

Ein Taxiproblem

Aufgabe 1 Manuela und Andreas leben in Hammelsdorf und möchten wissen, wie viele Taxis es hier gibt. Die Taxis sind durchnummeriert. Um die Zahl zu schätzen, möchte Manuela die Nummern von 20 Taxis notieren, die an ihr vorbeifahren.

- Erklären Sie, warum Manuela zwischen dem Notieren der Taxinummern einen Zeitraum von mindestens einer halben Stunde vergehen lassen möchte.
- Wir betrachten die vorbeifahrenden Taxis als Zufallsexperiment. Berechnen Sie mithilfe des ClassPad eine Liste von 20 Zufallszahlen von 1 bis 65 und werten Sie sie als notierte Nummern (ohne Kenntnisse, dass die Zufallszahlen von 1 bis 65 liegen können).
Unter welcher Annahme ist die Zufallsgröße X : „Nummer eines Taxis“ gleichverteilt?
- Andreas sagt, es könnte sein, dass sie die maximale Taxinummer schon beobachtet haben. Notieren Sie aus Ihrem Ergebnis von Teil a) die maximale Taxinummer.
Die Zufallsgröße kann als gleichverteilt angenommen werden, wenn die maximale Taxinummer als Anzahl der Taxis angenommen wird.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 20 beobachteten Taxis das Taxi mit der Nummer 65 mindestens zweimal auftritt.


Hinweis. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse:

A : „Taxi 65 fährt diesmal nicht vorbei.“, und B : „Taxi 65 fährt 20 Mal nicht vorbei.“

- Manuela und Andreas möchten wissen, wann die Wahrscheinlichkeit dafür, die größte Taxinummer 65 unter n passierenden Taxis mindestens 1 Mal zu sehen, größer als 0,95 ist.
Als wievieltes Taxi müsste Taxi 65 spätestens zum ersten Mal vorbeifahren, damit dies der Fall ist? Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - (\frac{64}{65})^x)$. Was sagt der Grenzwert aus?

Hinweis. Definieren Sie die Funktion f mit $f(x) = 1 - (\frac{64}{65})^x$.

- Manuela stellt sich die Frage, wie man den Umfang der Untersuchung für den Fall verändern müsste, dass es eine andere Anzahl an Taxis gibt, um mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine Aussage über die maximale Taxinummer machen zu können. Erkunden Sie diesen Zusammenhang an einem 3-d-Graphen.

Hinweis. Definieren und untersuchen Sie die Funktionenschar mit $z_1 = 1 - y^x$ unter  3d-Graphik.

- Beschreiben Sie die Abhängigkeit von x in Bezug auf die Grenze y mit $y = 1 - (\frac{64}{65})^x$.

Hinweis. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} der Funktion f aus Teil e).

- Manuela sagt, dass die Zufallsgröße X einer beobachteten Taxinummer gleichverteilt ist. Sie schlägt daher vor, den Mittelwert der Taxinummern zu benutzen, um die Anzahl der Taxis zu schätzen. Wie geht Manuela vor? Erklären Sie Ihren Ansatz und äußern Sie eine Erwartung über die Anzahl der Taxis.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse von Andreas und Manuela. Welchen Lösungsansatz halten Sie für sinnvoller?
Wiederholen Sie das Zufallsexperiment mehrfach und überdenken Sie Ihre Meinung.