Eine Zeichnung als Ausgangspunkt für variierende Aufgabenstellungen

Ramona Behrens

Kurzfassung des Inhalts:

Die Schülerinnen und Schüler sollen ausgehend von einer Zeichnung, bei dem eine Gerade mit den Koordinatenachsen ein Rechteck einschließt, selbstständig mathematische Fragestellungen finden und versuchen diese zu beantworten.

Klassenstufe(n):

Die Unterrichtssequenz ist für die 10. Jahrgangsstufe konzipiert. Einige Teile der Aufgaben können aber schon früher, sobald der Umgang mit linearen Funktionen bekannt ist, behandelt werden.

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- entwickeln selbstständig Fragestellungen zu einer gegebenen Zeichnung;
- formulieren neue Problem- und Fragestellungen bei der Dynamisierung der Zeichnung;
- bearbeiten und lösen ihre selbstständig entwickelten Fragestellungen mithilfe des ClassPad auf verschiedene Weisen;
- lösen Extremwertaufgaben auf unterschiedlichen Ebenen (numerisch, graphisch, symbolisch).

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- Zeichnungen und Animationen mithilfe des ClassPad erstellen;
- die, während einer Animation, gemessenen Werte tabellarisch sowie graphisch darstellen;
- mittels ClassPad Gleichungssysteme lösen;
- Positionen von Objekten in einer Zeichnung verändern.

Zeitbedarf:

2 Doppelstunden

Sonstige Materialien:

Eventuell Schreibmaterial, auf dem die Schülerinnen und Schüler ihre Fragestellungen notieren sollen (Folien, Kärtchen o. Ä.).

1. Inhalt der Unterrichtssequenz

Bei dieser Unterrichtssequenz werden Geometrie und Algebra miteinander vernetzt. Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand einer Zeichnung selbstständig mathematische Fragestellungen finden und versuchen diese zu beantworten. Die Sequenz zielt dabei unter anderem auf die Lösung eines Extremwertproblems ab, wobei den Schülerinnen und Schülern die Differentialrechnung noch nicht bekannt ist. Dadurch stellt die Bestimmung des Extremwertes ein Problem dar, für das sie keine algorithmische Lösung kennen. In der Unterrichtssequenz wird deshalb insbesondere die Entwicklung heuristischer Strategien geschult. Der Einsatz des ClassPad, als Hilfsmittel, bietet den Schülerinnen und Schülern verschiedene Möglichkeiten zur numerischen, graphischen und symbolischen Bestimmung des Extremwertes.

2. Methodische und didaktische Vorüberlegungen

Die Unterrichtssequenz ist offen bezüglich des Einbeziehens von Fragestellungen der Schülerinnen und Schüler. Gruppenarbeit dient dazu, dass sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig bei der Problemlösung unterstützen und verschiedene Problemlösevarianten einbezogen werden können. Zudem sollen Vermutungen und Planungen vor und für andere Gruppenmitglieder begründet werden. Durch das Bearbeiten verschiedener Fragestellungen ist eine innere Differenzierung möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollen insbesondere dazu hingeführt werden, gegebene Zeichnungen auch dynamisch zu betrachten und neue Fragestellungen zu generieren.

3. Hinweise/ Mehrwert des ClassPad-Einsatzes

Mithilfe des ClassPad können Zeichnungen durch Erstellen von Animationen dynamisiert werden. Zudem können Werte, die sich beim Ablaufen der Animation verändern, automatisch gemessen, in einer Tabelle angezeigt und graphisch dargestellt werden. Durch die Verwendung des ClassPad erweitern sich die Lösungsmöglichkeiten für Problemstellungen.

4. Unterrichtsorganisation

Die Schülerinnen und Schüler erhalten ein Arbeitsblatt mit folgender Darstellung (Abb. 1). Der Arbeitsauftrag dazu lautet: Welche Fragestellungen fallen dir zu dieser Zeichnung ein?

Alternativ kann die Situation auch als eActivity auf die ClassPads der Schülerinnen und Schüler geladen werden. Die Lehrperson könnte dem Plenum zum Einstieg auch bereits eine Animation zeigen, bei der sich der Punkt E entlang der Strecke $\overline{AB}$ bewegt. Im Unterricht lässt sich der Einstieg etwa so gestalten, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Fragestellungen zu der vorgelegten Zeichnung auf Kärtchen notieren. Diese werden dann geordnet und passende Kategorien gebildet. In Gruppenarbeit können dann verschiedene Fragestellungen bearbeitet werden. Die Gruppen sollen dazu angeregt werden, eine

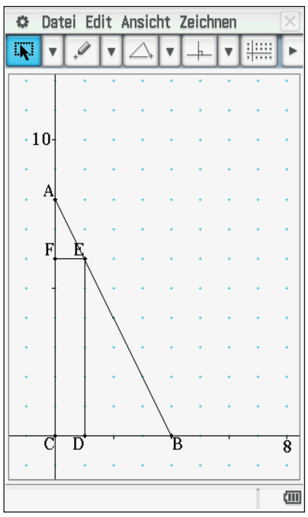

Abbildung 1

Lösung und möglichst auch alternative Lösungswege zu finden. Zudem sollen sie sich auch weiterführende Fragen zu der Zeichnung überlegen.

Einige Beispiele für Fragestellungen, die von Schülerinnen und Schülern formuliert wurden, sind in der folgenden Übersicht dargestellt.

Zeichnung **statisch** betrachtet

Aufgaben zur Berechnung von Geradengleichungen

- Welche Funktionsgleichung hat die Gerade, auf der die Strecke $\overline{AB}$ liegt?

Aufgaben zur Berechnung von Flächeninhalten und Verhältnissen

- Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck $CDEF$?
- Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck CBA?
- Welchen Anteil haben die Flächeninhalte der Dreiecke DBE und FEA (einzeln bzw. zusammen) am Flächeninhalt des großen Dreiecks CBA)?

Aufgaben zu Winkelberechnungen

- Wie groß sind die Winkel $\angle FEA$, $\angle EAF$, $\angle DBE$ und $\angle BED$?
- Wie groß sind die Winkel $\angle AFE$, $\angle EDB$, $\angle FCD$, $\angle DEF$?

Aufgaben zu Verhältnisberechnungen

- Können durch Anwendung der Strahlensätze Aussagen über Verhältnisse von bestimmten Strecken zueinander begründet werden?

Zeichnung **dynamisch** betrachtet (z. B. könnten sich die Punkte A, B und E bewegen, wobei $CDEF$ weiterhin als Rechteck betrachtet wird)

Aufgaben zur Extremwertberechnung

- Für welche Koordinaten von E ist der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten und welchen Wert hat der größte Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$?

Aufgaben zur Berechnung von Flächeninhalten und Verhältnissen

- Welches Rechteck hat einen bestimmten vorgegebenen Flächeninhalt?
- Für welche Koordinaten von E sind die Flächeninhalte der kleinen Dreiecke DBE und DCA gleich groß?
- Welche Flächeninhalte haben das Rechteck $CDEF$ und das Dreieck CBA in Abhängigkeit von der Position des Punktes E?
- Welche Koordinaten hat der Punkt E, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks DBE doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks FEA ist?
- Können die Flächeninhalte des Dreiecks DBE und des Rechtecks $CDEF$ gleich groß werden?
- Für welche Koordinaten von E ist der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CBA?

Aufgaben zur Ähnlichkeit von Dreiecken

- Wie ist die Beziehung zwischen den Dreiecken CBA, DBE und FEA (Ähnlichkeit)?

5. Lösungshinweise

5.1 Zu Aufgaben zur Extremwertberechnung

Der Punkt E bewegt sich auf der Strecke $\overline{AB}$: Für welche Koordinaten von E ist der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten und welchen Wert hat der größte Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$?

5.1.1 Numerische Lösung

Durch Erstellen der Zeichnung im Geometrie-Menü können bei der manuellen Verschiebung des Punktes E auf der Strecke $\overline{AB}$ die Koordinaten von E und die jeweiligen Flächeninhalte vom Rechteck $CDEF$ gemessen werden. Dadurch kann der Wert für den größten Flächeninhalt (Maximum) des Rechtecks näherungsweise gefunden werden.

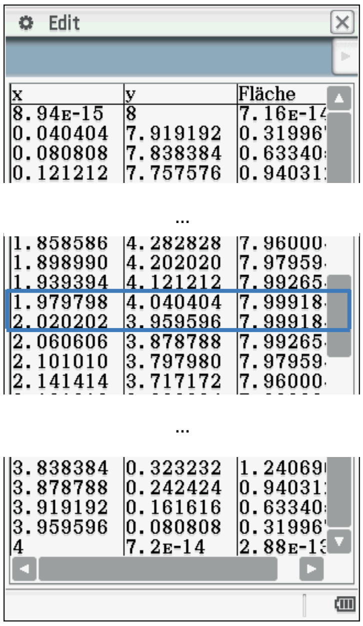

Abbildung 2

Die Erstellung und Verwendung einer Animation, bei der sich der Punkt E auf der Strecke $\overline{AB}$ bewegt, erleichtert die systematische Messung mehrerer Werte, und es ergibt sich dadurch ein guter Näherungswert für den größten Flächeninhalt des Rechtecks. Dabei wird davon ausgegangen, dass bei der Verschiebung des Punktes E auf der Strecke $\overline{AB}$ $CDEF$ stets ein Rechteck bleibt.

Während der Animation können die Koordinaten von E an der jeweiligen Position sowie der zugehörige Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ automatisch erfasst werden. In Abbildung 2 sind Ausschnitte aus den Messungen dargestellt, die durch Auswählen des jeweils zu messenden Objektes und Verwenden der -Taste angezeigt werden: In der ersten (x-Wert) und zweiten (y-Wert) Spalte werden die jeweiligen Koordinaten des Punktes E angezeigt, während dieser auf der Strecke $\overline{AB}$ wandert. Die dritte Spalte gibt den jeweils zu der Position des Punktes E zugehörigen Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ wieder.

Die Näherungswerte für den größten Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ sowie die zugehörigen Koordinaten von E sind hervorgehoben. Je mehr Animationsschritte (bis 100) eingestellt werden, desto besser wird die Näherung.

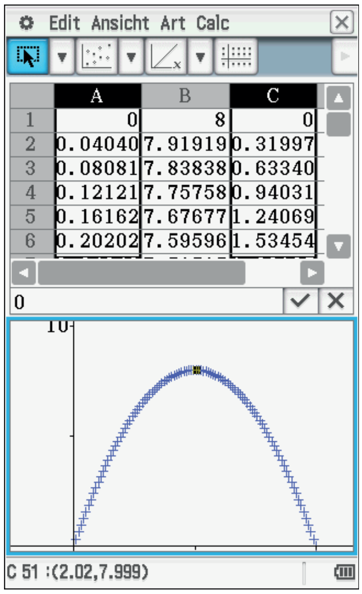

Abbildung 3

5.1.2 Graphische Lösung

Die gemessenen Werte, hier die x-Werte des Punktes E und die zugehörigen Flächeninhalte des Rechtecks $CDEF$, werden in das Tabellenkalkulationsprogramm des ClassPad kopiert, und es wird eine Streuungsgraphik aus diesen Werten erzeugt (Abb. 3). Es ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel. Ein Näherungswert für den größten Flächeninhalt und der zugehörige x-Wert des Punktes E können angezeigt werden, indem im Graphikfenster der Scheitelpunkt des Graphen ausgewählt wird.

5.1.3 Symbolische Lösung

Der größte Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ (Extremwert) kann auch symbolisch berechnet werden. Dafür werden die Gleichung für die Gerade, auf der die Strecke $\overline{AB}$ liegt: $g(x) = -2 \cdot x + 8$ (Abb. 4) und die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Rechtecks $CDEF$ aufgestellt. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist das Produkt des jeweiligen x-Wertes von D bzw. E (entspricht der Länge der Strecke $|\overline{CD}|$ bzw. $|\overline{FE}|$) und dem jeweiligen y-Wert von F bzw. E (entspricht Länge der Strecke $|\overline{CF}|$ bzw. $|\overline{DE}|$). Also ist der Flächeninhalt des Rechtecks: $A(x) = x \cdot y$. Für y kann $g(x) = -2 \cdot x + 8$ eingesetzt werden:

$$A(x) = x \cdot (-2 \cdot x + 8) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x.$$

Unter Verwendung dieser Gleichung gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Koordinaten vom Punkt E zu ermitteln, für die das Rechteck $CDEF$ den größten Flächeninhalt hat (a bis d).

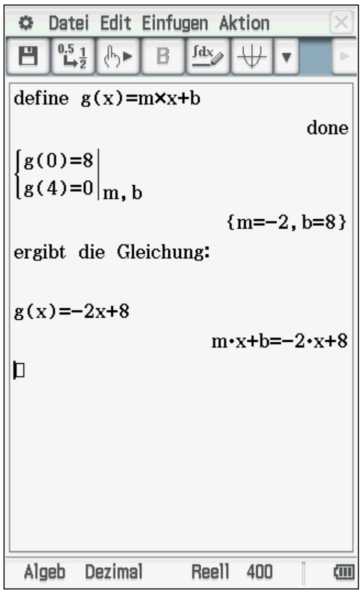

Abbildung 4

a) Berechnung des Scheitelpunktes mithilfe der Nullstellen

Die Nullstellen der Parabel mit der Gleichung $A(x) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ können berechnet werden. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes muss in der Mitte zwischen den Nullstellen der Parabel liegen, daher wird der Mittelwert der Nullstellen berechnet (Abb. 5). Eine weitere Möglichkeit ist die Bestimmung der Nullstellen mittels Graphikmenü (Abb. 6).

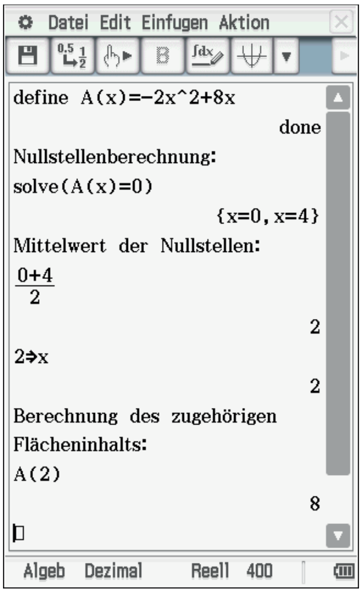

Abbildung 5

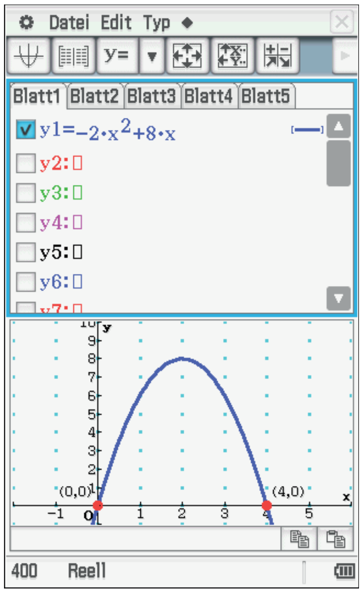

Abbildung 6

Dann muss der zugehörige y-Wert zu $x = 2$ berechnet werden: $g(2) = -2 \cdot x + 8 = 4$.

b) Berechnung des Scheitelpunktes

Der Scheitelpunkt der Parabel mit der Gleichung $A(x) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ kann mittels der quadratischen Ergänzung berechnet werden:

$$-2 \cdot (x^2 - 4 \cdot x) \;\Big|\; +\left(-\tfrac{4}{2}\right)^2 \;\;\Big| -\left(-\tfrac{4}{2}\right)^2$$

$$-2 \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + \left(-\tfrac{4}{2}\right)^2 - (-2) \cdot \left(-\tfrac{4}{2}\right)^2 = -2 \cdot (x-2)^2 + (-2) \cdot 4 = -2 \cdot (x-2)^2 + 8.\right.$$

Scheitelpunktform; Scheitelpunkt: $S(2\,|\,8)$

Berechnung des y-Wertes zu $x = 2$: $g(2) = -2 \cdot x + 8 = 4$.

c) Kombination der symbolischen mit der graphischen Ermittlung des Maximums

Den Graphen mit der Gleichung $A(x) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ zeichnen und das Maximum anzeigen lassen (Abb. 7).

Dann den zugehörigen y-Wert zu $x = 2$ ermitteln: $g(2) = -2 \cdot x + 8 = 4$.

d) Extremwertberechnung mit Differentialrechnung

Diese Möglichkeit ist den Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung dieser Aufgabe in der 10. Klasse noch nicht bekannt.

Der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ ist am größten, wenn $E = (2|4)$ ist.

Das Rechteck $CDEF$ besitzt in diesem Fall den größten Flächeninhalt (Abb. 2 bis 7), wenn die Seite $\overline{CD}$ des Rechtecks $CDEF$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{CB}$ des Dreiecks ABC und die Seite $\overline{CF}$ des Rechtecks $CDEF$ halb so lang wie die Seite $\overline{CA}$ des Dreiecks ABC ist.

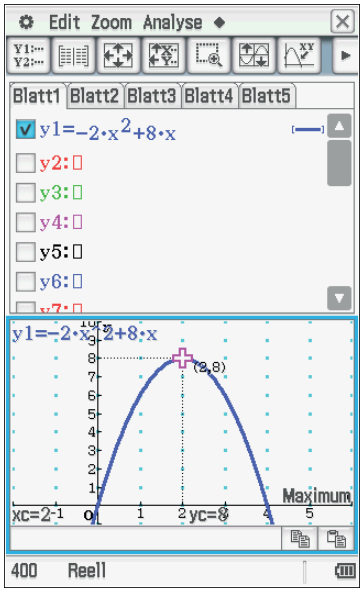

Abbildung 7

6. Variationen der Objekte und Fragestellungen

Die Schülerinnen und Schüler können nun überlegen, wie Objekte in der Zeichnung variiert werden und welche Fragestellungen sich daraus ergeben könnten. In Gruppen wird jeweils eine Fragestellung bearbeitet.

Beispiele zur Variation von Objekten in der Zeichnung sind im Folgenden aufgeführt. Die sich daraus ergebenden Fragestellungen lassen sich nach Kategorien für Variationsmöglichkeiten ordnen.

Zeichnung dynamisieren

- Was kann festgestellt werden, wenn sich der Punkt B entlang der x-Achse bewegt, wobei $CDEF$ weiterhin ein Rechteck bleibt? Wie verändert sich der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ in Bezug auf die Position des Punktes E?
- Was passiert, wenn sich mehrere Punkte gleichzeitig bewegen?

Objekte austauschen

- Was ändert sich, wenn anstatt einer Strecke (Geraden) z. B. ein Parabelstück verwendet wird, auf dem sich ein Eckpunkt eines Rechtecks entlang bewegt?
- Es könnte eine andere Figur (rechtwinkliges/ allgemeines Dreieck, Trapez, …) eingeschlossen sein.

Werte und Positionen verändern

- Wie verändert sich der Flächeninhalt, wenn beispielsweise $B = (4|0)$ und $A = (0|4)$? Was kann bei Veränderung der Koordinaten der Punkte A und B beobachtet werden?
- Trifft die Beobachtung auch für andere Koordinaten der Punkte A und B zu, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten ist, wenn $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ sind?
- Das Dreieck CBA könnte an einer anderen Stelle im Koordinatensystem liegen, so dass die Koordinatenachsen keine Seiten des Dreiecks sind.

Verändern von Eigenschaften der vorgegebenen Objekte

- Was passiert, wenn $CDEF$ nicht mehr als Rechteck betrachtet wird, sondern als allgemeines Viereck? Wann ist dann das Dreieck DBE bzw. FEA ein gleichschenkliges/ spitzwinkliges/ stumpfwinkliges Dreieck? Wie sieht dann das andere Dreieck aus?

7. Lösungshinweise zu Aufgaben der Kategorie „Objekte austauschen“

7.1 Parabelstück statt Gerade als Begrenzung

Was ändert sich, wenn anstatt einer Strecke, z. B. ein Parabelstück mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 9$ mit $0 \leq x \leq 3$ (Abb. 8) verwendet wird, auf dem sich der Eckpunkt E eines Rechtecks entlang bewegt?

Zur Lösung dieser Aufgabe kann wie bei der Aufgabe mit der Geraden als Begrenzung des Rechtecks vorgegangen werden (numerisch durch Verwendung einer Animation, graphisch, symbolisch).

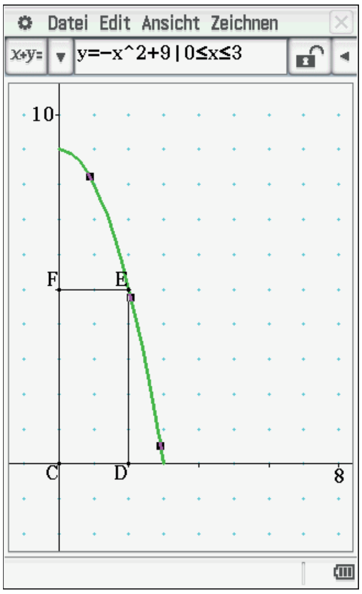

Abbildung 8

7.1.1 Numerische Lösung

Ein Näherungswert für den größten Flächeninhalt des Rechtecks ist 10,391 mit den folgenden Koordinaten von $E = (1{,}748|5{,}944)$ (Abb. 9).

7.1.2 Symbolische Vorgehensweise mit graphischer Vorgehensweise kombiniert

Die Parabelgleichung lautet: $f(x) = -x^2 + 9$. Die Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts ist: $A(x) = x \cdot y$. Einsetzen der Parabelgleichung für y ergibt:

$$A(x) = (-x^2 + 9) = -x^3 + 9 \cdot x.$$

Dann kann das Maximum des Graphen angezeigt werden (Abb. 10).

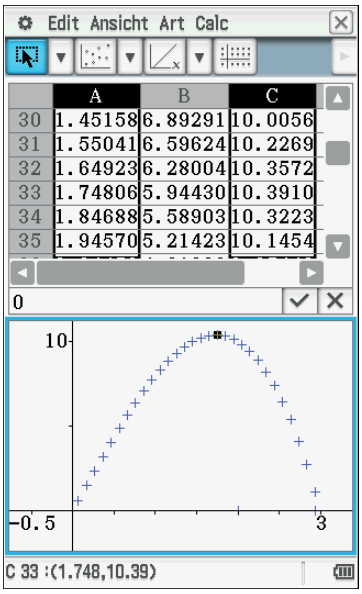

Abbildung 9

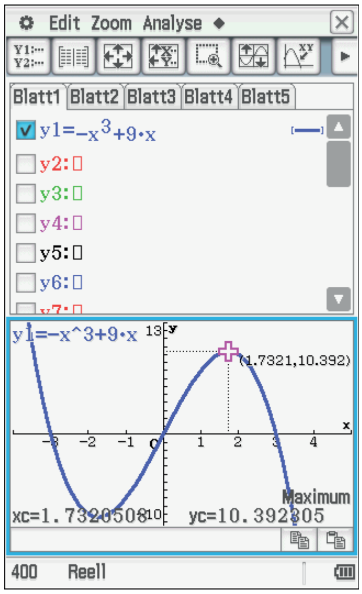

Abbildung 10

7.2 Eingeschlossenes rechtwinkliges Dreieck statt Rechteck

Ein rechtwinkliges Dreieck CDE ist eingeschlossen. Was passiert mit dem Dreieck CEA, wenn das Dreieck CDE denselben Flächeninhalt wie DBE besitzt?

7.2.1 Symbolische Lösung

Die Dreiecke CDE und DBE haben folgende Flächeninhalte: $A_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{ED}$ und $A_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{ED}$. Damit diese Dreiecke denselben Flächeninhalt haben, muss $\overline{CD} = \overline{DB}$ gelten. Der Flächeninhalt des Dreiecks CEA ist dann: $A_{CEA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{FE}$ wobei gilt, dass $\overline{FE} = \overline{CD}$, also $A_{CEA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD}$.

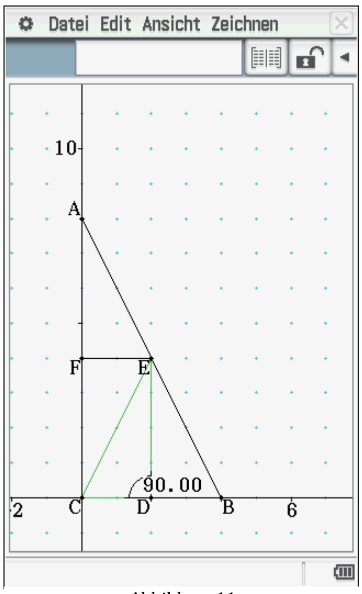

Abbildung 11

Die Dreiecke CDE und DBE sind kongruent zueinander, da sie in den Längen zweier entsprechender Seiten ($|\overline{CD}| = |\overline{DB}|$ und der gemeinsamen Seite $|\overline{DE}|$) und der Größe des von diesen Seiten jeweils eingeschlossenen Winkels übereinstimmen (90°-Winkel). Zudem sind die Dreiecke CDE

und CEF ebenfalls kongruent zueinander, da sie in den Längen von drei entsprechenden Seiten übereinstimmen ($|\overline{FE}| = |\overline{CD}|, |\overline{DE}| = |\overline{CF}|$, gemeinsame Seite $\overline{|CE|}$). Auch die Dreiecke DBE und FEA sind kongruent zueinander, da sie in der Länge von einer entsprechenden Seite ($|\overline{DB}| = |\overline{FE}|$) und in den Größen zweier entsprechender Winkel übereinstimmen ($\angle DEB = \angle FAE$ (Stufenwinkel), 90°-Winkel).

Es handelt sich insgesamt also um vier kongruente Dreiecke. Das Dreieck CEA ist gleichschenklig, da es aus zwei dieser kongruenten Dreiecke besteht. Daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks CEA doppelt so groß wie der des Dreiecks CDE bzw. DBE (Abb. 11).

8. Lösungshinweise zu Aufgaben „Werte und Positionen verändern“

8.1 Größter Flächeninhalt des Rechtecks, wenn $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$?

Trifft die Beobachtung, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten ist, wenn $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ sind, auch für andere Koordinaten von A und B zu?

Bei der Berechnung des größten Flächeninhalts des Rechtecks $CDEF$ in der ersten Aufgabe 5.1 (Abb. 2 bis 7) hat sich der größte Flächeninhalt ergeben als die Seite $\overline{CD}$ des Rechtecks $CDEF$ halb so lang wie die Seite $\overline{CB}$ und die Seite $\overline{CF}$ halb so lang wie die Seite $\overline{CA}$ war.

Nun könnte geprüft werden, ob diese Beobachtung, dass $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ sind, auch zutrifft, wenn die Punkte A und B andere Koordinaten besitzen. Dazu wird die Zeichnung in Abbildung 12 allgemein aufgefasst. Im Folgenden sind alternative Vorgehensweisen dargestellt.

8.1.1 Symbolische Lösung

Die Gleichung der Gerade, auf der die Punkte $A(0|a)$ und $B(b|0)$ liegen, wird aufgestellt: $h(x) = -\frac{a}{b} \cdot x + a$. Anschließend wird der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ allgemein berechnet:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{a}{b} \cdot x + a\right) = -\frac{a}{b} \cdot x^2 + x \cdot b.$$

Dann kann der Scheitelpunkt der Parabel als Mittelwert der Nullstellen ermittelt werden. Die Nullstellen liegen bei $x_0 = 0$ und $x_1 = b$.

Der Mittelwert der Nullstellen ist: $x = \frac{b}{2}$. Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich: $y = \frac{a}{2}$. Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S\left(\frac{b}{2}\middle|\frac{a}{2}\right)$. Das bedeutet, dass der Flächeninhalt

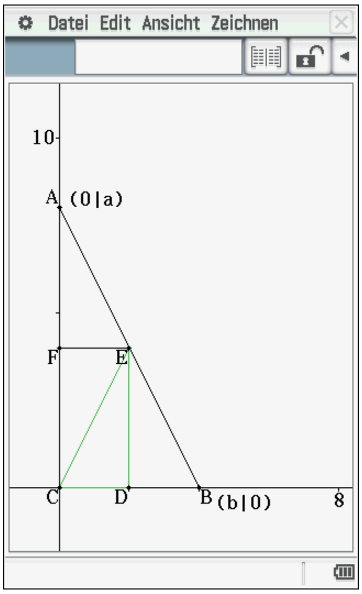

Abbildung 12

jedes Rechtecks $CDEF$ am größten ist, wenn die Seite $\overline{CD}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{CB}$ und die Seite $\overline{CF}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{CA}$.

8.1.2 Symbolische Lösung kombiniert mit graphischer Lösung

a) Verwendung der Strahlensätze und experimentelle Ermittlung der Scheitelpunkte

Der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ ist: $A = \overline{FE} \cdot \overline{FC}$. Um Beziehungen zwischen den Seiten des Rechtecks $CDEF$ und des Dreiecks ABC aufzustellen, wird der zweite Strahlensatz verwendet: $\frac{\overline{FE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AC}-\overline{FC}}{\overline{AC}}$ nach $\overline{FC}$ aufgelöst ergibt sich: $\overline{FC} = \overline{AC} - \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \overline{FE}$. Dann ist der Flächeninhalt: $A = \overline{FE} \cdot \left(\overline{AC} - \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \overline{FE}\right) = \overline{FE} \cdot \overline{AC} - \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \overline{FE}^2$.

Diese Gleichung kann in das Graphikmenü des ClassPad eingegeben werden, wobei $\overline{FE} = x$, $\overline{AC} = a$ und $\overline{CB} = b$ gesetzt werden: $A(x) = x \cdot a - \frac{a}{b} \cdot x^2$. Bei der experimentellen Vorgehensweise werden für a und b verschiedene Werte in: $A(x) = x \cdot a - \frac{a}{b} \cdot x^2$ eingesetzt und jeweils das Maximum bestimmt. Der x-Wert des Maximums gibt dabei jeweils die Länge der Strecke $|\overline{FE}| = x$ an und der y-Wert des Maximums zeigt den Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ in Abhängigkeit von den Seitenlängen $|\overline{AC}| = a$ und $|\overline{CB}| = b$ an. Die zugehörige Länge der Seite $|\overline{FC}|$ kann dann mithilfe der Gleichung $\overline{FC} = \frac{A}{\overline{FE}}$ berechnet werden, die durch Auflösen der Formel $A = \overline{FE} \cdot \overline{FC}$ nach $\overline{FC}$ entsteht.

Wenn nun jeweils verschiedene Werte für a und b eingesetzt werden (also verschiedene Seitenlängen für $|\overline{AC}|$ und $|\overline{CB}|$), so ergibt sich, dass die x-Werte der Maxima (entsprechende Längen der Seite $|\overline{FE}|$) jeweils halb so groß sind, wie die Werte von b (vgl. Abb. 13 bis 17). Bei der Berechnung der zugehörigen Längen der Seite $|\overline{FC}|$ mittels der Gleichung $\overline{FC} = \frac{A}{\overline{FE}}$ fällt auf, dass die Seite $\overline{FC}$ jeweils halb so lang ist wie die Seite $a = \overline{AC}$. Im Folgenden ist jeweils die Parabel bzw. Parallele zur y-Achse eingezeichnet, auf der die Maxima der dargestellten Parabeln liegen (Abb. 13 bis 17).

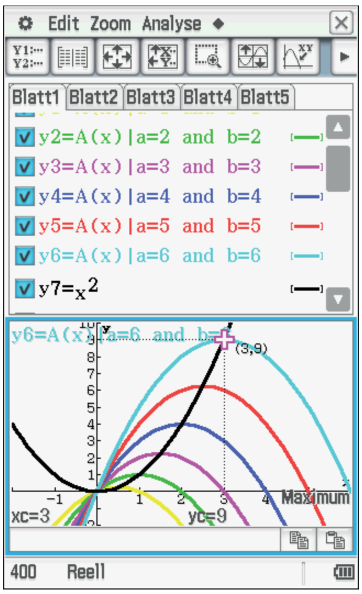

Abbildung 13

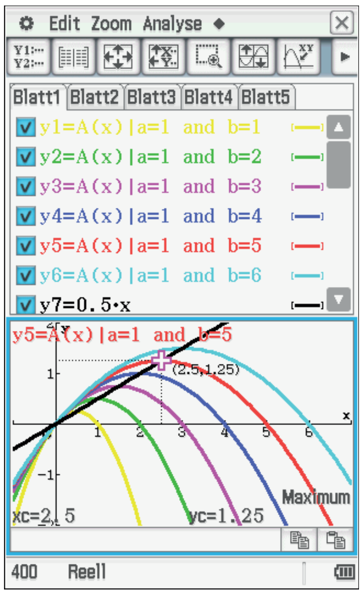

Abbildung 14

bei $a = 1$ und $b = 1$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 0{,}5$

$\overline{FC} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$

bei $a = 6$ und $b = 6$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 3$

$\overline{FC} = \frac{9}{3} = 3$

bei $a = 1$ und $b = 5$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 2{,}5$

$\overline{FC} = \frac{1{,}25}{2{,}5} = 0{,}5$

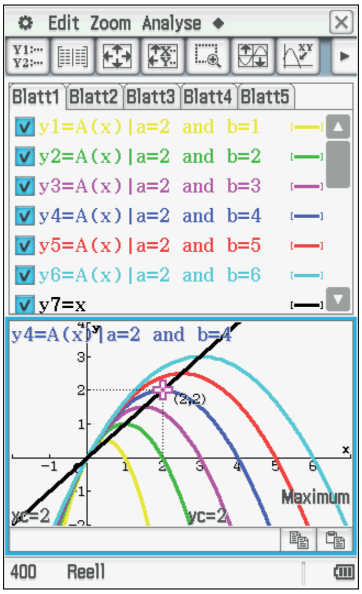

Abbildung 15

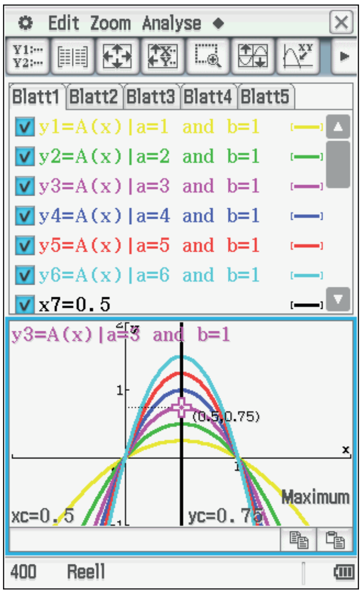

Abbildung 16

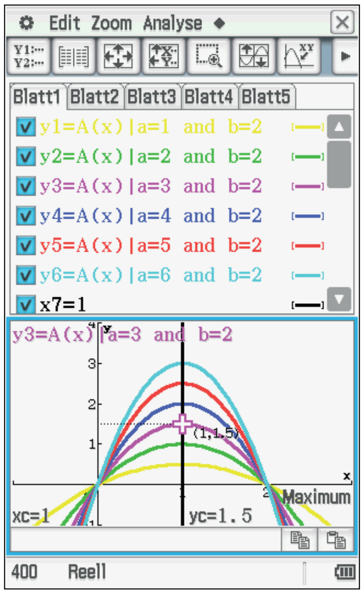

Abbildung 17

bei $a = 2$ und $b = 4$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 2$

$\overline{FC} = \frac{2}{2} = 1$

bei $a = 3$ und $b = 1$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 0{,}5$

$\overline{FC} = \frac{0{,}75}{0{,}5} = 1{,}5$

bei $a = 3$ und $b = 2$:

Länge von $\overline{FE}$: x-Wert des Maximums $= 1$

$\overline{FC} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5$

Daraus lässt sich schließen, dass $\overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}b$ und $\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}a$.

b) Unterteilung des Rechtecks in Dreiecke

Die Unterteilung des Rechtecks $\boldsymbol{CDEF}$ in Dreiecke (siehe Abb. 11) ist eine weitere Möglichkeit zu zeigen, dass $\boldsymbol{\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}}$ und $\boldsymbol{\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AC}}$ ist.

9. Schlussbemerkung

Hier kann natürlich nur eine Auswahl an möglichen Fragestellungen und Variationsmöglichkeiten zu der gegebenen Zeichnung aufgeführt werden. Es kann bzw. wird so sein, dass Ihre Schülerinnen und Schüler ähnliche, aber auch ganz andere Fragestellungen entwickeln. Vor der Durchführung im Unterricht ist es hilfreich, sich selbst mögliche Fragestellungen und Variationsmöglichkeiten zu überlegen.

10. Literatur

Brown, S. I., Walter, M. I.: The art of problem posing. Philadelphia, Pa., Franklin Inst. Press 1983.

Griesel, G., Postel, H., Suhr, F.: Elemente der Mathematik 11. Einführung in die Analysis. 4. Auflage. Schroedel Verlag, Hannover 2005.

Götz, H. u. a.: Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien 11. 1. Auflage. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2009.

Schupp, H.: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim 2002.