)

Autor: Gerhard Glas, Wöhlerschule Frankfurt

Das folgende Kokosnuss-Problem hat Martin Gardner als das am meisten bedachte, aber auch als das am häufigsten falsch gelöste Problem bezeichnet. Es ist ein schönes Beispiel für die Methode des Rückwärtsarbeitens. Außerdem hilft hier ein Taschencomputer bei der Lösung des Gleichungssystems ganz erheblich. Die Aufgabe geht auf eine Kurzgeschichte von Ben A. Williams zurück, die 1926 in der *Saturday Evening Post* veröffentlicht wurde.

Drei Männer und ein Affe kamen nach einem Schiffbruch auf eine einsame Insel. Sofort fingen sie an, die reichlich vorhandenen Kokosnüsse als Nahrung zu sammeln. Am nächsten Tag sollten sie verteilt werden. In der Nacht wachte einer auf. Da er dachte, dass am nächsten Morgen die Nüsse ohnehin verteilt würden, beschloss er, sich seinen Anteil gleich zu sichern. Er teilte die Kokosnüsse in drei gleiche Haufen. Eine blieb dabei übrig, die gab er dem Affen. Dann versteckte er seinen Anteil, legte die übrigen auf einen Haufen und schlief weiter.

So erging es auch den beiden anderen. Nach und nach wachten sie auf und handelten ebenso wie der Erste. Immer blieb beim Aufteilen in drei gleiche Teile eine Kokosnuss übrig, die der Affe bekam.

Am nächsten Morgen wurden die noch verbliebenen Kokosnüsse unter den drei Männern verteilt. Es ergaben sich erneut drei gleiche Teile sowie eine Kokosnuss für den Affen. Natürlich wusste jeder, dass Nüsse fehlten. Aber alle waren gleichermaßen schuldig und sagten deswegen kein Wort.

Wie viele Kokosnüsse waren anfangs vorhanden?

Dieses Problem gibt es in zahlreichen Varianten, es wurde in vielen Kulturen überliefert. Schon in indischen und sehr alten chinesischen Dokumenten ist es zu finden.

Aufgabenbeispiel

Parabeln in Normalform – Lösen quadratischer Gleichungen durch Faktorisieren

Autor: Manuel García Mateos, Gymnasium am Steinwald, Neunkirchen

Das Lösen einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ ist für Schüler häufig eine schwierige Angelegenheit, wenn auch kognitiv nicht sehr anspruchsvoll. Im Laufe des Schullebens lernen sie mehrere Möglichkeiten hierfür kennen. Häufig wird die *quadratische Ergänzung* verwendet, das Aufsuchen eines Binoms. Hieraus wird dann die sogenannte *p-q-Formel* als allgemeine Lösung für solche Gleichungen hergeleitet. In manchen Fällen wird auch der *Satz von Vieta* verwendet, das Zerlegen des quadratischen Terms in Linearfaktoren (*Faktorisierung*). Dieses Verfahren ist oft sehr schnell, erfordert aber das „scharfe Hinsehen“, das Nachdenken. Leider ist es nur bei wenigen Gleichungen praktikabel.

Ein CAS hilft beim Entdecken der Zusammenhänge und schafft auch in diesem Fall Verbindungen zwischen Algebra und Geometrie. Im Endeffekt führt auch dieses Verfahren zur *p-q-Formel*, es liefert aber eine geometrische Deutung.

Das Verfahren

Betrachtet wird eine Parabel in Normalform: $y = x^2 + px + q$. Wie viele Nullstellen hat eine solche Parabel? Wie werden diese bestimmt?

Im Unterricht wird den Schülern empfohlen, sich die Parabelgleichung genau anzusehen, vielleicht hilft eine Faktorisierung bei der Nullstellenberechnung rasch weiter.

Die Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ wird gelöst durch Suchen zweier Zahlen x_1, x_2, die multipliziert $+3$ und addiert -4 ergeben. Das klappt mit $x_1 = -1$ und $x_2 = -3$. Daher die faktorisierte Form der Gleichung: $(x-1)(x-3) = 0$. Die Nullstellen sind daher $+1$ und $+3$. Die Scheitelstelle der Parabel liegt bei $x_S = 2$. Auch eine quadratische Ergänzung hätte durchgeführt werden können.

Das CAS liefert die allgemeine Lösung der Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ als Formel. Für konkrete Zahlen p und q kann die Lösung leicht berechnet werden. Die Gleichung kann auch grafisch gelöst werden, indem der Funktionsterm $x^2 - 4x + 3$ in das Grafikfenster gezogen und dort die Lösung angeschaut wird. Das CAS kann den Funktionsterm auch faktorisiert angeben!

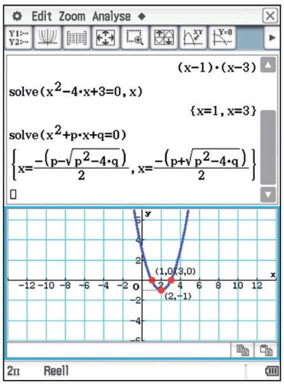


Abb. 1: Rechnerische und grafische Lösung der Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ und der allgemeinen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Durch eine kleine Veränderung der Gleichung wird es mit der Faktorisierung nicht mehr so leicht. Zum Beispiel die Gleichung $x^2 - 4x - 6 = 0$. Sie muss zwei Lösungen besitzen, weil diese Parabel $y_2 = x^2 - 4x - 6 = (x^2 - 4x + 3) - 9 = y_1 - 9$ der zuletzt betrachteten $y_1 = x^2 - 4x + 3$ entspricht, nur um 9 Einheiten nach unten verschoben. Das Vorgehen mit der Anweisung *„Suche zwei Zahlen, die …“* hilft nicht, weil es solche zwei ganzen Zahlen nicht gibt. Ein CAS kann den Term $x^2 - 4x - 6$ mithilfe des rFactor-Befehls trotzdem faktorisieren.

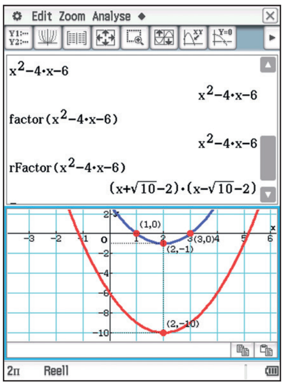


Abb. 2: Lösung der Gleichung $x^2 - 4x - 6 = 0$ mithilfe des rFactor-Befehls und grafisch

Wird die allgemeine Funktionsgleichung $y = x^2 + p \cdot x + q$ eingegeben, so ist es möglich, den Parabelverlauf dynamisch in Abhängigkeit von p und q darzustellen, mithilfe der Schieberegler das Verhalten der Parabel zu beobachten.

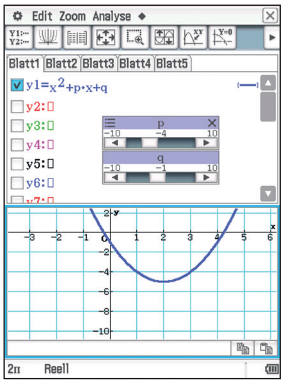


Abb. 3: Dynamische Darstellung der Normalform $y = x^2 + px + q$

Dabei liegt die Scheitelstelle x_S immer bei $-\frac{p}{2}$ und die Nullstellen der Parabel sind von der Scheitelstelle gleich weit entfernt. Damit ist die eine Nullstelle der Parabel bei $x_1 = -\frac{p}{2} - u$ und die andere bei $x_2 = -\frac{p}{2} + u$, falls sie reell sind.

Das bedeutet für die Nullstellen x_1 und x_2 einer allgemeinen Parabel:

mit $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{p}{2} - u$ und $x_2 = -\frac{p}{2} + u$

$$\Leftrightarrow \left(x - \left(-\tfrac{p}{2} - u\right)\right)\left(x - \left(-\tfrac{p}{2} + u\right)\right) = \left(x + \left(\tfrac{p}{2} + u\right)\right)\left(x + \left(\tfrac{p}{2} - u\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - u^2\right) = x^2 - 4x - 6$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $p = -4$ und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - u^2 = -6$.

Die Scheitelstelle liegt daher bei $x_S = -\frac{p}{2} = 2$. Einsetzen von p in die zweite Gleichung liefert $4 - u^2 = -6 \Leftrightarrow u^2 = 10$. Daraus folgt die faktorisierte Form $\left(x - \left(2 + \sqrt{10}\right)\right)\left(x - \left(2 - \sqrt{10}\right)\right) = 0$.

$\sqrt{10}$ ist gerade der Abstand der Scheitelstelle $x_S = 2$ zu den beiden Nullstellen $x_1 = 2 + \sqrt{10}$ und $x_2 = 2 - \sqrt{10}$.

Geht das auch mit der Gleichung $x^2 + 4x + 5 = 0$?

Ein analoges Vorgehen liefert mit $p = +4$ die Scheitelstelle bei $x_S = -\frac{p}{2} = -2$. Aus $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - u^2 = 5$ folgt $4 - u^2 = 5$ und hieraus $u^2 = -1 \Leftrightarrow u^2 + 1 = 0$, da dies keine dritte binomische Formel ist, folgt das Fehlen von Nullstellen im Reellen. Nur im Komplexen gelingt es: $(x - (-2 - i))(x - (-2 + i)) = 0$.

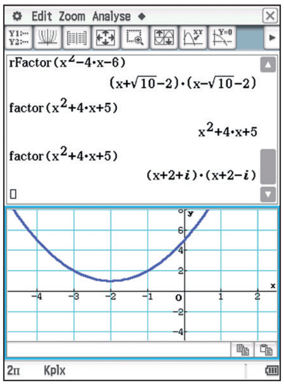


Abb. 4: Lösung der Gleichung $x^2 + 4x + 5 = 0$ durch Faktorisierung im Komplexen

Um eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ zu lösen, muss die Scheitelstelle $x_S = -\frac{p}{2}$ bestimmt werden. Dann wird die Gleichung $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - u^2 = q$ nach u gelöst. Die Lösungen lauten

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ bzw. $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Der Term $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ beschreibt den Abstand der Nullstellen von der Scheitelstelle x_S.

Mit diesen Überlegungen wurde erneut die *p-q-Formel* hergeleitet. Dabei wurde die Faktorisierung und die Symmetrie der Nullstellen zur Scheitelstelle ausgenutzt, dafür auf die Scheitelpunktform und die quadratische Ergänzung verzichtet.

Die Anzahl der Lösungen

Unter welchen Bedingungen hat die Normalparabel zwei, eine oder keine Nullstelle? Das führt auf die Frage, wie viele Lösungen in u hat die Gleichung $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - u^2 = q$?

Wenn $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ ist, dann gibt es nur eine Lösung, denn dann ist $u^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Es ist dann $\left(x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 = 0$.

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = u^2 > 0$, dann gibt es zwei Lösungen $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{u^2}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{u^2}$. Das liefert auch die *p-q-Formel*, ohne die quadratische Ergänzung zu bemühen.

Aus $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = u^2 < 0$ folgt, dass es keine reelle Lösung geben kann, da in R alle Quadratzahlen positiv sind. Die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = u^2$ ist der quadrierte Abstand zwischen Scheitelstelle und Nullstelle. Sie hat somit auch eine geometrische Bedeutung, nicht nur eine rechnerische als „Unterscheider“ – discriminare (lat.: unterscheiden); ihr Wert unterscheidet die Anzahl der Nullstellen!

Eine grafische Darstellung von q gegen p veranschaulicht, dass es genau eine Lösung der quadratischen Gleichung gibt, wenn der Punkt $(p|q)$ auf der Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$ liegt. Ist hingegen $q > \frac{1}{4}p^2$, der Punkt $(p|q)$ oberhalb des Graphen von $y = \frac{1}{4}x^2$, gibt es keine reellen Lösungen der quadratischen Gleichung. In der „Mehrzahl“ der Fälle gibt es zwei Nullstellen der Parabel. Für alle $q < 0$ hat die Gleichung zwei Lösungen – dann liegt $(p|q)$ in der unteren Halbebene!

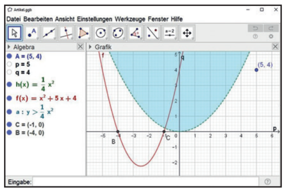


Abb. 5: Abhängigkeit der Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ von den Parameterwerten p und q

Fazit

Die Faktorisierung ist zur Lösung von quadratischen Gleichungen nicht nur in Spezialfällen nützlich. Sie ist verständnisfördernd, weil sie den geometrischen Zusammenhang zwischen den Nullstellen einer Parabel und ihrem Scheitel ausnutzt. Sie liefert auch ein gutes Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen.

Interview

Erfahrungen aus dem Mathe-Marathon

Silke Bauer: Friedensschule Plauen / Oberschule

Frau Bauer hat mit ihrer Klasse 7a am Mathe-Marathon teilgenommen und in diesem Rahmen ClassPad Learning, die neue Lern- und Übungssoftware für Mathematik von CASIO, getestet. Im Interview mit Tom Herwig, Educational Representative bei CASIO, berichtet sie von den Erfahrungen.

Herwig: Frau Bauer, Sie haben mit Ihrer Schule einen unserer Hauptpreise gewonnen. Herzlichen Glückwunsch! Als Sie vom Mathe-Marathon erfahren haben, was hat Sie dazu bewogen mitzumachen?

Bauer: Der Mathe-Marathon war zunächst eine willkommene Abwechslung zum Homeschooling, das im Vogtland bis Mitte Mai auf der Tagesordnung stand. Andererseits sind wir immer auf der Suche nach neuen innovativen Unterrichtsideen, um die Schüler für neue Unterrichtsinhalte zu begeistern. Der Mathe-Marathon war für meine Klasse 7a die perfekte Lösung, um wieder etwas Schwung in den Unterrichtsalltag zu bringen.

Herwig: Wie haben Sie Ihre Schülerinnen und Schüler dazu motiviert mitzumachen? Waren es nur die zu erwartenden Preise, oder gab es da noch eine andere Motivation?

Bauer: Natürlich waren die Schüler heiß darauf, einen der begehrten Preise zu gewinnen. Wir alle waren uns einig, dass jeder Schüler mindestens 1 Los gewinnen kann und damit einen Beitrag für die Teamwertung leistet. Als zusätzliche Motivation wurde von der Mathematiklehrerin eine positive Bewertung in Aussicht gestellt. Für 1 Level gab es die Note 3, für 3 Level die Note 1.

Herwig: Die Schülerinnen und Schüler konnten sich den Schwierigkeitsgrad selber auswählen. Waren auch einige dabei, die den harten Weg gegangen sind?

Bauer: Die meisten haben mit Level 1 begonnen, um zunächst das Los fürs Team zu gewinnen. Es gab in der Klasse 8 Schülerinnen und Schüler, die 3 Level und mehr erreicht haben. Absolute Spitze waren Lea mit 4 und Justin mit allen 5 Stufen.

Herwig: Haben Sie auch Schülerinnen und Schüler motivieren können, für die Mathe nicht gerade das Lieblingsfach ist?

Bauer: Das ist uns auf jeden Fall gelungen. Die Schüler haben schnell gemerkt, dass die abwechslungsreichen Aufgaben gut zu meistern sind und Hilfen genutzt werden können. Alle zwei Tage habe ich die Zwischenstände innerhalb der Klasse bekannt gegeben und es entbrannte ein regelrechter Wettlauf. Niemand wollte am Tabellenende stehen. Vielen Dank für die übersichtlichen Statistiken.

Herwig: Der Mathe-Marathon basiert auf unserer Lernsoftware ClassPad Learning. Wie sehen Sie den Bedarf an interaktiver Lernsoftware in der nahen Zukunft?

Bauer: Im Augenblick hinken viele Schulen der Digitalisierung noch sehr hinterher und demzufolge gibt es auch wenig Erfahrung mit interaktiver Lernsoftware. In der Vorbereitung auf das neue Schuljahr wird sich die Fachschaft Mathematik mit der Thematik auseinandersetzen.

Herwig: Und zum Abschluss: Sind Sie nächstes Jahr wieder dabei?

Bauer: Auf jeden Fall! Bereits jetzt haben weitere Klassen unserer Schule Interesse bekundet beim Mathe-Marathon 2022 mitzumachen.

Vielen Dank an alle Beteiligten für diese tolle Challenge. Ein absolut gelungenes Projekt. Weiter so! Liebe Grüße aus Plauen senden Frau Bauer und die Klasse 7a.

Lineare Regression aus geometrischer Perspektive

Autoren: Manuel García Mateos, Gymnasium am Steinwald, Neunkirchen und
Michael Bostelmann, Fachleiter Mathematik Rheinland-Pfalz

1 Lineare Regression – Problemstellung und Methode der kleinsten Quadrate

Bei der linearen Regression, wie sie in den Lehrplänen einiger Bundesländer aufgeführt wird, geht es darum, eine gegebene Anzahl von n Messpunkten (x_i, y_i) durch eine lineare Funktion f mit $f(x) = mx + b$ derart anzupassen, dass die Gerade die Messpunkte möglichst gut beschreibt. Als Kriterium für die Güte „möglichst gut" wird in der Regel verwendet, dass die Summe der quadratischen Abweichungen der gemessenen y-Werte von den theoretischen, berechneten y-Werten minimal sein soll *(Methode der kleinsten Quadrate)*. Es gilt also

$SSE(m, b) := \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2$
$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - (m \cdot x_i + b))^2 \rightarrow$ *minimal*.

SSE steht dabei für *sum of squared errors* und ist abhängig von den Parametern m und b. Die Parameter m und b der linearen Funktion f sind derart zu bestimmen, dass SSE minimal wird.

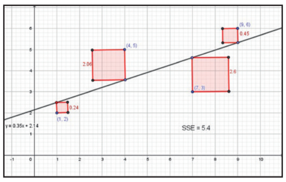


Abb. 1: Lineare Regression und Fehlerquadrate für die Messpunkte (1|2), (4|5), (7|3) und (9|6)

Die in der Abbildung dargestellten „Fehlerquadrate" beschreiben die quadratischen Abweichungen zwischen den gemessenen und den theoretischen y-Werten. Es sind jedoch keine „Abstandsquadrate", denn der geometrische Abstand ist nicht gleichzusetzen mit der vertikalen Abweichung.

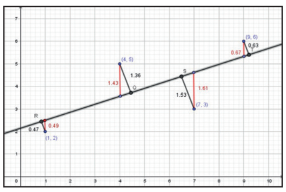


Abb. 2: Vertikale Abweichungen im Vergleich zum orthogonalen Abstand

Bei der *vertikalen* linearen Regression wird davon ausgegangen, dass die x-Werte fehlerfrei zu bestimmen sind und die Fehler lediglich bei der Messung der abhängigen Variable y auftreten. Wird auf die Voraussetzung, dass die x-Werte fehlerfrei sein sollen, verzichtet, dann ergibt sich eine andere Regressionsgerade. Die Bestimmung der Parameter m und b der Regressionsgerade bei der linearen vertikalen Regression lässt sich mithilfe der Differenzialrechnung als Extremwertproblem in zwei Variablen m und b durchführen. Im Folgenden soll aber eine geometrische Herangehensweise vorgestellt werden.

2 Geometrische Perspektive – Grundlegende Idee

Der Summenterm der quadratischen Abweichungen macht deutlich, dass es sich um die Summendarstellung eines Skalarproduktes eines Vektors mit sich selbst handelt. Dieses suggeriert, dass es auch eine geometrische Bedeutung und Lösung des Regressionsproblems geben könnte.
Mit den Vektoren

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

lässt sich das Regressionsproblem vektoriell formulieren:

> *Minimiere in m und b die quadratische Länge des Vektors $\vec{y} - (m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e})$, die durch $d^2(m, b) = |\vec{y} - (m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e})|^2$*
> $$= \begin{pmatrix} y_1 - (mx_1 + b \cdot 1) \\ \vdots \\ y_n - (mx_n + b \cdot 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 - (mx_1 + b \cdot 1) \\ \vdots \\ y_n - (mx_n + b \cdot 1) \end{pmatrix}$$
> $$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - (m \cdot x_i + b))^2 \text{ gegeben ist}$$

Die Summe der Abweichungsquadrate stellt die quadratische Länge eines Vektors $\vec{y} - (m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e})$ dar. Der Vektor $m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e}$ lässt sich als (Hyper-)Ebene im Raum durch den Ursprung mit den Richtungsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{e}$ interpretieren, sodass sich $|\vec{y} - (m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e})|^2$ als quadrierter Abstand des Punktes P_y mit dem Ortsvektor $\vec{y}$ zu einem Punkt $P_{m,b}$ der Ebene ergibt. Gesucht werden diejenigen Parameter m_0 und b_0 – und damit derjenige Punkt $L = P_{m_0,b_0}$ der Ebene, für die der Abstand des Punktes P_y zu $P_{m,b}$ minimal wird. Das ist aber gerade die senkrechte Projektion von P_y auf die Ebene.

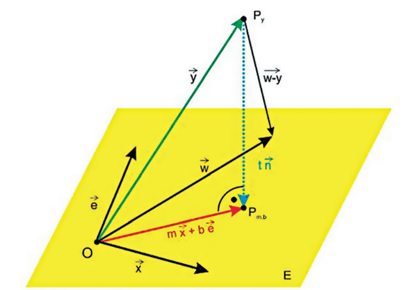


Abb. 3: Veranschaulichung des Regressionsproblems aus geometrischer Perspektive im $\mathbb{R}^3$

Die folgenden Ausführungen lassen sich auf mehr als drei Punkte ausweiten, sollen aber der Anschaulichkeit wegen mit nur drei Punkten durchgeführt werden.

3 Umsetzung an Beispielen

3.1 Umsetzung bei 3 Messpunkten (n=3)

Betrachtet werden die Punkte $A(1|0)$, $B(3|4)$ und $C(7|5)$. Hieraus ergeben sich die dreidimensionalen Vektoren

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Der Ausdruck $m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e}$ beschreibt eine Ebene durch den Ursprung $O(0|0|0)$ mit den Richtungsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{e}$. Der Punkt $P_y(0|4|5)$ liegt nun nicht in der Ebene, denn andernfalls ließe sich der Ortsvektor von P_y als Linearkombination der beiden Spannvektoren der Ebene darstellen und es wäre der Ausdruck $d^2(m, b) = |\vec{y} - (m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e})|^2 = 0$. Die drei Messpunkte würden daher auf einer Geraden mit $f(x) = mx + b$ liegen. Die Aufgabe besteht nun darin, den quadrierten Abstand des Punktes P_y zur Ebene und den Lotfußpunkt P_{m_0,b_0} auf der Ebene zu bestimmen, denn dieser hat von P_y die kürzeste Entfernung. Bei n Messpunkten ist die Vorgehensweise die gleiche: Anstatt einer Ebene und eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ ergibt sich nun jedoch eine Hyperebene durch den Ursprung, die durch die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{e}$ im $\mathbb{R}^n$ aufgespannt wird.

Folgende Schritte können zur Lösung des Problems durchgeführt werden.

1 Bestimme einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene mithilfe des Skalarprodukts.
2 Erzeuge eine Gerade g durch P_y senkrecht zur Ebene.
3 Bestimme den Schnittpunkt L der Gerade mit der Ebene z. B. durch Lösen der Gleichung $\vec{y} + r \cdot \vec{n} = m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e}$ und bestimme den quadratischen Abstand zu P_y.
4 Stelle den Lotfußpunkt P_{m_0,b_0} als Linearkombination der Spannvektoren dar.

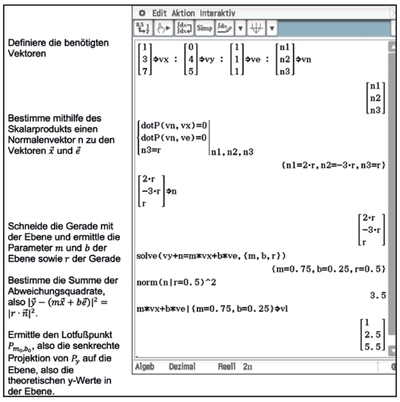


Abb. 4: Bearbeitung des Regressionsproblems

Fortsetzung: Lineare Regression aus …

Die lineare Regression der drei Messpunkte ergibt die Geradengleichung $y = 0.75x + 0.25$. Die Summe der Abweichungsquadrate beträgt $SSE(0.75{,}0.25) = 3.5$. Die zu den x-Werten gehörenden Punkte auf der Regressionsgerade lauten $(1|1)$, $(3|2.5)$, $(7|5.5)$.

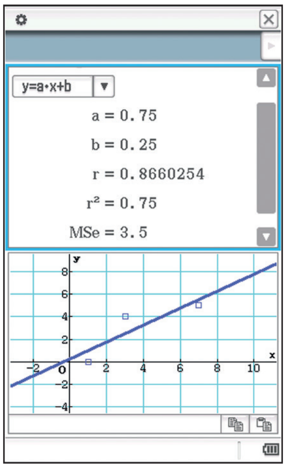


Abb. 5: Parameter der Regression aus dem Statistik-Modul des ClassPad

Anstatt SSE wird hier ein Wert MSE angezeigt, dessen Berechnung sehr eng mit der Summe der quadratischen Abweichungen zusammenhängt. Der Wert für MSE stellt einen Mittelwert der quadratischen Abweichungssumme (Mean squared sum of errors) dar, der sich berechnet gemäß $MSE(m,b) = \frac{1}{n-2}\,SSE(m,b)$, wobei n die Anzahl der Messpunkte darstellt. Daher ergibt sich im Fall $n = 3$, dass $MSE = SSE$ ist.

3.2 Umsetzung mit 4 Messpunkten (n=4)

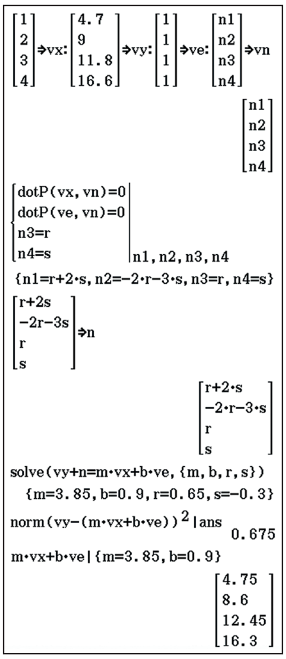
Betrachtet werden die Messpunkte $(1|4.7)$, $(2|9)$, $(3|11.8)$, $(4|16.6)$. Hieraus lassen sich zwei vierdimensionale Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ erzeugen.

Es ist:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix}4.7\\9\\11.8\\16.6\end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{y}$ ist keine Linearkombination der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{e}$ und liegt somit nicht in der von $\vec{x}$ und $\vec{e}$ erzeugten Hyperebene durch den Ursprung. Es muss der Abstand des Punktes P_y zur Hyperebene bestimmt werden. Benötigt wird dafür ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Hyperebene, dann muss die Vektorgleichung $\vec{y} + t \cdot \vec{n} = m \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{e}$ gelöst werden.

Die folgenden Screenshots zeigen den Rechenweg mithilfe des ClassPad sowie die Überprüfung der Rechnung mithilfe des Statistik-Moduls.



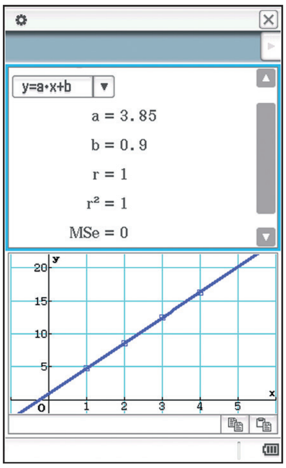


Abb. 6: Lineare Regression und Überprüfung für vier Messpunkte mithilfe des ClassPad

An der statistischen Auswertung ist erkennbar, dass $MSE(3.85{,}0.9) = \frac{1}{4-2} \cdot SSE(3.85{,}0.9) = \frac{1}{2} \cdot SSE(3.85{,}0.9) = 0.3375$ ist.

4 Fazit

Zumindest im Fall, dass nur drei Messpunkte gegeben sind, lässt sich die lineare Regression als Anwendung der analytischen Geometrie betrachten und mit bekannten Methoden bearbeiten. Die geometrische Perspektive, wie sie hier dargestellt ist, erlaubt es außerdem, die in der Ebene auftretende Verständnisschwierigkeit zwischen Abstand und Abweichung der Messpunkte zur Regressionsgeraden zu umgehen oder zumindest zu thematisieren.

Lehrer-Spezial

Mathematik und Digitalisierung befeuern sich gegenseitig

Die Digitalisierung wirkt sich auf alle Lebensbereiche aus, eröffnet neue Wege und produziert große Mengen an Daten. Obwohl Jugendliche als „Digital Natives“ gelten, gibt es auch für sie viel zu lernen, um mit diesen Entwicklungen Schritt zu halten. Das neue „Lehrerspezial“ (www.casio-schulrechner.de/lehrerspezial) versorgt Lehrkräfte in den MINT-Fächern mit lebensnahen Unterrichtsanregungen rund um digitale Technologien. Darunter zum Beispiel erste Schritte mit selbst entwickelten Algorithmen, hilfreiche Tools für Datenanalysen oder Hintergründe zu Kryptowährungen.

Als Angebot für die schulische Berufsorientierung stellt das Lehrerspezial verschiedene Wege vor, mit denen Schülerinnen und Schüler in den Bereich „Künstliche Intelligenz“ vordringen können – sowohl mit Studium als auch im Rahmen einer dualen Ausbildung.

Als erste Programmiersprache empfiehlt das Lehrerspezial Python – die Sprache ist im Grafikrechner FX-CG50 enthalten und bietet viele Vorteile für den Programmiereinstieg. Am Beispiel der Fibonacci-Folge zeigt das Lehrerspezial, wie sich die Schülerinnen und Schüler mithilfe von Python zwischen verschiedenen Lösungswegen entscheiden können.

Zur aktuellen Lehrerspezial-Ausgabe:
www.casio-schulrechner.de/lehrerspezial

Zugänge zum Beweisen in der Hochschulmathematik mithilfe des CASIO ClassPad II[1]

Autor: Dr. Kinga Szűcs, Universität Erfurt

Von Studierenden der Mathematik wird erwartet, dass sie schnell den Anschluss an Beweisverfahren und -strategien finden und die Mathematik als *rein deduktive Wissenschaft* schätzen. Leider wird dafür zu wenig auf ihre technischen Vorkenntnisse zurückgegriffen.

Mit dem vorliegenden Beitrag werden konkrete Beispiele vorgestellt, wie das Thema „Beweisen" durch den CAS-Einsatz für Studierende anschlussfähiger gemacht werden kann.

Hierfür werden zwei Sätze, nämlich die Teilbarkeit der Fermat-Zahlen durch 3 sowie der Fundamentalsatz der Algebra, unter dem Gesichtspunkt thematisiert, inwieweit das CAS in den Prozess der Satz- und Beweisideefindung erfolgreich eingebunden werden kann. Beide können unter Rückgriff auf die Verallgemeinerungen der 3. binomischen Formel bewiesen werden.

Teilbarkeit der Fermat-Zahlen

In dem Nachlass des Johann von Bolyai (1802-1860) wurden der folgende Satz und sein Beweis gefunden (Kiss, 1999, p. 99, übersetzt von der Autorin): „Die Zahlen von der Form $2^{2^m}+1$ haben immer die Form $6n-1$, folglich sind sie nie durch 3 teilbar." und „Da $2^{2m-1}+1=(2+1)\dots$), folgt der Reihe nach, dass $2^{2m-1}+1=3n$, $2^{2m-1}=3n-1$, $2^{2m}=6n-2$, jede gerade Zweierpotenz ist also von der Form $6n-2$. Dann ist aber $2^{2m}+1$, also $2^{2^k}+1$ von der Form $6n-1$".

Bolyais Fokus war auf die Teilbarkeit durch 3 gerichtet, obwohl er dies zum Schluss – wahrscheinlich aus Bequemlichkeit – in Form der Teilbarkeit durch 6 zum Ausdruck brachte.

Der Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist die Faktorisierbarkeit der Summe einschlägiger ungerader n-ter Potenzen, da hier die Summe der Basen, also $2+1=3$, ein Teiler ist (2. Verallgemeinerung der 2. binomischen Formel: Aus a^n+b^n kann der Faktor $a+b$ ausgeklammert werden, wenn n ungerade ist). Aus dieser Überlegung leitete er *einen allgemeinen Zusammenhang* für Zahlen von der Form „gerade Zweierpotenz $+1$" ab, die Fermat-Zahlen bilden dabei einen Spezialfall.

Er hat also eine Eigenschaft der Fermat-Zahlen erkannt und bewiesen, indem er einen deutlich stärkeren Satz zeigte.

```
Define F(k)=2^(2^k)+1
                                done
F(0)
                                   3
F(1)
                                   5
F(2)
                                  17
F(3)
                                 257
F(4)
                               65537
F(5)
                          4294967297
F(6)
                18446744073709551617
F(7)
340282366920938463463374▶
iMod(F(0),3)
                                   0
iMod(F(1),3)
                                   2
iMod(F(3),3)
                                   2
iMod(F(4),3)
                                   2
iMod(F(5),3)
                                   2
iMod(F(6),3)
                                   2
iMod(F(7),3)
                                   2
```

Abb. 1: Die ersten acht Fermat-Zahlen und deren Rest modulo 3

Der oben formulierte Satz kann durch den CAS-Einsatz bei der Thematisierung der Teilbarkeit der Fermat-Zahlen schnell gefunden werden. Die Fermat-Zahlen sind per Definition ungerade; eine erste Frage entsteht, wenn die Teilbarkeit durch 3 untersucht wird.

Die Fermat-Zahlen werden dafür als Funktionswerte abhängig von k festgelegt („Define") und einige berechnet (Abb. 1). Der Befehl $iMod(F(k),3)$ liefert den Rest der jeweiligen Fermat-Zahl modulo 3 (Abb. 1).

Man formuliert die ***Vermutung:*** Alle – bis auf den Fall $k=0$ – haben den Rest 2.
Im nächsten Schritt sollen – im Sinne des Beweises von Bolyai – Zahlen der Form $2^{2m}+1$ (eine Verallgemeinerung der Fermat-Zahlen) auf ihre Teilbarkeit durch 3 überprüft werden (Abb. 2) und eine entsprechende Vermutung soll formuliert werden. Das weitere Ziel ist es, diese Vermutung zu beweisen.

Es werden noch Zahlen der Form $2^{2m-1}+1$ analog zu den obigen Überlegungen untersucht (Abb. 2). Da es hier um die Summe von ungeraden Potenzen geht, ist die passende Begründung leicht zu finden (2. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel).

Als Alternative dazu kann untersucht werden, ob alle Zahlen der Form „Zweierpotenz $+1$" den Rest 2 bei einer Division durch 3 haben. Dies kann schnell widerlegt werden. Ein systematisches Vorgehen motiviert hierbei das Sortieren der Potenzen (gerade und ungerade Exponenten).

```
Define Gerade(m)=2^(2m)+1
                                done
Gerade(1)
                                   5
iMod(Gerade(1),3)
                                   2
Gerade(2)
                                  17
iMod(Gerade(2),3)
                                   2
Gerade(3)
                                  65
iMod(Gerade(3),3)
                                   2
Gerade(4)
                                 257
iMod(Gerade(4),3)
                                   2
Define Ungerade(m)=2^(2m-1)+1
                                done
Ungerade(1)
                                   3
iMod(Ungerade(1),3)
                                   0
Ungerade(2)
                                   9
iMod(Ungerade(2),3)
                                   0
Ungerade(3)
                                  33
iMod(Ungerade(3),3)
                                   0
Ungerade(4)
                                 129
iMod(Ungerade(4),3)
                                   0
```

Abb. 2: Gerade und ungerade Zweierpotenzen und deren Rest modulo 3

[1] Der vorliegende Beitrag ist eine stark verkürzte und leicht überarbeitete Version des Artikels: Szűcs, K. (2020). Die Fermat-Zahlen und der Fundamentalsatz der Algebra – CAS-unterstützte Zugänge zum Beweisen in der Hochschulmathematik. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 109, 84-90.

In einem vorletzten Schritt wird der Zusammenhang zwischen den Zweierpotenzen mit ungeraden und geraden Exponenten hergestellt.
Dafür wird eine Tabelle angelegt (Abb. 3), um Regelmäßigkeiten zu erkennen. Im Sinne des Bolyai-Beweises ist beispielsweise die Erkenntnis, dass jede Zahl der Form $2^{2m}+1$ aus der vorhergehenden Zahl der Form $2^{2m-1}+1$ hervorgeht, indem letztere mit 2 multipliziert und 1 subtrahiert wird: $3\cdot 2 = 5+1;\;\; 9\cdot 2 = 17+1;\;\; 33\cdot 2 = 65+1.$
Ein algebraischer Beweis für den allgemeinen Fall
$(2^{2m-1}+1)\cdot 2 \;=\; 2^{2m}+2 = (2^{2m}+1)+1$
folgt.

In einer kurzen Rückschau wird reflektiert, dass hier ein als komplex erscheinender Fall dadurch gezeigt wurde, dass er zuerst verallgemeinert und anschließend auf einen bekannten Zusammenhang zurückgeführt wurde.

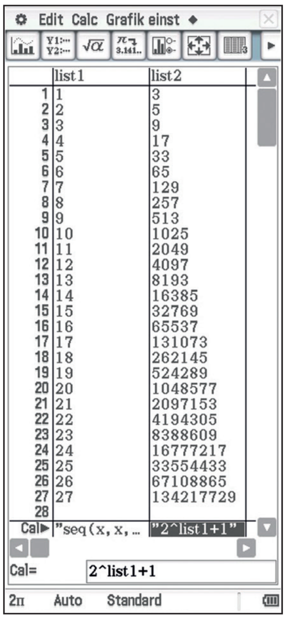


Abb. 3: Die ersten 27 Zahlen der Form „Zweierpotenz+1“

Der Fundamentalsatz der Algebra
Der Fundamentalsatz der Algebra ist in der linearen Algebra zentral, aber auch hier gibt es oft das Problem, dass weder der Inhalt des Satzes noch dessen Beweis für Studierende ausreichend motiviert werden. Auch zu diesem Satz und dessen Beweisidee ist ein Zugang mithilfe des CAS möglich.

Erkundungen an konkreten, immer allgemeiner werdenden Polynomfunktionen können mit dem CP II gut durchgeführt werden. Die Befehle solve und factor liefern Nullstellen und Faktorisierungen (Abb. 4), sodass die entsprechende Vermutung formuliert werden kann.

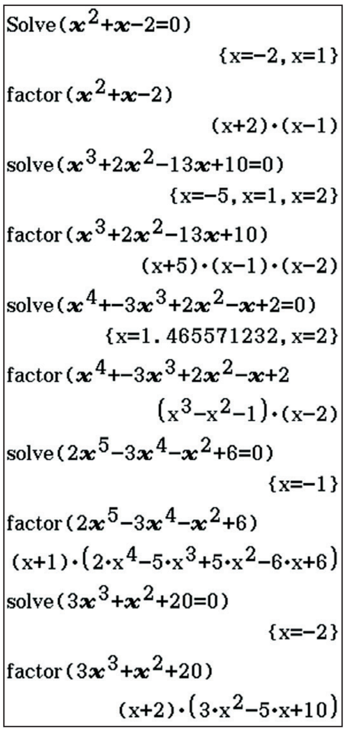


Abb. 4: Erkundungen zum Finden des Fundamentalsatzes der Algebra mit CASIO ClassPad II

Um auch einen Beweis (von vielen) zugänglich zu machen, wird untersucht, von welchen Polynomen lineare Terme wie etwa $x-1$ ein Teiler sind.

Hierzu werden passende Terme vorgegeben. Zum Term $x-1$ anfangs eher offensichtliche wie x^5-1 oder $2x^4-2$, danach weniger „durchschaubare“ Polynome wie etwa x^5+2x^4-3 oder $10x^{10}+x^5+2x^4-13$. So wird der Rückgriff auf die 3. binomische Formel deutlich (aus dem Term a^n-b^n kann der Faktor $a-b$ immer ausgeklammert werden) und die Überprüfung mit dem CAS erfolgt rasch. Die Beweisidee kann dadurch motiviert werden, dass die Studierenden Polynome so mit einer reellen Zahl additiv ergänzen, dass der vorgegebene Term $x-a$ ausgeklammert werden kann.

Beispielsweise:
Das Polynom $p(x) = 10x^{10}+x^5+2x^4-\alpha$ soll den Teiler $x-1$ haben. Das CAS kann bei der Überprüfung helfen. Hier muss $p(a)$, der Wert der Polynomfunktion an der Stelle α, subtrahiert werden; ein Bezug zur Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel wurde schon hergestellt. Werden die Nullstellen der so erzeugten Polynomfunktionen bestimmt, dann ist die vorgegebene Stelle α immer dabei. Eine *Reflexion* der Arbeit führt zur Begründung: Die Polynomfunktionen wurden dadurch erzeugt, dass $p(a)$ von $p(x)$ subtrahiert wurde, was die Stelle α zur Nullstelle der neuen Polynomfunktionen gemacht hat (Abb. 5).

So kann ein Beweis inhaltlich motiviert werden, der auf einer Ergänzung mit Null als Funktionswert einer beliebigen Polynomfunktion $\mathrm{P}(x)$ in einer Nullstelle $x_0 = \alpha$ beruht. Nun ist es nicht mehr weit hergeholt, diesen Funktionswert, der ja null beträgt, als $P(\alpha)$ aufzuschreiben und zu subtrahieren, damit die Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel angewendet werden kann.

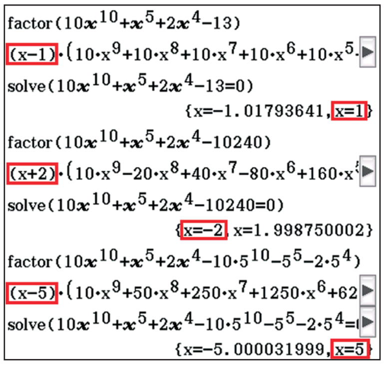


Abb. 5: Die erzeugten Polynomfunktionen haben Nullstellen an den vorgegebenen Stellen

Die hier vorgestellten Ansätze zum CAS-Einsatz sollen als Anregung dienen, wie, in welcher Form und in welchem Umfang auf – in erster Linie technische – Vorkenntnisse der Studierenden in der Hochschulmathematik zurückgegriffen werden kann.

Die hier skizzierten Abläufe können eine Brücke zwischen Schule und Hochschule schlagen. Nicht nur wegen des CAS-Einsatzes, sondern auch wegen des so ermöglichten induktiven Vorgehens. Die Studierenden lernen, selbst Vermutungen zu formulieren, Sätze und Beweisideen zu finden und schließlich auch, formal zu beweisen. Überdies werden sie mit wichtigen heuristischen Strategien vertraut: Analogiebildung, Verallgemeinern, Fallunterscheidung, Zurückführen auf Bekanntes.

Auch konkrete Methoden werden vermittelt, wie die Erweiterung mit Null. Das führt langfristig zu mehr und besserem mathematischem Verständnis.

Literatur
Kiss. E. (1999).
Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából.
Budapest: Akadémiai Kiadó.

Lehrer-Info-Service

Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen der Lehrpläne in den Bundesländern harmoniert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaussand zum Beispiel zu folgenden Themen:
CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten,
Informationen zu regionalen Veranstaltungen,
Neuerungen in den Zulassungsrichtlinien, bundeslandspezifische Angebote,
Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht.

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.

Anmeldung
Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten – dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten, und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

Anmeldung im Netz
www.casio-schulrechner.de/lehrerinfoservice

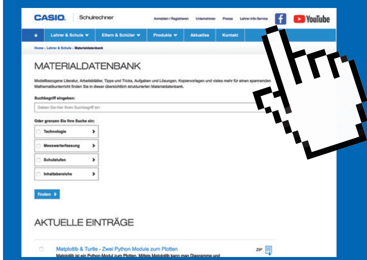
oder einfach den **QR-Code** scannen.

Materialdatenbank

Materialien für den Unterricht

Modellbezogene Literatur, Arbeitsblätter, Tipps und Tricks, Aufgaben und Lösungen, Kopiervorlagen und vieles mehr für einen spannenden Mathematikunterricht finden Sie in dieser übersichtlich strukturierten Materialdatenbank. Sie haben selbst Unterrichtsmaterial erstellt, das Sie teilen möchten? Dann kontaktieren Sie gern die Redaktion.

Im Netz
www.casio-schulrechner.de/materialdatenbank



oder einfach den **QR-Code** scannen.

Software

Aktuelle Betriebssystemversionen

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: **edu.casio.com**

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.7001
FX-CG50	3.60
FX-9860GIII	3.50
Software	
ClassPad II Manager	2.01.7000
ClassPad App	über App-Stores (Android/IOS)
FX-CG50 Manager	3.60
FX-Manager Plus	3.50
ClassWiz Emulator	2.01.0020
ES Plus Emulator	5.00

Updates bis Dezember 2021

Kontakt

Educational Team
Telefon: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-100
E-Mail: education@casio.de
Homepage: www.casio-schulrechner.de

European Support Center
Beratung und technische Informationen
Telefon: +49 (0)40/528 65-802
Fax: +49 (0)40/528 65-888
E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen
Telefon: +49 (0)40/528 65-203
Fax: +49 (0)40/528 65-242
E-Mail: repair@casio.de

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm
- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Bildquellen:
S. 1: M. Mettin, Offenbach; www.m-momente.de

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team • education@casio.de

Design:
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, HH

Copyright für alle Beiträge, soweit nicht anders angegeben, bei CASIO Europe GmbH. Für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen wird keine Haftung übernommen. Nachdruck nur mit schriftlicher Genehmigung und Urhebervermerk.

Technische Änderungen und Irrtümer vorbehalten. Die Abbildungsgrößen entsprechen nicht den Originalgrößen. Die Farben können leicht vom Original abweichen.
Stand: Dezember 2021.

4 549526 610479

121SGR-FORUM30-D