

4 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die Basis für die Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt. Hierbei spielt die Tabellenkalkulation des ClassPad eine Rolle. Die Baumdiagramme werden aufgrund der anschaulichen Darstellung von Wahrscheinlichkeitsexperimenten sorgfältig bearbeitet. In den Beispielen wird teilweise rein mathematisch gearbeitet. Hin und wieder ist der Einsatz des ClassPad so elementar, dass die Rechnungen nur angedeutet sind. Da der ClassPad in den Aufgaben häufig eine Anwendung findet, sollten sie genauer angesehen werden. Online befinden sich zahlreiche weitere Aufgaben.

Nach Beispiel 1 kann die Regel $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ notiert werden. Bei seiner Lösung kann das Baumdiagramm eingeführt werden. Im folgenden Beispiel sollte auf die Schreibweise $\{a, b\}$ und (a, b) geachtet werden. Dies ist für später zu übernehmen.

Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* ist ein zentraler Begriff der Wahrscheinlichkeitslehre. Führt man Experimente mehrfach durch oder findet ein Prozess nur dann statt, wenn vorher bei einem Experiment ein bestimmtes Ergebnis erreicht worden ist, so sind unter Umständen Ergebnisse des zweiten Experiments von denen des ersten abhängig.

Daher wird die bedingte Wahrscheinlichkeit ausführlich und möglichst anwendungsbezogen behandelt. Werte werden von Zeit zu Zeit mithilfe von *tabellarischen Diagrammen* oder *Baumdiagrammen* dargestellt. Mit diesen Diagrammen kann man häufig auf die Tabellenkalkulation und die Formel von Laplace zurückgreifen, wie in Beispiel 2 zu sehen ist.


Die Veranschaulichungen anhand von Diagrammen kommen schnell an ihre Grenzen, was in den Musterlösungen zu erkennen ist. Hier gewinnt die *Formel von Bayes* ihre Bedeutung. Sind alle Varianten zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ unter bestimmten Bedingungen nicht möglich, so kann man damit „den Spieß umdrehen“ und $P(A|B)$ in Abhängigkeit von $P(B|A)$ berechnen, vgl. Beispiel 3 und bei verschiedenen Aufgaben.


Vertiefend werden im Beispiel von *Nachkommen* die bisherigen Inhalte des Kapitels benutzt. In den Aufgabenteilen a) und b) wird die bedingte Wahrscheinlichkeit angewendet. In Teil c) soll die Entwicklung der Wahrscheinlichkeit des Aussterbens der Familie mithilfe einer Regression genähert werden. Bei der Lösung von Teil d) leitet man eine rekursive Folge zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten des Verschwindens der Familie her. Teil e) untersucht mathematische Eigenschaften wie Grenzwert und Monotonie der Folge. Die in diesem Beispiel geschilderte Situation bzgl. der Namenshaltung hält man heute nicht für realistisch. In bestimmten Umgebungen scheint dieses Verfahren der Namenshaltung allerdings noch der Fall zu sein.

Die Aufgabenteile c) und d) können zur Binnendifferenzierung genutzt werden. Leistungsfähigere Schüler können aus Teil b) direkt zu Teil d) wechseln, wo das Erkennen des Zusammenhangs zur Folge vorausgesetzt wird.


Im anschließenden Beweis werden *Zufallsgrößen* anschaulich angewendet, ohne dass sie zuvor definiert sein müssen. Der Beweis kann in leistungsstarken Kursen zur Motivation für die Einführung der Zufallsgrößen genutzt werden.

Im nächsten Abschnitt wird die *Zufallsgröße* (*Zufallsvariable*) eingeführt und angewendet. Erst wird in Beispiel 4 der Wurf mit einem fairen Würfel in der Tabellenkalkulation simuliert und graphisch ausgewertet. Der Teil c) kann zur Motivation für die *Gauß-Verteilung* im Abschnitt über die Normalverteilung benutzt werden. Durch Teil d) wird die Definition der *Zufallsgröße* motiviert. Nach der Lösung von Teil d) von Beispiel 4 kann der Begriff der *Zufallsvariable* „vordefiniert“ werden. Nach Beispiel 4 sollte $\{X = k\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$ definiert werden.

Im Beispiel 5 führen wir die -Anwendung ein. Darunter lassen sich zahlreiche Würfel- und Urnen-Simulationen durchführen. Die Daten können in die Tabellenkalkulation übertragen und dort genutzt werden.

Es bietet sich an, die ersten Teile von Aufgabe 1 dieses Abschnitts bereits im Anschluss an oder sogar vor Beispiel 5 zu lösen, da hier eine Anwendung der -Oberfläche und des *Grenzwertsatzes* stattfindet. Es wird noch einmal angedeutet, dass Lösungen mithilfe eines Computer-Algebra-Systems nur näherungsweise richtige Ergebnisse liefern.

Beispiel 6 bietet eine weitere Anwendungsmöglichkeit von  auf den Münzwurf.


Die Beispiele mit der -Oberfläche können auf das Modell des *unfairen Würfels* erweitert werden, vgl. Beispiel 2 des Abschnitts *Erwartungswert und Standardabweichung*.

Eine Vertiefung bildet das „klassische“ Beispiel des *Ziegenproblems*. Hier unterscheiden sich die Ergebniserwartungen von Schülern deutlich von der Realität. Um diese Erwartungen zu widerlegen, werden mithilfe der Tabellenkalkulation des ClassPad Experimente simuliert. Dies wird ausführlich behandelt, um den Schülern die einzelnen Schritte verständlich zu machen. Dabei ist vor allem auf die Aufgabenteile e) und f) zu achten, in denen eine mod 2-Umrechnung stattfindet, um eine „Ja-nein-Aussage“ über den Spielgewinn zu erhalten.

Als zweite Vertiefung wurde das „klassische“ Geburtstagsproblem gewählt. Einerseits werden Kenntnisse bzgl. der Kombinatorik und der Zufallsvariablen vorausgesetzt. Es werden aber auch Verbindungen zur Analysis und zu Folgen gebildet. Hierbei wird die Bedeutung des ClassPad deutlich, da er bei der Lösung eine große Hilfe bietet. Das Ergebnis ist erstaunlich. Die Wahrscheinlichkeiten fallen größer als erwartet aus.

Nach dem ersten Beispiel des Abschnittes *Erwartungswert ...* kann die Definition des *Erwartungswertes* notiert werden.

In der Vertiefung „Nachkommensproblem“ des Abschnitts *Laplace-Verteilung und bedingte Wahrscheinlichkeit* wird mit Folgen gearbeitet. Es wird eine rekursive Beschreibung gemacht. Vorkenntnisse zu Folgen sind nicht notwendig. Folgen werden ebenso in der Vertiefung „Geburtstagsproblem“ verwendet. Hier wird die Tabellenkalkulation benutzt, und Regressionen werden vorgenommen.

Im Abschnitt der *Zufallsgrößen* wird die Oberfläche  angewendet. Die Beispiele können als eine Vorbereitung zur Binomialverteilung genutzt werden. Es werden Grundbegriffe der Stochastik wie *Ereignisraum* wiederholt.

In den Beispielen des Abschnitts *Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz* werden Programme benutzt. Diese Programme finden Sie online, wenn die Schülerinnen und Schüler sie nicht selbst schreiben sollen. In der Vertiefung des *Taxiproblems* werden neben Inhalten der Stochastik Grundlagen der Analysis wie die *Umkehrfunktion* und der *Grenzwertbegriff* benötigt. Eine anschauliche Anwendung findet mithilfe eines 3-d-Graphen statt.