Trinkst du noch, oder sparst du schon?

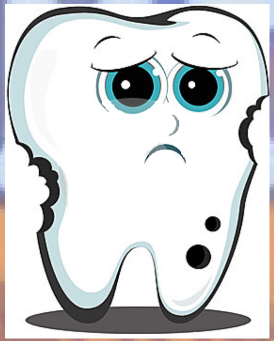
Optimierung des Materialverbrauchs bei Trinkpäckchen im Sinne des Ressourcenschutzes

PAMINA Gymnasium Herxheim

von Jana Detzel und Franziska Geis

Problematik: Gerade im Sommer sind die Mülleimer an unserer Schule nach den Pausen überfüllt von Verpackungen des Eistees, den es an unseren Schulkiosken zu kaufen gibt. Diese Verpackungen machen einen Großteil des Mülls aus.

→ 750 Trinkpäckchen werden monatlich verkauft



Eistee ist auf Grund seines hohen Zuckergehalts ungesund und es entstehen durch das Entsorgen der aus Tetra Pak® bestehenden Verpackung entstehen enorme Kosten für das duale System Deutschlands.

Im Sinne der Ressourcenoptimierung entwickelten die Frage, welcher Quader (Trinkpäckchen) am wenigsten Material zur Herstellung benötigt. Zu dieser Optimierungsaufgabe stellten wir mit Hilfe der Mathematik, genauer durch die Anwendung der partiellen Ableitung, eine allgemeingültige Formel auf, mit der man für die Verpackungen verschiedener Volumina den geringsten Materialverbrauch ermitteln kann.

Wir erhielten am Ende das "ideale Trinkpäckchen" mit dem geringsten Materialbedarf, sodass Verbraucher und Konsumenten, wie auch die Umwelt davon profitieren, um so den „ökologischen Fußabdruck“ eines jeden Menschen auf der Erde zu verbessern.

Der mathematische Hintergrund:

Durch die Anwendung der partiellen Ableitung war es uns möglich, eine Funktion mit mehr als einer Variablen zu differenzieren, um somit Extremwertprobleme zu lösen.

Es muss jedoch bedacht werden, dass die Klebefalz nicht im Ergebnis mit berechnet wird. Im Beispiel rechts wird dies anhand eines Volumens von 500 ml veranschaulicht.

Das „optimale Trinkpäckchen“ für ein Volumen von 500ml hat somit eine Länge von 10 cm, eine Breite von 5 cm und eine Höhe von 10 cm. Folglich besitzt es einen Materialbedarf von 450 cm².

Für den Materialbedarf $M = M(x;y)$ gilt hier ganz allgemein: $M = l \cdot b$ (l: Länge; b: Breite)

Anhand des Verpackungsmaterial erhält man $M = M(x;y) = (2x+2y)\cdot(z+y)$.

Wegen $V = x \cdot y \cdot z = 500\ cm^3$ gilt folglich $z = \frac{V}{xy} = \frac{500}{xy}$

$$\Rightarrow M = M(x;y) = (2x+2y)\cdot\left(\frac{500}{xy}+y\right), \qquad \left(\forall x, y \wedge z \in IR^+\right)$$

$$M = M(x;y) = (2x+2y)\cdot\left(\frac{500}{xy}+y\right) = \frac{1000}{y} + 2xy + \frac{1000}{x} + 2y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(x;y)}{\partial x} = 2y - \frac{1000}{x^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = \frac{1000}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow (I): y = \frac{500}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(x;y)}{\partial y} = -\frac{1000}{y^2} + 2x + 4y \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y = \frac{1000}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow (II): x + 2y = \frac{500}{y^2}$$

Setze (I) *in* (II): $x + \frac{1000}{x^2} = \frac{500}{\left(\frac{500}{x^2}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{x^4}{500} = x + \frac{1000}{x^2} \Leftrightarrow 0{,}002x^4 = x + \frac{1000}{x^2}$

Also gilt: $0{,}002x^4 = x + \frac{1000}{x^2}$

$$\Rightarrow 0{,}002x^6 = x^3 + 1000 \Leftrightarrow x^6 = 500x^3 + 500000 \Leftrightarrow x^6 - 500x^3 = 500000$$

Substitution: $t := x^3 \Rightarrow t^2 = x^6$

$$\Rightarrow t^2 - 500t = 500000 \Leftrightarrow t^2 - 500t + 250^2 = 500000 + 250^2 \Leftrightarrow (t-250)^2 = 562500$$

$$\Rightarrow t - 250 = \pm 750$$

$$\Leftrightarrow t_1 = -500\left(= x_1^3\right) \Rightarrow x_1 \approx -7{,}9 \notin IR^+ \wedge t_2 = 1000\left(= x_2^3\right) \Rightarrow x_2 = 10[cm]$$

Somit gilt: $x_{MIN.} = 10[cm]$ *in* $(II) \Rightarrow y_{MIN.} = 5[cm] \Rightarrow z_{MIN.} = 10[cm] \wedge M_{MIN.} = 450[cm^2]$

Im Vergleich:

Bild 1

Unser optimiertes Trinkpäckchen (rechts im Bild 1) zeigt im Vergleich zu dem üblichen Trinkpäckchen (links im Bild 1) rein äußerlich kaum Unterschiede.

Das optimierte Trinkpäckchen hat aber einen niedrigeren Materialbedarf als die handelsübliche Verpackung des Eistees.

Während die gebräuchliche Verpackung bei einem Volumen von 500 ml einen Materialbedarf von 477,16 cm² hat, benötigt die optimierte Verpackung nur 450 cm².

Das ist eine Einsparung von 6% pro Trinkpäckchen bei gleichem Inhalt !

Bild 2

Diese Einsparung wird noch deutlicher, wenn man aus dem gängigen Trinkpäckchen 6% herausschneidet (siehe Bild 2) und visualisiert .

Übertragen auf unsere Schulproblematik (ca. 750 Trinkpäckchen pro Monat) wären folglich Einsparungen von 45 Trinkpäckchen monatlich möglich. Das wären etwa 21 472,2 cm² pro Monat.