

## Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz

**Aufgabe 1** Wenn eine Zelle einer bestimmten Art radioaktiver Strahlung ausgesetzt wird, stirbt sie mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_1 = \frac{1}{2}$ , überlebt mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_2 = \frac{1}{3}$  oder teilt sich mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_3 = \frac{1}{6}$ .

Es werden  $n = 9000$  Zellen bestrahlt. Bei der Untersuchung wird davon ausgegangen, dass die Zellen voneinander unabhängig reagieren.

a) Erklären Sie anschaulich die Bedeutung der Zufallsvariablen  $X_i$  mit

$$X_i = \begin{cases} 2 & \text{falls sich die } i\text{-te Zelle teilt,} \\ 1 & \text{falls die } i\text{-te Zelle überlebt,} \\ 0 & \text{falls die } i\text{-te Zelle stirbt,} \end{cases}$$

und

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von  $Y_n$ .

**Aufgabe 2** Eine seltene Krankheit kann durch eine Blutanalyse nachgewiesen werden. Es sollen  $N = 1200$  Tiere untersucht werden. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen:

Die  $N$  Tiere werden in  $k$  Gruppen mit jeweils  $n$  Tieren aufgeteilt, deren Blutgruppen zu einer Mischgruppe zusammengestellt werden. Die hierdurch entstandenen  $k$  Mischungen werden untersucht. Fällt der Test für eine Gruppe *negativ* aus, so genügt diese eine Untersuchung für die Feststellung, dass alle  $n$  Tiere in der Gruppe *ohne Befund* sind. Fällt er positiv aus, so werden zusätzlich die Blutgruppen der  $n$  Individuen noch einmal einzeln untersucht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Individuum erkannt wird, ist gleich  $p$  mit  $0 < p < 1$ . Die Krankheiten der Tiere sind stochastisch unabhängig. Für  $j = 1, 2, \dots, k$  bezeichnen wir

$X_i$ : „Anzahl der Untersuchungen, die bei der  $i$ -ten Gruppe erforderlich sind“

und

$X$ : „Gesamtzahl der Untersuchungen für  $N$  Tiere.“

Bestimmen Sie für  $n = 5, 10, 15, 20$  und  $p = 0.01$

- die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Untersuchung bei einer Gruppe positiv ausfällt,
- $\mathbb{E}(X_i)$  für  $i = 1, \dots, k$ , und  $\mathbb{E}(X)$ .
- Erklären Sie die anschauliche Bedeutung der Erwartungswerte. Welche Bedingung sollte  $\mathbb{E}(X)$  erfüllen, damit die Untersuchung möglichst erfolgreich ist?

**Aufgabe 3** In einer Urne befinden sich drei rote und drei schwarze Kugeln, die nacheinander ohne Zurücklegen gezogen werden. Die Zufallsvariable  $X$  sei:

$X$ : „Nummer des Zuges, bei dem die erste rote Kugel gezogen wird.“

Berechnen Sie die Verteilung von  $X$ , ihren Erwartungswert und ihre Standardabweichung.