

## Vertiefung: Die Nachkommen

**Aufgabe 1** Der Familie „von Hempel“ ist es wichtig, ihren Stamm fortzuführen. Unter adeligen Familien sind dafür Regeln einzuhalten. Um den Familiennamen nicht aussterben zu lassen, muss es in jeder Generation männliche Nachkommen geben.

Nach Erfahrung der letzten Generationen hat jeder Mann der Familie mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p_0 = 0,2$  keinen, mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,5$  einen und mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_2 = 0,3$  zwei männliche Nachkommen. Zurzeit gibt es in der Familie genau einen Mann.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es in der nächsten oder der übernächsten Generation 0 ( $1, \dots, 4$ ) männliche Nachkommen?

**Hinweis.** Zeichnen Sie ein Baumdiagramm; verwenden Sie die Bezeichnungen

$A_i$ : Es gibt  $i$  männliche Nachkommen in dieser Generation ( $0 \leq i \leq 2$ )

$B_i$ : Es gibt  $i$  männliche Nachkommen in der nächsten Generation ( $0 \leq i \leq 4$ )

Führen Sie die Berechnungen unter  Tabellenkalkulation durch.

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt der Name spätestens in der zweiten Nachgeneration von Nachkommen aus, wenn dies nicht in der ersten Nachgeneration stattgefunden hat? Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt der Name spätestens in der dritten Nachgeneration von Nachkommen aus?
- c) Geben Sie mithilfe des ClassPad eine Regressionsfunktion  $f$  an, mit der sich näherungsweise die Wahrscheinlichkeiten des Verschwindens des Familiennamens von Hempel in einer, zwei oder mehr Nachkommengenerationen berechnen lässt. Achten Sie darauf, dass die Kurve möglichst nahe am Ursprung vorbei oder sogar durch den Ursprung verlaufen muss. (Überlegen Sie sich, warum dies so sein sollte.)
- d) Erklären Sie mithilfe des Ergebnisses aus dem Aufgabenteil b), wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Name spätestens in der  $n$ -ten Generation ausstirbt, mithilfe einer rekursiven Folge  $a_n$  berechnet werden kann.  
Machen Sie eine Vorhersage über die Wahrscheinlichkeit, dass der Familienname „von Hempel“ spätestens in den ersten 5 bis 10 Jahren verschwindet.  
Vergleichen Sie die Vorhersagen mit den Ergebnissen aus Teil c).
- e) Zeigen Sie, dass die Folge  $a_n$  streng monoton steigend und beschränkt ist. Bestimmen Sie die *Aussterbewahrscheinlichkeit*  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  für den Familiennamen.

**Hinweis.** Setzen Sie die Differenz  $a_{n+1} - a_n$  von zwei aufeinander folgenden Folgengliedern stetig zu einer Funktion  $g$  fort und untersuchen Sie diese Funktion.