

Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Aufgabe 1 Eine Untersuchung hat ergeben, dass die relative Häufigkeit der Blutgruppe AB bei Frauen (W) gleich $h_W = 0,03$ und bei Männern (M) gleich $h_M = 0,07$ ist. Bei einer Stichprobe von zwei Personen aus einer Spendermenge mit gleich vielen Frauen wie Männern wurde bei einer Person die Blutgruppe AB nachgewiesen. Handelt es sich hierbei um einen Mann oder eine Frau?

Aufgabe 2 Die Stichprobe aus Aufgabe 1 wird mit einem Umfang von $n = 100$ wiederholt. Acht Spender haben die Blutgruppe AB. Schätzen Sie, wie viele davon Männer bzw. Frauen sind.

Aufgabe 3 Nach einer Blutuntersuchung wird in einem Bericht lediglich erwähnt, dass die relative Häufigkeit der Blutgruppe AB gleich 23 % war. Es wird jedoch nicht angegeben, wie groß der Stichprobenumfang war.

- Wie groß könnte der Stichprobenumfang etwa gewesen sein, wenn man von der relativen Häufigkeit von 5 % als Voraussetzung für p ausgeht? Bestimmen Sie die notwendige Anzahl der Spender, damit die Wahrscheinlichkeit für 100 AB-Spender mindestens gleich 0,8 ist. Wie entwickelt sich die Wahrscheinlichkeit für 100 AB-Spender mit der Vergrößerung des Stichprobenumfangs?
- Erklären Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 100)$ mit der Vergrößerung des Stichprobenumfangs n für eine beliebige angenommene Wahrscheinlichkeit p verändert. Beweisen Sie diese Aussage.
- In einer anderen Forschungsgruppe kam man zu dem Ergebnis, dass die Wahrscheinlichkeit für mindesten fünf AB-Spender bei einem Umfang von $n = 200$ gleich 0,3 ist. Es wurde jedoch vergessen anzugeben, von welcher Wahrscheinlichkeit p man ausging. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit? Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 5)$ mit der Variablen p ?

Aufgabe 4 Eine seltene Krankheit bei Schweinen kann durch eine Blutanalyse festgestellt werden. Wenn die Empfindlichkeit der Nachweisreaktion bei Mischproben nicht vermindert wird, kann bei einer Untersuchung von $N = 1200$ Schweinen folgendermaßen verfahren werden:

Die 1200 Schweine werden in g Gruppen von jeweils $n = 5$ (10, 15, 20) Schweinen aufgeteilt, deren Blutproben zu einer Mischprobe zusammengestellt werden. Die so entstandenen g Mischungen werden untersucht. Fällt für eine Gruppe der Test „negativ“ aus, so genügt diese eine Untersuchung für die Feststellung, dass alle n Individuen der Gruppe „ohne Befund“ sind. Falls dieser Test „positiv“ ist, werden zusätzlich die Blutproben der n Individuen einzeln untersucht.

Nach früheren Untersuchungen ist die Wahrscheinlichkeit p einer Erkrankung von Schweinen gleich 0,01. Die Krankheit hat sich bisher als nicht ansteckend erwiesen.

Zwei Zufallsvariablen X_i und X werden wie folgt definiert:

X_i : „Anzahl der Untersuchungen, die bei der i -ten Gruppe erforderlich sind“

X : „Gesamtzahl der Untersuchungen für die n Schweine“

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Untersuchung bei einer Gruppe positiv ist.
- Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}(X_i)$ für $i = 1, \dots, g$ und $\mathbb{E}(X)$.