CASIO forum
Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 1/2020
Österreich Special

Inhalt

Editorial Seite 1
3/14 – Der Tag der Mathematik Seite 1
Windenergie Seite 2
Anwendung stochastischer Matrizen: Random Walks Seite 3
Rätselecke Seite 4
Neue Messwerterfassung für den FX-CG50 Seite 4
Kein Problem mit dem Abfluss Seite 5
Tabellenkalkulation Seite 7
Lineare Regression mit der „Thermometergrille“ Seite 8
Der Manipulation auf der Spur Seite 9
Die Sterilisation von Lebensmitteln Seite 10
Lehrerspezial Seite 10
Dreieck im Parabelsegment Seite 11
Lehrer-Info-Service und Impressum Seite 12

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

es naht der 14. März 2020, der Tag, der zum Welttag der Mathematik erklärt wurde. Ein Thema der Beiträge dieser Ausgabe ist daher π: Im Titelbild und im Beitrag dazu finden Sie Anregungen, wie an Ihrer Schule ein solcher Tag gestaltet werden kann, auch die Knobelaufgabe behandelt dieses Thema. Über Rückmeldungen und weitere Ideen für einen „Tag der Mathematik“ freuen wir uns! Schon in den letzten beiden Ausgaben wurden Beiträge zur Bestimmung von π nach Archimedes publiziert.

Weitere Beiträge thematisieren: Eigenschaften der Exponentialfunktion, Mathematik zur Windenergie oder den Nachweis der Manipulation von Daten. Weiter erwartet Sie die Regression an einem Beispiel aus der Natur, ein theoretisches Experiment zum Zufall sowie ein praktisches zur Parabelgleichung. Aus Salzburg erreichte uns ein Artikel, in dem die lange bekannten Mischungsaufgaben in einem neuen Licht didaktisch-methodisch angereichert dargeboten werden. Ein sehr interessanter Leserbrief ergänzt einen Beitrag aus der letzten Ausgabe.

Einen Überblick über Support-Angebote finden Sie auf unserer Internetseite. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an education@casio.de.

Ihr Redaktionsteam

i.A. CASIO

Geschichte der Mathematik

3/14 – Der Tag der Mathematik

Autor: Gerhard Glas, Wöhlerschule Frankfurt

Mathematik kommt aus dem Griechischen: „die Kunst des Lernens“. Sie ist mit einer 3500-jährigen Geschichte eine der ältesten Wissenschaften, ein wichtiges Kulturgut. Es gibt verschiedene Definitionen für Mathematik, jedoch keine offizielle. „Mathematik ist die Lehre des Strukturierens“ trifft es recht gut; sie dient zur Lösung von Problemen des Alltags, zum Verstehen komplexer Vorgänge.

Von allen mathematisch-naturwissenschaftlichen Konstanten dürfte wohl keine inner- als auch außermathematisch bekannter und intensiver untersucht worden sein als die Kreiszahl π. Die Verwendung des griechischen Buchstabens kommt von π (Peripheria) oder π (Perimetros – Durchmesser) und ist seit Euler populär.

In nahezu allen Gebieten der Mathematik ist sie von großer Bedeutung. Von ihrer Dezimalstellung sind über 31 Billionen Stellen bekannt. Deswegen soll diese besondere Zahl ihren eigenen Gedenktag bekommen: den 14. März, der wegen der amerikanischen Schreibweise des Datums als 3/14 für die ersten drei Ziffern von π steht. An diesem Tag wird weltweit der π-Tag gefeiert, schon seit 1986. Überall werden an diesem Tag runde Kuchen gebacken und viele Veranstaltungen durchgeführt.

Windenergie

Autor: Ralf Hoheisel, BBS-ME, Otto-Brenner-Schule, Hannover

Die Nutzung regenerativer Energien hat in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen und wird mit Sicherheit weiter vorangetrieben werden. Hierbei haben Windenergieanlagen (WEA) besonders in Norddeutschland aufgrund günstiger geografischer und meteorologischer Bedingungen eine besondere Bedeutung.

In diesem Artikel sollen die mathematisch-physikalischen Grundlagen der windenergetischen Zusammenhänge erarbeitet und visualisiert werden.

Insbesondere
- die Windleistung, die in der bewegten Luftmasse enthalten ist.
- die Leistung, die von einer WEA abgegeben wird.
- die maximale Leistung einer WEA.
- der theoretische Wirkungsgrad einer Windkraftanlage.

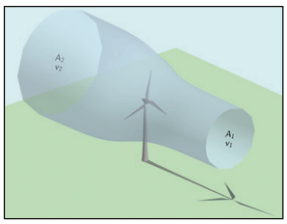


Abb. 1: Darstellung der Strömungsverhältnisse einer WEA

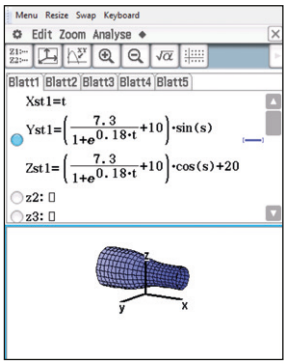


Abb. 2: Visualisierung mit dem ClassPad II

Wind enthält kinetische Energie, $W_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, bzw. $dW_{kin} = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$, mit der Masse $dm = \rho \cdot dV$ und dem Volumen $dV = A \cdot ds$. Damit ist $dW_{kin} = \frac{1}{2} \rho \cdot dV \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot ds \cdot v^2$.

Leistung ist Energie (Arbeit) pro Zeit, also $P = \frac{dW_{kin}}{dt} = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot \frac{ds}{dt} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot v \cdot v^2$

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot v^3}$$

Windleistung P_0 mit Wirkfläche A, Luftdichte ρ und der Windgeschwindigkeit v.

Soll dem Wind durch eine WEA Leistung entzogen werden, so muss seine Strömungsgeschwindigkeit v verlangsamt werden.

$$P_{ab} = P_2 - P_1$$

P_1: Windleistung vor der WEA, Windgeschwindigkeit v_1
P_2: Windleistung nach der WEA, Windgeschwindigkeit auf v_2 abgebremst

Das gelingt nur, wenn die Massenströme $\dot{m}_{v_1}$ vor und $\dot{m}_{v_2}$ nach der Leistungsentnahme gleich sind (Kontinuitätsbedingung).

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \text{ mit } dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot ds$$

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot \frac{ds}{dt} = \rho \cdot A \cdot v$$

$$\dot{m} = \dot{m}_{v_1} = \dot{m}_{v_2} \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

da die Dichte unverändert angenommen wird.

Ändert sich die Windgeschwindigkeit nach der WEA durch Leistungsentnahme, dann muss sich auch die Wirkfläche ändern, es kommt zu einer Aufweitung der Wirkfläche.

Für die abgegebene Leistung gilt dann:

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \rho \cdot A_1 \cdot v_1^3 - \frac{1}{2} \rho \cdot A_2 \cdot v_2^3$$

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \rho \cdot A_1 \cdot v_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot v_2^2$$

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \dot{m} \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \dot{m} \cdot v_2^2$$

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \dot{m} \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

Die Windgeschwindigkeit an der WEA (am Ort der Leistungsentnahme) ist der Mittelwert aus v_1 und v_2 (Theorem von Froude und Rankine), hier ohne Beweis.

$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, damit gilt für den Massenstrom $\dot{m} = \rho \cdot A \cdot \bar{v} : \dot{m} = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot (v_1 + v_2)$

Für die Leistung folgt dann

$$\boxed{P_{ab} = \frac{1}{4} \rho \cdot A \cdot (v_1 + v_2) \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right)}$$

Leistungsabgabe in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit v_1 vor und v_2 nach der WEA.

Die Zusammenhänge wurden von Albert Betz[1] 1926 erstmalig veröffentlicht.

$$L = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{\varrho}{4}(v_1^2 - v_2^2)(v_1 + v_2) F$$

Abb. 3: Im Original von Albert Betz notierte Gleichung

$$\boxed{P_{ab}(v_2) = \frac{1}{4} \rho \cdot A \cdot (v_1 + v_2) \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right)}$$

Windleistung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit v_2 nach der WEA.

Die mathematische Beschreibung der Leistung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit v_2 nach der WEA ist ein Beispiel für eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die in der Technik Verwendung findet. Interessant ist in diesem Zusammenhang die von Betz gewählte Notation in Linearfaktorenschreibweise, die auch noch die 3. binomische Formel beinhaltet.

Wird die oben dargestellte Form durch Einsetzen von realistischen Werten für ρ, A und v_1 vereinfacht und ggf. auf die Herleitung verzichtet, so eignet sich diese Funktionsgleichung gut zum Einstieg in die Thematik ganzrationaler Funktionen 3. Grades.

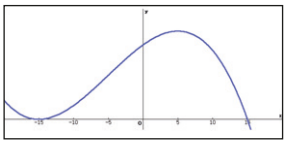


Abb. 4: Graph der Funktion P_{ab}

Offensichtlich gibt es eine Windgeschwindigkeit v_2, bei der die Leistungsabgabe maximal wird, dort gilt $P'_{ab}(v_2) = 0$.
Falls diese Funktion als Einstieg in ganzrationale Funktionen 3. Grades gewählt wurde, steht die Differentialrechnung noch nicht zur Verfügung. Dennoch kann das Problem durch eine graphische Bestimmung des Hochpunktes gelöst werden.

$$P'_{ab}(v_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \rho \cdot A \cdot \left[\left(v_1^2 - v_2^2\right) + (v_1 + v_2) \cdot (-2v_2)\right] = 0$$

$$\left(v_1^2 - v_2^2\right) + (v_1 + v_2) \cdot (-2v_2) = 0$$

$$v_1^2 - v_2^2 - 2v_1 v_2 - 2v_2^2 = 0$$

$$-3v_2^2 - 2v_1 v_2 + v_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 + \frac{2}{3} v_1 v_2 - \frac{1}{3} v_1^2 = 0$$

$$v_{2_{1/2}} = -\frac{1}{3} v_1 \pm \sqrt{\frac{1}{9} v_1^2 + \frac{1}{3} v_1^2} = -\frac{1}{3} v_1 \pm \sqrt{\frac{4}{9} v_1^2} = -\frac{1}{3} v_1 \pm \frac{2}{3} v_1 \quad \Rightarrow$$

$v_{2_1} = \frac{1}{3} v_1$ und $v_{2_2} = -v_1$, wobei $v_{2_2} = -v_1$ sinnlos ist.

Die WEA gibt ihre maximale Leistung ab, wenn die Windgeschwindigkeit nach der Anlage auf $\frac{1}{3}$ der Windgeschwindigkeit vor der Anlage abgebremst wird.

Wird die von der WEA abgegebene Leistung P_{ab} ins Verhältnis zur Windleistung P_0 gesetzt, dann ergibt sich der Leistungsbeiwert c_P, der sein Maximum bei $v_2 = \frac{1}{3} v_1$ hat.

$$c_P = \frac{P_{ab}(v)}{P_0}$$

$$c_P = \frac{\frac{1}{4} \rho \cdot A \cdot (v_1 + v_2) \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right)}{\frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot v_1^3}$$

Maximum

$$c_{P_{max}} = \frac{\frac{1}{4} \rho \cdot A \cdot \left(v_1 + \frac{1}{3} v_1\right) \cdot \left(v_1^2 - \frac{1}{9} v_1^2\right)}{\frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot v_1^3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} v_1\right) \cdot \left(\frac{8}{9} v_1^2\right)}{v_1^3} = \frac{16}{27} \approx 59{,}3\%$$

Der maximale Wirkungsgrad einer WEA, unabhängig von der technischen Ausführung, kann also nicht mehr als knapp 60 % betragen.

[1] Albert Betz, Wind-Energie und ihre Ausnützung durch Windmühlen, 1926

Anwendung stochastischer Matrizen: Random Walks

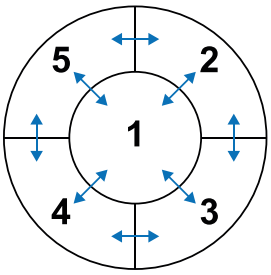
Autor: Jürgen Appel, Deutschorden-Gymnasium, Bad Mergentheim

Durch den Einsatz des FX-CG50 sind im Bereich der stochastischen Matrizen mit den sogenannten „Random Walks“ interessante Aufgabenstellungen möglich. Insbesondere die schnelle und bequeme Berechnung von Potenzen von Matrizen erleichtert die Bearbeitung der Aufgaben enorm, durch den Einsatz des FX-CG50 können sogar stabile Zustände bestimmt werden, ohne ein lineares Gleichungssystem lösen zu müssen.

Aufgabe 1: Zweidimensionaler Random Walk

a) Ein „elektronischer“ Hamster wird durch einen Zufallsgenerator gesteuert. Nach einer fest gewählten Zeit wechselt der Hamster den Raum. Der Hamster kann nur in einen der Räume wechseln, wenn eine Tür vom bisherigen Raum in diesen Raum führt. Der Hamster bevorzugt dabei keine der Türen (d.h., die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Türen sind gleich verteilt).

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass sich der Hamster auf lange Sicht im Raum Nr. i befindet, in Abhängigkeit vom Startraum.



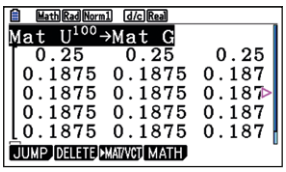
Die Pfeile stehen für die Türen

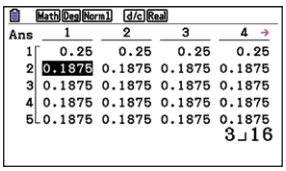
Zunächst wird die Übergangsmatrix U bestimmt. Die Übergangswahrscheinlichkeit aus Raum 1 in einen anderen Raum beträgt jeweils $\frac{1}{4}$. Die Übergangswahrscheinlichkeit aus Raum i ($i \neq 1$) in einen anderen Raum beträgt jeweils $\frac{1}{3}$. Somit ergibt sich folgende Übergangsmatrix U:

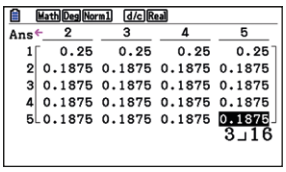
$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Grenzmatrix wird mit dem FX-CG50 z.B. mit $G \approx U^{100}$ bestimmt:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{13}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$





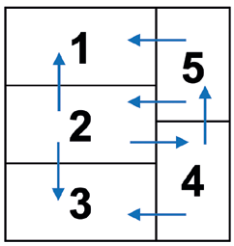


Da alle fünf Spalten gleich sind, führt jede Startverteilung $\vec{v_0}$ auf den gleichen stabilen Zustand $\vec{g}$, der als Spaltenvektor in G abgelesen werden kann.

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

Unabhängig davon, in welchem Raum der Hamster startet, befindet er sich auf lange Sicht mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ im Raum Nr. 1 und mit $\frac{3}{16}$ im Raum Nr. i (i = 2; 3; 4; 5).

b) Jetzt befindet sich der „elektronische“ Hamster in einem anderen Gebäude. Es gelten nach wie vor die gleichen Bedingungen für den Raumwechsel. Er startet im Raum i (i = 2; 4; 5). Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass der Hamster im Raum 1 bzw. im Raum 3 „gefangen“ wird.

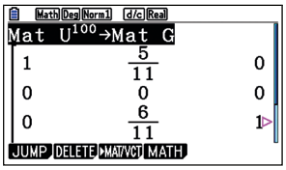


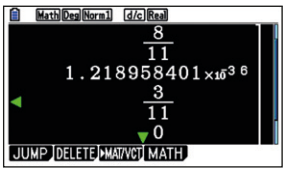
Die Pfeile stehen für die Richtungen, in die die Türen passiert werden dürfen

Da der Hamster aus den Räumen 1 und 3 nicht herauskommt, ist die Wahrscheinlichkeit aus diesen beiden Räumen zu entkommen 0. Die Übergangswahrscheinlichkeit aus Raum 4 oder 5 in die Nachbarräume beträgt immer 0,5; diejenige für den Wechsel aus Raum 2 nach 1, 3 oder 4 jeweils $\frac{1}{3}$. Alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind null. Das ergibt:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{11} & 0 & \frac{4}{11} & \frac{8}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{6}{11} & 0 & \frac{7}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abb. 1: Übergangsmatrix U (links) und Grenzmatrix $G \approx U^{100}$ (rechts)





In den Spalten 2, 4 und 5 ist die Wahrscheinlichkeit abzulesen, dass der Hamster in Raum 1 oder 3 gefangen wird. Dabei ist zu beachten, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Start in den Räumen 2, 4 oder 5 jeweils $\frac{1}{3}$ beträgt.

Wahrscheinlichkeit, dass der Hamster in Raum 1 gefangen wird:

$$P(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5+4+8}{11} = \frac{17}{33} \approx 0{,}5152 = 51{,}52\%$$

Wahrscheinlichkeit, dass der Hamster in Raum 3 gefangen wird:

$$P(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6+7+3}{11} = \frac{16}{33} \approx 0{,}4848 = 48{,}48\%$$

Aufgabe 2: Dreidimensionaler Random Walk mit „Schwerkraft“

Der „elektronische“ Hamster kann sich jetzt auch nach oben und unten bewegen. Die Abbildungen zeigen den Grundriss der beiden Stockwerke des „Hamsterhauses“.

Fortsetzung auf Seite 4

Fortsetzung: Anwendung stochastischer Matrizen: Random Walks

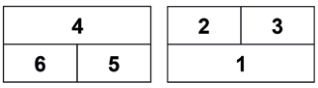


Abb. 2: Oberes Stockwerk (links) und unteres Stockwerk (rechts)

Die Räume, die eine gemeinsame Fläche haben, sind durch eine Tür (auch nach oben und unten) verbunden. Alle Türen können in beide Richtungen passiert werden, der Hamster muss nach jedem Zeitschritt den Raum wechseln.

Die Randbedingungen sind:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Hamster eine Tür von oben nach unten durchschreitet, ist doppelt so groß wie die, dass er eine Tür auf dem gleichen Stockwerk durchschreitet. („Schwerkraft 1“)
- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Hamster eine Tür von unten nach oben durchschreitet, ist halb so groß wie die, eine Tür auf dem gleichen Stockwerk zu durchschreiten. („Schwerkraft 2“)
- Bei Türen gleicher „Art“ (vertikal oder horizontal) bevorzugt der Hamster keine.

Bestimme in Abhängigkeit vom Startraum die Wahrscheinlichkeiten, dass sich der Hamster auf lange Sicht im Raum Nr. i befindet.

Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten aus Raum 1:
Horizontal: P(1-> 2) = P(1 -> 3) = a
Vertikal: P(1-> 5) = P(1 -> 6) = b = 0,5a
Bedingung:
$a + a + 0{,}5a + 0{,}5a = 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

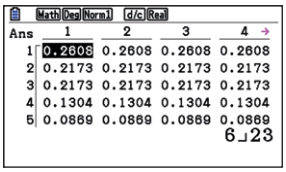
Analog wird der Übergang aus den anderen fünf Räumen bestimmt.

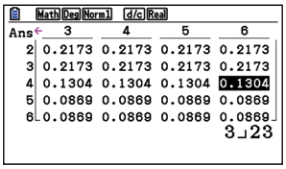
Die Übergangsmatrix U lautet:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Grenzmatrix $G \approx U^{100}$ mit dem FX-CG50.

$$G = \begin{pmatrix} \frac{6}{23} & \frac{6}{23} & \frac{6}{23} & \frac{6}{23} & \frac{6}{23} & \frac{6}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{5}{23} & \frac{5}{23} & \frac{5}{23} & \frac{5}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{5}{23} & \frac{5}{23} & \frac{5}{23} & \frac{5}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{3}{23} & \frac{3}{23} & \frac{3}{23} & \frac{3}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{2}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{2}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} \end{pmatrix}$$





Da alle sechs Spalten gleich sind, führt jede Startverteilung $\vec{v_0}$ auf den gleichen stabilen Zustand $\vec{g}$. $\vec{g}$ kann als Spaltenvektor in G abgelesen werden.

Es gilt:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{6}{23} \\ \frac{5}{23} \\ \frac{5}{23} \\ \frac{3}{23} \\ \frac{2}{23} \\ \frac{2}{23} \end{pmatrix}$$

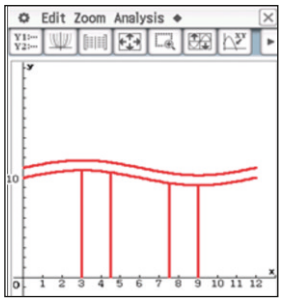
Beispiel:
Unabhängig davon, in welchem Raum der Hamster startet, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er sich auf lange Sicht im Raum 2 befindet, $\frac{5}{23}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er sich auf lange Sicht im Raum 6 befindet, beträgt $\frac{2}{23}$.

Wie schon vorab zu vermuten war, bewirkt die „Schwerkraft“, dass die Wahrscheinlichkeit für den Aufenthalt in einem der unteren Räume (1, 2, oder 3) größer ist als die für einen Aufenthalt in einem der oberen Räume. Zudem ist die Wahrscheinlichkeit, sich in einem der beiden großen Räume aufzuhalten, etwas größer als die für einen Aufenthalt in den anderen Räumen des gleichen Stockwerks (die großen Räume haben eine Tür mehr als die kleinen Räume).

Rätselecke

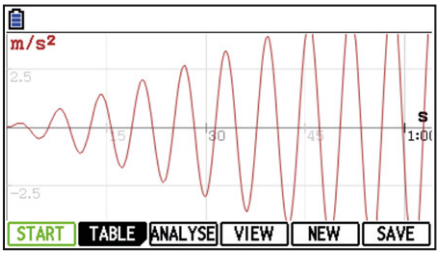
Der Buchstabe π kann im Bereich von $0 \leq x \leq 12$ LE und einer maximalen Höhe von 11,75 LE durch zwei Sinus-Funktionen und vier Geraden dargestellt werden.

Gesucht ist die Fläche dieses so dargestellten Buchstabens.



Produktneuheit

Neue Messwerterfassung für den FX-CG50



DATA LOGGER ist die neue App auf Ihrem CASIO FX-CG50 für die elektronische Messwerterfassung. Sie wurde von Grund auf neu entwickelt, um die optimale Kompatibilität mit dem CMA C-Lab und den Sensoren der Firma CMA zu bieten.

Die neue Bedienoberfläche macht die Durchführung und die Auswertung von Messungen nun deutlich einfacher. Automatische Sensorerkennung, einfache, praxisorientierte Einstellungsmöglichkeiten und der benutzerfreundliche Export der Daten – auch im CSV-Format – sorgen dafür, dass die Messungen deutlich komfortabler werden. Dazu kommen neue Möglichkeiten gegenüber der bisherigen Anwendung E-CON. Zum Beispiel können Sie nun die Achsen des Graphen frei konfigurieren. Eine Messung von Strom (Y-Achse) über Spannung (X-Achse) erfordert nun keine Konfigurationen in der Tabellenkalkulation oder Statistik-Anwendung mehr, sondern kann direkt im DATA LOGGER ausgeführt werden. Ein Dateisystem sorgt dafür, dass Sie Ihre Experimente als Datei sichern können und jederzeit wieder aufrufen können. In Vorbereitung ist zudem eine Datenbank mit vielen Experimenten, die einfach zu starten sind.

Gerade wenn der Taschenrechner nicht regelmäßig genutzt wird, wie zum Beispiel im Chemie- oder Biologieunterricht, wird der neue DATA LOGGER Ihnen den Umgang mit elektronischer Messwerterfassung deutlich einfacher machen.

Kein Problem mit dem Abfluss

Autoren: Peter Rieger, Universität Leipzig; Elke Katz, Arwed-Rossbach-Schule Leipzig

Vorbemerkungen:
Das Auslaufen einer Flüssigkeit aus einem Behälter beschäftigte bereits große Naturwissenschaftler und Mathematiker wie Torricelli (1608 bis 1647), nach dem auch das bekannte Ausflussgesetz benannt ist, und Bernoulli (1700 bis 1782), der mit der Bernoulli-Gleichung das Energieerhaltungsprinzip in der Mechanik der Fluide beschreibt. Heute hat der Sachverhalt des Auslaufens von Flüssigkeiten inhaltlich Eingang in Aufgaben für die Mathematik- und Physikausbildung gefunden. So lassen sich interessante Aufgaben erstellen, die die Schülerinnen und Schüler analytisch oder numerisch lösen können.

Im Rahmen eines fächerverbindenden Unterrichts von Mathematik und Physik können neben theoretischen Überlegungen auch Experimente eingesetzt werden. Das bietet die Möglichkeit, experimentelle Ergebnisse vor dem Hintergrund theoretischer Überlegungen zu interpretieren; eine gute Gelegenheit, Mathematik auf reale physikalische Sachverhalte anzuwenden. Gleichzeitig können verschiedene experimentelle Verfahren eingesetzt und verglichen werden, was zu einer besseren Vernetzung des Wissens führt. Auch wird durch den Einsatz moderner Mess- und Auswerteverfahren die Medienkompetenz gefördert. Verwendet werden hierbei das Mess-, Videoanalyse- und Auswertungsprogramm Coach 7, das Messmodul C-Lab von CMA und der ClassPad-Manager.

Das hier vorgestellte Projekt kann durch Lernen an Stationen realisiert werden, was auch die Sozialkompetenz fördert. Die einzelnen Stationen werden im Folgenden mit Aufgabe und Lösung vorgestellt.

Aufgabenstellungen und Lösungen für die Arbeit an Stationen

In Bodennähe einer wassergefüllten Flasche befindet sich ein Loch. Zu ermitteln sind der zeitliche Verlauf des abnehmenden Wasserstandes in der Flasche und die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers durch das Loch.

Theoriestation (Basis)

- Leiten Sie eine Beziehung für den zeitlichen Verlauf des Wasserstandes in der Flasche her.
- Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Ausflussgeschwindigkeit.
- Stellen Sie die Sachverhalte in einem geeigneten Diagramm dar.

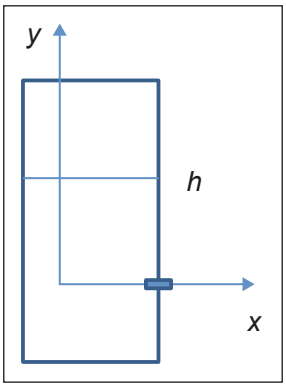
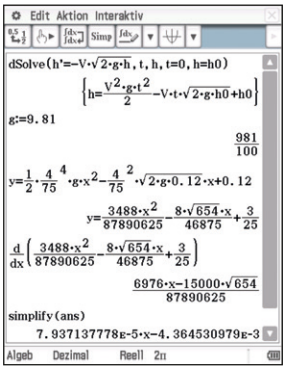


Abb. 1: Lösung (Skizze)

Durch Verwenden eines Kraft- und eines Energieansatzes zur Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit am Loch ergeben sich die Beziehungen für den austretenden Wasserstrahl: $y = -\frac{g}{2v_x^2}x^2$ und $v_x = \sqrt{2gh}$. Da die auslaufende Flüssigkeitsmenge zum Absinken des Wasserspiegels führt, folgt für die Absinkgeschwindigkeit: $v_y = \frac{A_L}{A_F}v_x$, wobei A_L und A_F die Innendurchmesser von Loch und Flasche sind. Unter Verwendung der Gleichungen $\frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt}$ und $\frac{dh}{dt} = -\frac{A_L}{A_F}\sqrt{2gh}$ lässt sich eine Beziehung für die Abnahme der Höhe der Flüssigkeit über dem Auslaufloch ermitteln: $h = \frac{gV^2}{2}t^2 - V\sqrt{2gh_o}t + h_o$, wobei h_o den Flüssigkeitsstand zu Beginn der Messung angibt. V ist das Verhältnis der Flächen des Loches und der Flasche: $V = \frac{A_L}{A_F}$. Der zeitliche Verlauf der Absinkgeschwindigkeit in der Flasche ergibt sich durch Differenzieren: $v_y = gV^2t - V\sqrt{2gh_o}$.

Mit den durch Messen mit einem Lineal ermittelten Werten für den Durchmesser des Loches (d_L= 4mm), den Innendurchmesser der Flasche (d_F= 75mm) und die Ausgangshöhe der Flüssigkeit über dem Loch (h_o= 0,12m) lassen sich die notwendigen Berechnungen durchführen und der zeitliche Verlauf der Ausflussgeschwindigkeit darstellen:



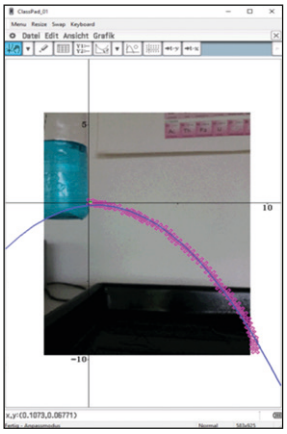
Experimentierstationen

An den verschiedenen Experimentierstationen werden die Wurfparabel der ausfließenden Flüssigkeit, die zeitlichen Verläufe der Höhe der Flüssigkeitssäule in der Flasche und der Ausflussgeschwindigkeit ermittelt.

Station Bildplot

- Bestimmen Sie die Ausflussgeschwindigkeit für verschiedene Flüssigkeitsstände über der Auslaufstelle.

Der austretende Wasserstrahl und die Höhe der Flüssigkeit über dem Austrittsloch werden fotografisch festgehalten. Für das spätere Kalibrieren sollte ein Gegenstand bekannter Länge in derselben Ebene mit erfasst werden. Die Bilder werden mit dem Bildplot-Tool des ClassPad-Managers ausgewertet. Dafür müssen die Fotos mit der Picture-Converter-Software (Picture Conversion Engine for ClassPad II) in das entsprechende Format konvertiert werden.



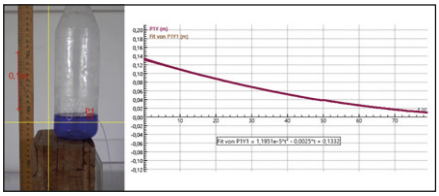
Vor der Auswertung ist das Kalibrieren vorzunehmen. Für den hier abgebildeten Plot ergibt sich eine Funktion: $y(x) = -1{,}507x^2 + 0{,}05067x + 0{,}0696$. Unter der begründeten Annahme eines waagerechten Wurfes vereinfacht sich die Funktion zu $y(x) = -1{,}507x^2$. Mit $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2}\cdot x^2$ ergibt sich eine Ausströmgeschwindigkeit $v_x \approx 1{,}8\frac{m}{s}$.

Station Videoanalyse

- Ermitteln Sie eine Beziehung für den zeitlichen Verlauf der Abnahme der Flüssigkeitshöhe über dem Auslaufloch.
- Geben Sie eine Beziehung für den zeitlichen Verlauf der Absinkgeschwindigkeit an.

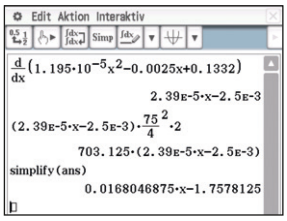
Fortsetzung auf Seite 6

Zuerst wird ein Video aufgenommen, in dem die Änderung der Flüssigkeitshöhe während des Auslaufvorganges gut erkennbar ist. Anschließend wird es auf den für die Auswertung durch Videoanalyse relevanten Teil reduziert und mit Coach 7 geöffnet, welches hier als Videoanalyseprogramm genutzt wird. Im Menü des Videoanalysefensters wird die Skalierung vorgenommen, das Koordinatensystem eingerichtet und die automatische Punktverfolgung mit passendem Suchbereich eingestellt. In einem anderen Fenster muss noch das Diagramm für den durch die Videoanalyse generierten Graphen eingerichtet werden.



Im Bearbeitungsmenü die Fit-Funktion aufrufen und einen quadratischen Fit des Graphen vornehmen: $h(t)=1{,}195\cdot 10^{-5}t^2-0{,}0025\cdot t+0.1332$. Der Vergleich dieses experimentellen Ergebnisses mit dem der theoretischen Betrachtungen $(h(t)=3{,}9689\cdot 10^{-5}x^2-0.00436\cdot x+0{,}12,\ h=\frac{gV^2}{2}t^2\text{-}V\sqrt{2gh_o}t+h_o)$ zeigt erhebliche Abweichungen. Der Quotient aus dem experimentell bestimmten Flächenverhältnisses V_{exp} und dem Wert der theoretischen Betrachtung $v=\left(\frac{4}{75}\right)^2$ hat den Wert 0,55. Das Verhältnis des experimentell bestimmten Durchmesserverhältnisses zum angenommenen Wert beträgt 0,74. Die Ursachen dafür liegen in dem hier nicht eingeführten Abflussbeiwert und in den Messunsicherheiten bei der Bestimmung der Innendurchmesser, die in den theoretischen Betrachtungen verwendet wurden. Daher wird der Korrekturfaktor 0,55 für das Flächenverhältnis eingeführt. Mit ihm lässt sich der experimentell ermittelte lineare Koeffizient im Rahmen der Messgenauigkeit gut bestätigen: $V\sqrt{2gh_o}=0{,}0043645*0{,}5*\sqrt{\frac{0{,}133}{0{,}12}}=0{,}0023$. Der veränderte absolute Koeffizient h_o wird dabei durch den Faktor $\sqrt{\frac{0{,}133}{0{,}12}}$ berücksichtigt.

Der zeitliche Verlauf der Absinkgeschwindigkeit und die maximale Ausflussgeschwindigkeit durch das Loch ist in dieser Abbildung hergeleitet:

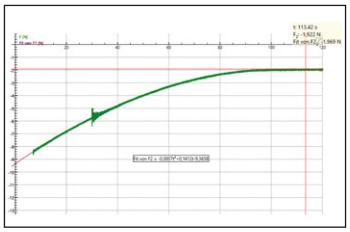


Der durch Differenzieren der Fit-Funktion gewonnene zeitliche Verlauf der Absinkgeschwindigkeit wird in Zeile 2 in den zeitlichen Verlauf der Ausflussgeschwindigkeit umgerechnet, wobei auch der Korrekturfaktor angewendet wird. Es ergibt sich eine maximale Ausflussgeschwindigkeit von ca. 1,8 m/s^{-1}.

Station Kraftmessung

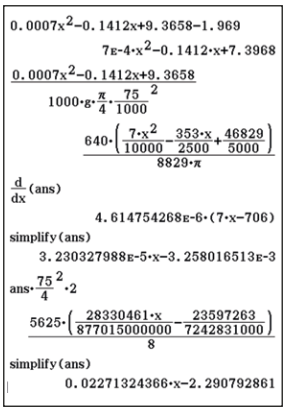
- Ermitteln Sie eine Beziehung für den zeitlichen Verlauf der Gewichtskraft einer wassergefüllten Flasche während des Auslaufens durch Kraftmessung.
- Ermitteln Sie aus dieser Messung Beziehungen für die zeitlichen Verläufe der Flüssigkeitshöhe in der Flasche und der Absinkgeschwindigkeit.
- Bestimmen Sie die maximale Ausflussgeschwindigkeit.

Die gefüllte Flasche wird am Kraftmesser von CMA angehängt. Über das C-Lab werden die Messdaten in einem Rechner mit Coach 7 als Mess- und Auswerteprogramm eingelesen.



Die vom Kraftsensor gemessene Kraft F ist die Summe der Gewichtskraft der Flasche mit Restwasser F_{FRw} und der Gewichtskraft der Wassersäule über dem Abfluss F_h. Diese ist proportional zur Höhe der Flüssigkeitssäule über dem Auslauf. Es gilt: $h(t)=\frac{F_h}{\rho g A_F}=\frac{F-F_{FRw}}{\rho g A_F}$.

Damit lassen sich aus den Messdaten alle gesuchten Zusammenhänge und Größen ermitteln.



In der Zeile 1 wird von der Fitfunktion $F(t)$ der konstante Anteil der Gewichtskraft der Flasche mit dem Restwasser F_{FRw} abgezogen, mit dem Cursor im Messdiagramm wird er bestimmt. In der Zeile 2 erfolgt die Berechnung der Funktion $h(t)$ aus $F_h(t)$. Das Differenzieren von $h(t)$ führt zum zeitlichen Verlauf der Absinkgeschwindigkeit. In Zeile 5 wird aus dieser der zeitliche Verlauf der Ausflussgeschwindigkeit durch das Loch berechnet, wobei auch hier der oben bestimmte Korrekturfaktor für das Flächenverhältnis verwendet wird. Die maximale Ausflussgeschwindigkeit beträgt ca. 2,3 m/s.

Didaktische Anmerkungen

Das Vorhaben ist für die Sekundarstufe 2 geplant, Erfahrungen im Umgang mit dem ClassPad bzw. ClassPad Manager und dem Mess- und Videoanalyseprogramm Coach 7 werden vorausgesetzt.

Die Arbeit an der Basisstation dient dazu, dass sich alle mit den theoretischen Grundlagen vertraut machen. Der physikalischen Analyse folgt eine mathematische Beschreibung, die zu einer Differentialgleichung führt. Diese ist analytisch lösbar, sie kann aber auch mit dSolve im ClassPad gelöst werden. Im Theorieteil sollte auf eine Ausgewogenheit zwischen „Kopfgebrauch“ und ClassPad-Einsatz bei der Durchführung von Berechnungen geachtet werden. Bei den experimentellen Stationen kann dann aber der ClassPad als effizientes Rechenhilfsmittel zum Einsatz kommen.

Während die Basisstation zeitgleich von allen bearbeitet wird, kann an den experimentellen Stationen eine Differenzierung erfolgen. Es ist nicht zwingend, dass alle Stationen bearbeitet werden. Ideal ist es, die Station Bildplot und eine der anderen beiden Stationen nacheinander zu bearbeiten. Hier werden grundlegende physikalische Kenntnisse über den waagerechten Wurf zur Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit angewandt. An beiden anderen experimentellen Stationen erfolgt eine Vertiefung und Anwendung des vorher erarbeiteten Wissens.

An den Stationen Bildplot und Videoanalyse können die Experimente durchgeführt und danach auf fertiges Bild- bzw. Videomaterial zurückgegriffen werden.

Der Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Überlegungen führt zur Einführung von Korrekturfaktoren. Hier ist die Lehrperson gefragt, um Impulse zu geben, zu moderieren und zu helfen.

Für das gemeinsame Abschlussplenum können Poster oder geeignete Präsentationen eingesetzt werden, die allen einen Überblick über die verwendeten Methoden, aufgetretene Probleme und deren Lösungen geben. Insbesondere sollten die experimentellen Ergebnisse verglichen und diskutiert werden.

Tabellenkalkulation

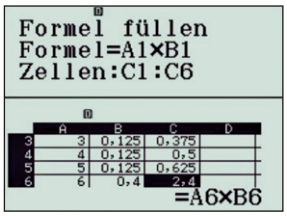
Autorin: Carina Ringler, Edertalschule Frankenberg

Teil des modernen Mathematikunterrichtes ist es auch, Kompetenz im Umgang mit Tabellenkalkulationssoftware zu vermitteln. Dazu ist es erforderlich, regelmäßig mit dieser Software zu arbeiten. Da der FX-991DE X ClassWiz eine einfache Tabellenkalkulation anbietet, kann hiermit der Einsatz der Tabellenkalkulation gut geübt werden. Hier zwei Beispiele dafür:

Berechnung des Erwartungswertes (Sek. II)
Es wird ein gezinkter Würfel betrachtet. Er hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

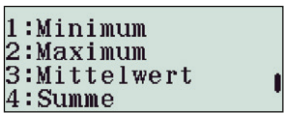
Augenzahl	1	2	3	4	5	6
p(AZ)	1/10	1/8	1/8	1/8	1/8	2/5

- Bestimmen Sie den Erwartungswert.



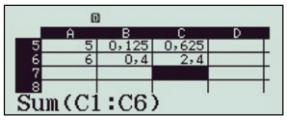
Hierzu wird mit MENÜ 8 der Tabellenkalkulationsmodus des FX-991DE X ClassWiz aufgerufen und nicht etwa der Modus Tabellen, der für Wertetabellen gedacht ist.

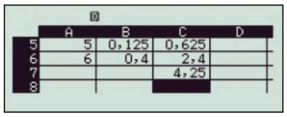
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird in die Spalten A und B eingetragen.



In der Spalte C werden die Produkte aus der Augenzahl und deren Wahrscheinlichkeit berechnet.

Dazu wird der Befehl „Formel füllen“ genutzt, den man mit der Tastenkombination OPTN, 1 aufrufen kann.

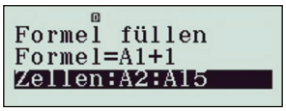


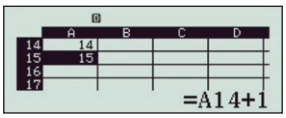


Hier sollen die Zellen C1 bis C6 mit den Produkten aus den jeweiligen Zellen der Spalten A und B gefüllt werden: Eingeben der Formel =A1xB1; für die nächsten Zeilen wird sie automatisch angepasst, da es eine relative Zelladressierung ist.

Zur Bestimmung des Erwartungswertes müssen noch die Werte in den Zellen C1 bis C6 summiert werden. Der Summenbefehl wird mit OPTN aufgerufen. Anschließend den zu summierenden Bereich eingeben – und der WTR bestimmt den gewünschten Erwartungswert.

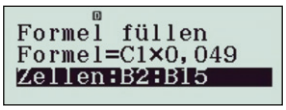
Berechnung eines Tilgungsplans (Sek. I)
Ein Kreditbetrag von 10.000 € wird mit einer jährlichen Rate von 1.000 € abbezahlt. Die Zinsrate des Kredits liegt bei 4,9 %. Erstelle einen Tilgungsplan und finde heraus, wann der Betrag vollständig getilgt ist.

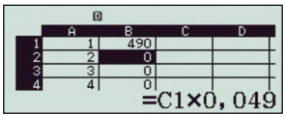




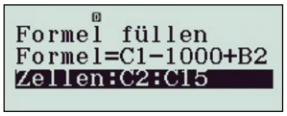
In der beschriebenen Lösung für die ersten 15 Jahre sind in Spalte A die Anzahl der gezahlten Raten, in Spalte B die im entsprechenden Jahr zu zahlenden Zinsen und in Spalte C der jeweilige Restbetrag erfasst.

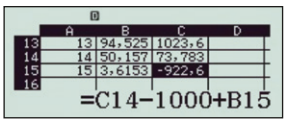
Um die Spalte A mit der Anzahl der Raten zu füllen, können die Zahlen eingetippt werden oder der Befehl „Formel füllen“ wird genutzt.





In der Zelle B1 werden die Zinsen für das erste Jahr berechnet. Einzugeben ist also 10000 * 0.049. In den weiteren Zellen dieser Spalte stehen jeweils die Zinsen auf den Restbetrag, welcher eine Zeile darüber in der Spalte C zu finden sein wird. Dazu dient wiederum der Befehl „Formel füllen“, diesmal mit der Formel = C1 * 0.049 in den Zellen B2 : B15. Da die Spalte C noch keine Werte enthält, wird in den Zellen B2 bis B15 nun eine 0 angezeigt, diese Werte werden jedoch aktualisiert, sobald sich die Werte in der Spalte C ändern.





Die Spalte C soll, wie bereits erwähnt, den jeweiligen Restbetrag angeben. Im ersten Jahr berechnet dieser sich mit der Formel = 10000 - 1000 + B1, da in B1 die Zinsen des ersten Jahres erfasst sind.

Die Restbeträge der weiteren Jahre berechnen sich entsprechend, ausgehend vom Restbetrag des Vorjahres. Über „Formel füllen“ mit der Formel = C1 - 1000 + B2 werden die Zellen C2 : BC15 entsprechend gefüllt.

In Zelle C15 ergibt sich ein negativer Restbetrag. Der Kreditbetrag kann also im 15. Jahr mit einer Restzahlung getilgt werden.

Sollten die Schülerinnen und Schüler den Tilgungsplan für zu wenige Jahre angelegt haben, so lässt sich die Tabelle mithilfe des Befehls „Kopieren & Einfügen“ erweitern, dieser findet sich unter OPTN, einmal nach unten klicken und 2.

Dies sind zwei Anwendungsbeispiele, wie ich sie in meinem Unterricht bereits probiert habe. Zu beachten ist, dass der Tabellenkalkulationsmodus auf 45 Zeilen und 5 Spalten begrenzt ist und der Arbeitsprozessor eines Taschenrechners nicht die Leistungsstärke eines Computers besitzt, es also bei großen Tabellen zu Verzögerungen in der Berechnung kommen kann. Allerdings konnte ich bislang alle Tabellenkalkulationsaufgaben, die ich aus dem Schulalltag kenne und die keine Diagrammerstellung erforderten, mit dem FX-991DE X ClassWiz bearbeiten.

Die Bedienung der Tabellenkalkulation ist zugegebenermaßen gewöhnungsbedürftig, da sie ohne eine vollständige Tastatur auskommen muss und sich daher auch von der Bedienung eines Tabellenkalkulationsprogramms unterscheidet. Ich halte dies für einen Vorteil, da die Schülerinnen und Schüler somit gezwungen sind, sich mit dem Grundprinzip der Tabellenkalkulation auseinanderzusetzen und nicht nur die Bedienung ihres Lieblingsprogramms auswendig zu lernen brauchen.

Lineare Regression mit der „Thermometergrille“

Autor: Ludwig Paditz, HTW Dresden, Fakultät Informatik/Mathematik

In amerikanischen Schulbüchern ist folgende historisch belegte Aufgabenstellung zu finden:

Das Dolbearsche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der Umgebungstemperatur und der Zirprate einer fast überall in den USA vorkommenden Grille, der zu den Blütengrillen gehörenden Oecanthus fultoni (Snowy Tree Cricket), die deshalb auch als Thermometergrille bezeichnet wird. Das „Gesetz“ wurde vom Physiker und Erfinder A.E. Dolbear (1837-1910) formuliert und 1897 publiziert.

In der heute verwendeten Form müssen die Zirprufe der Schneeweißen Blütengrille lediglich 15 Sekunden lang gezählt werden. Zu dieser Zahl wird 40 addiert, das ergibt die Temperatur am Standort der Grille – in Grad Fahrenheit.

Es sei N die Anzahl der Zirprufe pro min. und T die Temperatur in °F.

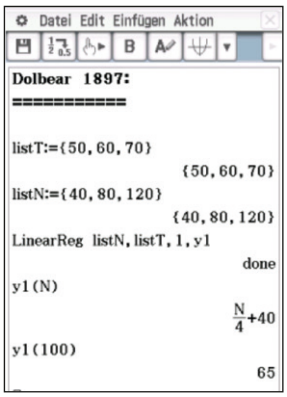
In der aktuellen heutigen Form des „Gesetzes“ $T = 40 + N/4$ steht der Term $N/4$ für die Anzahl der Zirprufe in 15 sec.

Anhand von 15 Datenpaaren (x_i, y_i) wird mithilfe der linearen Regression das Gesetz für eine andere Grillenart untersucht (x_i: Anzahl der gemessenen Zirprufe (pro sec.); y_i: gemessene Temperatur in °F).

Dolbear nutzte für seine Formel von 1897 den Datensatz $listT:=\{50,60,70\}$ und $listN:=\{40,80,120\}$.

Er berechnete mit dem „Gesetz“ die Temperatur für $N=100$ Zirprufe/min: $T = 50 + (100 - 40)/4 = 65$ [°F].

Kontrolle mit dem ClassPad:



Dolbear erwähnte, dass sich bei Veränderung der Zirprufe um 4 pro min die Temperatur um 1°F geändert haben muss, er beobachtete damals die Schneeweiße Blütengrille.

Der Datensatz von Pierce (1948)

Pierce geht in seinem Buch „The Songs of Insects“ darauf ein, dass unterschiedliche Arten von Grillen mit verschiedenen Frequenzen zirpen, der lineare Zusammenhang – wie von Dolbear vermutet – aber erhalten bleibt.

Die Daten wurden aus dem Schulbuch „Elementary Statistics“ von R. Johnson und P. Kuby (11. Auflage 2012, ISBN 978-0-8400-5389-3) entnommen, gemessen wurde die „Gestreifte Bodengrille“ (Striped Ground Cricket, Allonemobius fasciatus):

listx:={20,16,19.8,18.4,17.1,15.5,14.7,17.1, 15.4,16.2,15,17.2,16,17,14.4}

listy:={88.6,71.6,93.3,84.3,80.6,75.2,69.7, 82,69.4,83.3,79.6,82.6,80.6,83.5,76.3}

Darstellung der Datenpunkte als Punkteplot in der x-y-Ebene:

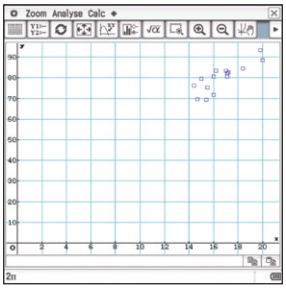


Abb. 1: x-Achse gestreckt

Lineare Regression:
$y(x) = 25.2 + 3.3x$

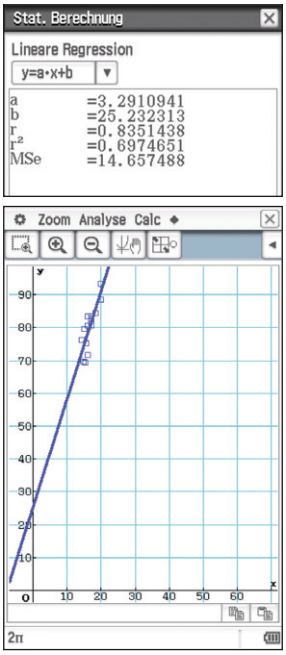


Abb. 2: Achsen unverzerrt

Auch für diese Grillenart ist ein linearer Zusammenhang gegeben, eine hohe Korrelation zwischen listx und listy besteht: $r = 0.8351$.

Das Bestimmtheitsmaß ($r^2 = 69{,}7\,\%$) sagt aus, dass ca. 70 % des Zusammenhanges von Zirprate und Temperatur durch das lineare Regressionsmodell erklärt werden. Die Streuung der Datenpunkte um die Regressionsgerade kann zufallsbedingt sein (z.B. Messfehler).

Für das gegebene Datenmaterial bieten sich weitere Aufgaben aus dem oben zitierten Schulbuch an:

1) Describe the pattern displayed. (strongly linearly increasing)

2) Using the linear equation, find the temperatures that correspond to 14 and 20 chirps, the approximate bounds for the domain of the study. (71°F and 91°F)

3) Does the range of temperature values bounded by the temperature values found in part 2 seem reasonable for this study? Explain. (Temperature range from 70°F to 90°F on summer nights.)

4) The next time you are out where crickets chirp on a summer night and you find yourself without a thermometer, just count the chirps and you will be able to tell the temperature. If the count is 16, what temperature would you suspect it is? (78°F)

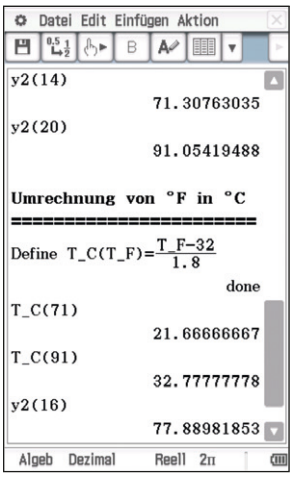
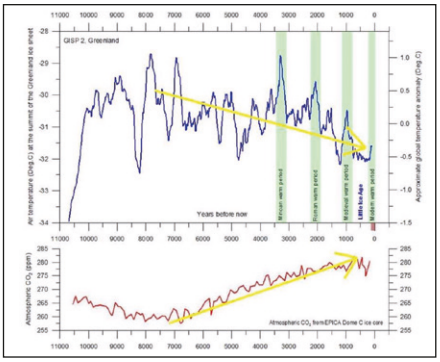


Abb. 3: Mit der Funktion $T_C(T_F)$ wird die Temperatur von Grad Fahrenheit in Grad Celsius umgerechnet; $y2(Z)$ ist die aus der Regression gewonnene lineare Funktion.

Der Manipulation auf der Spur

Autor: Antonius Warmeling, ehem. Fichte-Gymnasium, Hagen

In der Facebook-Gruppe „Klimawandel“ geht es um Theorien zum (menschengemachten) Klimawandel, so zumindest lautet die Ankündigung. Unter den mehr als 1200 Mitgliedern (Stand Okt. 2019) gibt es gefühlt zwei Drittel „Klimaskeptiker“, die mit den „Klimahysterikern“ darüber streiten, ob es den anthropogenen Klimawandel überhaupt gibt und ob alle Veränderungen durch „natürliche“ Schwankungen hervorgerufen werden. Dabei arbeiten viele nicht mit fairen Mitteln, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird.



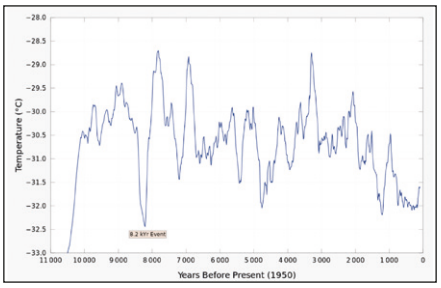
Antonio hatte die Grafiken mit der Frage „Was sieht man denn hier eigentlich?“ gepostet. An den vielen lachenden Smileys war zu erahnen, dass er sich freute, unter den Anhängern des menschengemachten Klimawandels mit seinen zwei gelben Pfeilen Verwirrung zu stiften.

Der erste Gedanke: „Wieso fallende Temperaturen, das sollte doch genau anders herum sein …“. Das Wort „Greenland“ in Abb. 1 verrät: Hier wird wieder der alte Bauerntrick angewandt, mit lokalen Daten den Anstieg der globalen Durchschnittstemperatur negieren zu wollen. Die Recherche zu GISP2 (Greenland Ice Sheet Project) ergibt: Die Temperaturen sind aus einem Eisbohrkern rekonstruiert. Auf der x-Achse sind 11000 bis 0 „years before now“ eingetragen.

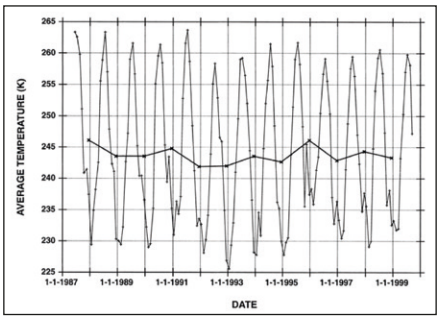
Aber welches Jahr entspricht dem Zeitpunkt $t=0$? Die CO_2-Konzentration in der zweiten Grafik liegt bei 280 ppm. Das ist der vorindustrielle Wert, im Jahr 2019 werden schon mehr als 410 ppm gemessen. Daher müssen sich die letzten rekonstruierten Daten auf einen deutlich zurückliegenden Zeitraum beziehen. Auch das ist ein üblicher Manipulationstrick: Bei sehr großen Zeitintervallen ist der Nullpunkt gar nicht genau zu erkennen. Die Antwort auf den frechen Post:

> Antonius Warmeling Die obere Grafik ist wieder mal ein Beispiel, wie man mit irgendwelchen lokalen Daten (hier Grönland) versucht, globale Veränderungen zu "widerlegen". Nach meiner Kenntnis der dortigen Temperaturänderungen würde es mich nicht wundern, wenn die neueren Daten nur bis in die 70er Jahre des letzten Jahrhunderts reichen. Wegen des Maßstab kann ich das aber nicht nachprüfen, denn die Quelle wurde vorsichtshalber nicht genannt

Jetzt ist der Forschergeist geweckt, „GISP2 Greenland“ wird recherchiert. Wikipedia liefert die folgende Grafik. Der Nullpunkt wird hier mit 1950 angegeben und die Datenlinie hört schon vor dem Nullpunkt auf. Da in der Beschreibung des Bildes die Datenquelle angegeben ist, können die Daten heruntergeladen werden. Ergebnis: Die letzte rekonstruierte Temperatur (-31,6 °C) bezieht sich auf das Jahr 1855 (1950 – 95). Jetzt passt alles zusammen.



Wie sind die Temperaturen heute in Grönland? Es heißt doch, dass dort die Temperaturen im Vergleich mit dem vorindustriellen Zeitraum besonders stark gestiegen seien. Die Suche nach Messstationen in Grönland ist erfolgreich: „Summit“ misst seit 1989 die Temperaturen genau dort, wo der Eiskern zu den obigen Daten gebohrt wurde. Die Temperaturdaten für den 12-Jahres-Zeitraum von 1987 – 1999 sind zugänglich. Angegeben sind die Monats- und die Jahresmitteltemperaturen. Die Studie enthält zusätzlich noch interessante Informationen im Hinblick auf die Auswirkungen des Pinatubo-Vulkanausbruchs im Juni 1991.



Die Jahresdurchschnittstemperaturen lagen in den 12 Jahren zwischen 246 K und 242 K (letztere in den beiden Jahren nach dem Vulkanausbruch), das entspricht -27 °C bis -31 °C. Die Temperaturen sind im Vergleich mit dem rekonstruierten Wert von 1855 deutlich angestiegen.

Antonio hat seinen Post mittlerweile gelöscht. Entweder hat er zu viel Gegenwind bekommen oder sein Ziel erreicht, die Klimahysteriker zu ärgern. Egal wie seine Motivation war, solche Posts sollten nicht unwidersprochen bleiben.

Umsetzung im Unterricht

Bildung soll befähigen, aktiv an der gesellschaftlichen Entwicklung teilzuhaben, in der Lage zu sein, diese mündig mitzubestimmen und auszugestalten. Dazu gehört auch eine gute Medienkompetenz; in den Zeiten, in denen soziale Netzwerke ein wichtiges Kommunikationsmittel sind, eigentlich unentbehrlich. In einigen Fällen hilft da Mathematik durchaus weiter, wie an dem obigen Beispiel gezeigt wurde.

Das Beispiel passt gut zur Kompetenzerwartung im NRW-Kernlehrplan: Die Schüler „lesen grafische statistische Darstellungen kritisch und erkennen Manipulationen“ (Kompetenzbereich Stochastik). Natürlich gelingt eine solche wertende Untersuchung nicht in einer Stunde oder Doppelstunde, sie ist eine Langzeitaufgabe. In NRW ist das sehr gut möglich im Wahlpflichtbereich II, etwa in einem Kurs „Mathematik mit dem PC“.

Aufgabe

1 Formuliere, welche Information uns Antonio damit geben wollte. Wie ist deine Meinung dazu?
2 Untersuche nun die Grafik genauer (Achsenbeschriftung, Überschrift …), kläre unklare Begriffe. Versuche herauszufinden, woher die Daten stammen und auf welche Region sie sich beziehen.
3 Recherchiere die zugehörigen Daten und erstelle eine eigene Grafik.
4 Formuliere eine Antwort auf den Post.

Hinweis 1

Gib den Begriff GISP2 Greenland in eine Suchmaschine ein → so kannst du die Grafik im englischen Wikipedia finden.

Hinweis 2

In der Beschreibung zur Grafik Greenland Gisp2 Temperature.svg findest du den Link zu den Daten.

Daten 1

Mit dem Link aus Hinweis 2 kommst du zur Seite Paleo Search.

- Wähle bei General Search → ice cores
- Und bei Advanced Search → Alley, R.B.

Daten 2

Die heruntergeladenen Daten sind im txt-Format. Du kannst sie z.B. mit Excel in das xlsx-Format umwandeln.

Daten 3

Aktuelle Temperaturdaten der Station Summit (Nähe Eiskernbohrung) findet man in Abb. 9: https://journals.ametsoc.org/doi/full/10.1175/1520-0450%282001%29040%3C0741%3AADYOTO%3E2.0.CO%3B2

Die Sterilisation von Lebensmitteln

Autor: Dr. Jens Weitendorf, Universität Hamburg

Um sterile Lebensmittel zu erzeugen, müssen diese erhitzt werden. Das Problem dabei ist, dass durch die Erhitzung auch Vitamine zerstört werden. Diese beiden Vorgänge werden durch die folgenden Funktionen beschrieben:

Vitamin: $f_T(t) = a_0 \cdot e^{-(5{,}7190\cdot 10^{11}\cdot e^{\frac{-14003}{T}})\cdot t}$

Bakterie: $g_T(t) = b_0 \cdot e^{-(2{,}0468\cdot 10^{38}\cdot e^{\frac{-35792}{T}})\cdot t}$

Gesetzlich vorgeschrieben ist, dass durch einen Erhitzungsprozess die Anzahl der Bakterien so zu reduzieren ist, dass der Anteil nur noch 0,00001 % beträgt. Daraus ergibt sich die Frage, wie die Temperatur T (in Kelvin) und die Sterilisationszeit t (in sec) zu wählen sind, sodass möglichst viele Vitamine erhalten bleiben.
Da hier Prozentsätze vorgegeben sind, ist die Wahl $a_0 = b_0 = 1$ sinnvoll.

Um der gesetzlichen Vorschrift zu genügen, muss $g_T(t) = 0{,}0000001$ sein. Auflösen der Gleichung nach der Zeit t ergibt:

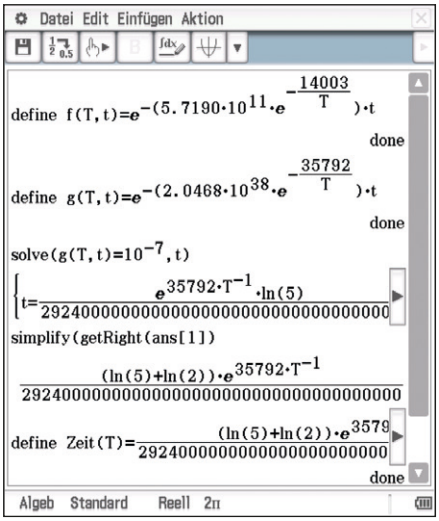


Abb. 1: Definition der relevanten Funktionen

Da die Funktionen unübersichtlich sind, ist es hilfreich die entsprechenden Funktionsgraphen zeichnen zu lassen. Für den Überblick sind Werte für $T = 380$ K bzw. $T = 390$ K hilfreich (s. Abb. 2).

Zu erkennen ist, dass der Bereich zwischen $T = 380$ K und $T = 400$ K interessant ist; die Abbildung lässt ein genaues Ablesen aber nicht zu. Es ist daher sinnvoll, diesen Bereich in die Tabellenkalkulation zu übertragen. Aus Abb. 3 wird deutlich, dass mehr Vitamine erhalten bleiben, wenn die Temperatur höher und deswegen die Zeit kürzer ist. Exakte Werte lassen sich im Rahmen des mathematischen Modells nicht ermitteln. Welche Temperatur gewählt wird, hängt von den technischen Möglichkeiten ab. Firmen hüten die Werte teilweise als Betriebsgeheimnis. Eine Meierei gab die Auskunft, dass sie eine Temperatur von ca. 140 °C wählen. Für eine Zeit von ca. 5 s bleiben dabei etwa 99,5 % der Vitamine erhalten.

Dieses Beispiel zeigt, dass nicht alle Optimierungsprobleme mit der in der Analysis üblichen Methode zu lösen sind. Dies ist auch ein Beispiel für die Notwendigkeit, Funktionen in allen drei Darstellungsvarianten zu diskutieren.

Abb. 2: Graphen der Zerfallsfunktionen

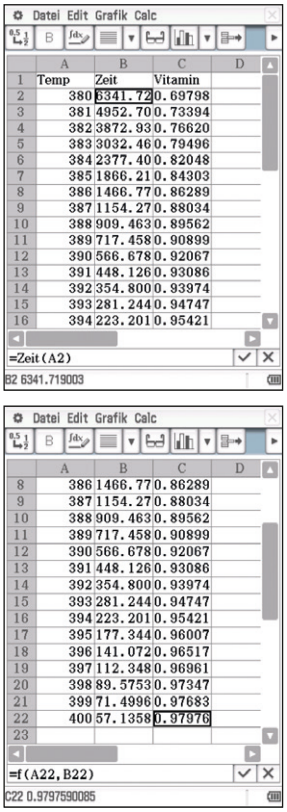


Abb. 3: Erhalt des Vitamins für Temperaturen ab T = 380 K

Den Klimawandel mit Mathematik und Naturwissenschaften besser verstehen

Klimadaten messen, Umweltstatistiken nutzen und Klimaprognosen nachvollziehen – um komplexe Sachverhalte zum hochaktuellen Thema zu verstehen, sind Mathematikkenntnisse gefragt. Im neuen „Lehrerspezial“ bekommen Mathematik- und MINT-Lehrkräfte für ihren Unterricht ab der 5. Klasse Anregungen rund um das Themenfeld Klima. Ob Messungen der Gewässerqualität und Modellierung von Wetterdaten oder Integralrechnung mit Temperaturverläufen – das Lehrerspezial bietet viele Beispiele für einen anschaulichen Matheunterricht, der an Interessen der Jugendlichen anknüpft und dazu beiträgt, dass Schülerinnen und Schüler die große Herausforderung „Klimawandel“ besser verstehen.

Experimente unterstützen dabei, die physikalischen Prozesse im Klimasystem nachzuvollziehen. Mit dem Messwerterfassungssystem C-Lab und dem Grafikrechner FX-CG50 lassen sich Daten wie etwa CO_2-Gehalt und Temperaturen leicht messen und die Entwicklung der Messwerte live verfolgen.
Zur aktuellen Lehrerspezial-Ausgabe:
www.casio-schulrechner.de/lehrerspezial

Dreieck im Parabelsegment

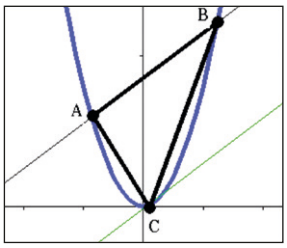
Autor: Dr. Wilfried Zappe, Goetheschule, Ilmenau

Zur Forschungsaufgabe „Eine Explorationsaufgabe aus der Analysis“ auf Seite 10/11 in der letzten Ausgabe hat uns folgender Leserbrief mit neuen Erkenntnissen erreicht:

Für zwei Punkte A und B auf einer Parabel $y = f(x) = x^2$ ist der Punkt C zwischen ihnen, der das Dreieck ABC mit der größten Fläche ergibt, derjenige Punkt, an dem die Tangente parallel zur Geraden durch A und B verläuft.

Aufgabe

Untersuchen Sie, in welchem Verhältnis der Flächeninhalt des maximalen Dreiecks ABC zum Inhalt der Fläche des Parabelsegmentes steht, das die Gerade $g(AB)$ mit der Parabel $y = x^2$ einschließt.



a) Weisen Sie diese Aussagen für $A(-1; f(-1))$ und $B(2; f(2))$ nach, ohne digitale Hilfsmittel zu verwenden.

b) Weisen Sie diese Aussagen für $A(a; f(a))$ und $B(b; f(b))$ mit $a < b$ nach. Nutzen Sie Ihr CAS.

Verwenden Sie zur Lösung

1) das Vektorprodukt für die Berechnung der Dreiecksfläche,

2) die Tatsache, dass die Funktionen $f(x)$ und $h(x)$ mit $f(x) = k \cdot \sqrt{h(x)}$ ein lokales Extremum an derselben Stelle x_e besitzen, falls ein solches lokales Extremum existiert.

Teilaufgabe a – ohne CAS

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von c kann über das Vektorprodukt $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$ ermittelt werden. Da das Vektorprodukt nur im R^3 sinnvoll ist, werden die z-Koordinaten der Vektoren null gesetzt, um dreidimensionale Vektoren zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} c+1 \\ c^2-1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\cdot(c+1) - 3\cdot(c^2-1) \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c - c^2 + 2 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt: $A_\Delta(c) = \frac{1}{2} \cdot \left| 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c - c^2 + 2 \end{pmatrix} \right|$

$$= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{(c - c^2 + 2)^2} = \frac{3}{2} \cdot |c - c^2 + 2|$$

Da nur die positiven Werte von $A_\Delta(c)$ interessieren, wird die Funktion $y = h(x) = c - c^2 + 2$ auf lokale Extrema untersucht:

$h'(x) = 1 - 2c$; damit ist $h'(x) = 1 - 2c = 0$ für $c = \frac{1}{2}$ und $h''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$

Prüfung der Parallelität

$A(-1; 1)$; $B(2; 4)$; $C(c; c^2)$: Anstieg m_1 der Geraden $g(AB)$: $m_1 = \frac{4-1}{2+1} = 1$

Anstieg m_2 der Tangente an $f(x)$: $f'(x) = 2x$, also $m_2 = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Damit ist $m_1 = m_2$, die Gerade $g(AB)$ ist parallel zur Tangente an die Parabel an der Stelle $c = \frac{1}{2}$.

Das Verhältnis der Flächeninhalte

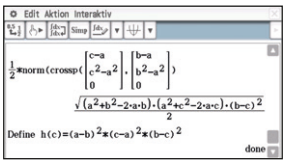
Der maximale Flächeninhalt des Dreiecks ist $A_\Delta(c) = \frac{3}{2} \cdot \left| \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \right| = \frac{27}{8}$. Die Gerade $g(AB)$ hat die Gleichung: $y = m_1 \cdot x + n = 1 \cdot x + n$. Das Einsetzen der Koordinaten des Punktes $A(-1; 1)$ ergibt $n = 2$, also $y = x + 2$.

Der Flächeninhalt des Parabelsegmentes:

$$A_S = \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 \, dx = \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2x - \frac{1}{3} \cdot x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

Damit ist das Verhältnis $\frac{A_\Delta}{A_S} = \frac{27/8}{9/2} = \frac{3}{4}$

Teilaufgabe b – mit CAS
Das Maximum der Flächeninhaltsfunktion

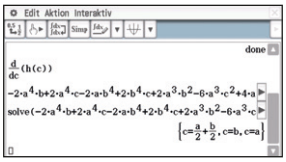


$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \right|$$

$$A_\Delta(c) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab) \cdot (a^2 + c^2 - 2ac) \cdot (b - c)^2}$$

Der Radikand wird auf lokale Extrema untersucht (binomische Formeln!):

$h(c) = (a - b)^2 \cdot (a - c)^2 \cdot (b - c)^2$



Notwendige Bedingung:

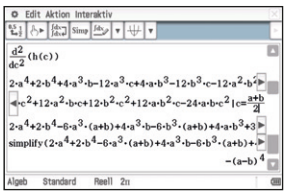
Bilden der 1. Ableitung von h(c) und Berechnen ihrer Nullstellen. Die Nullstellen von h'(c) sind $c = \frac{a+b}{2}$ sowie $c=a$ und $c=b$.

Wegen $a < c < b$ ist nur $c = \frac{a+b}{2}$ von Interesse.

Hinreichende Bedingung:

h''(c) an der Stelle $c = \frac{a+b}{2}$ bilden. Eine Vereinfachung ergibt $h''\left(\frac{a+b}{2}\right) = -(a-b)^4$. Dieser Term ist immer negativ, an der Stelle $c = \frac{a+b}{2}$ liegt ein lokales Maximum von h(x) vor.

Diese Stelle ist auch das lokale Extremum von $A_\Delta(c)$. Da h(c) und $A_\Delta(c)$ dasselbe Vorzeichen haben, besitzt $A_\Delta(c)$ an der Stelle $c = \frac{a+b}{2}$ ebenfalls ein lokales Maximum.



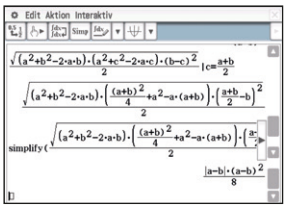
Vergleich der Anstiege der Geraden g(AB) und der Tangente an der Maximalstelle

Anstieg m_1 der Geraden $g(AB)$: $m_1 = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$

Anstieg m_2 der Tangente an $f(x)$: $f'(x) = 2x$, also $m_2 = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) = a + b$. Da $m_1 = m_2$ ist, sind die Gerade $g(AB)$ und die Tangente parallel.

Berechnung der Flächeninhalte

1) Das maximale Dreieck



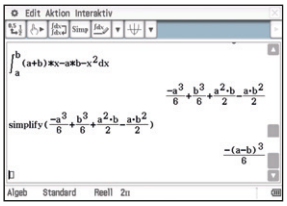
Der Wert des lokalen Maximums von $A_\Delta\left(\frac{a+b}{2}\right)$: Nach Vereinfachung $A_\Delta\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{|a-b| \cdot (a-b)^2}{8}$.

Wegen $a < b$ gilt: $A_\Delta\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\frac{(a-b)^3}{8}$.

2) Das Parabelsegment

Die Gleichung der Geraden $g(AB)$: $y = mx + n$; m wurde zu $m_1 = a + b$ berechnet. Durch Einsetzen der Koordinaten von $A(a; a^2)$ wird n bestimmt: $a^2 = (a + b) \cdot a + n$, daher ist $n = -a \cdot b$.

Ergebnis: $g(AB)$: $y = (a + b) \cdot x - a \cdot b$



Aus dem Ansatz $A_S = \int_a^b ((a + b) \cdot x - a \cdot b - x^2) dx$ ergibt sich der Flächeninhalt des Parabelsegmentes unter Berücksichtigung von a < b: $A_S = -\frac{(a-b)^3}{6}$.

3) Das Verhältnis der Flächeninhalte

Für $b > 0$ ist das Verhältnis der beiden Flächeninhalte stets $\frac{A_\Delta}{A_S} = \frac{-\frac{(a-b)^3}{8}}{-\frac{(a-b)^3}{6}} = \frac{3}{4}$

Lehrer-Info-Service

Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen in österreichischen Lehrplänen harmoniert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaussand zum Beispiel zu folgenden Themen:

- CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten
- Informationen zu regionalen Veranstaltungen
- Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.

Anmeldung

Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten. Dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

Anmeldung im Netz

Unter dieser Web-Adresse können Sie unsere Informationen abonnieren:
www.casio-schulrechner.at/lehrerinfoservice

Anmeldung per QR-Code

Scannen Sie einfach den **QR-Code**.

Kontakt

Educational Team

Unsere Spezialisten rund um das Thema Schulrechner von CASIO und deren Einsatz im Mathematikunterricht stehen Ihnen bei Fragen jederzeit zur Verfügung:
Telefon: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-100
E-Mail: education-austria@casio.de
Homepage: www.casio-schulrechner.at

CASIO European Support Center

Für Beratung und technische Informationen wenden Sie sich an das CASIO European Support Center:
Telefon: +49 (0)40/528 65-802
Fax: +49 (0)40/528 65-888
E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen

Bei Fragen rund um das Thema Reparatur stehen Ihnen Experten unter folgenden Kontaktdaten zur Verfügung:
Telefon: +49 (0)40/528 65-203
Fax: +49 (0)40/528 65-242
E-Mail: repair@casio.de

Testsoftware und Updates zum Herunterladen

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: **edu.casio.com**

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.6000
FX-CG20/50	3.11/3.40
FX-9860 GII/GIII	2.09/3.20
Software	
ClassPad II Manager	2.01.60
ClassPad App	über App-Stores (Android/IOS)
FX-CG50 Manager	3.20 (Win/Mac)
FX-CG20 Manager	3.10.0020 (Win/Mac)
FX-Manager Plus	2.10.0020 (Win)
ClassWiz Emulator	2.01
ES Plus Emulator	5.00

Updates bis Januar 2020

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm

- Kooperationsschulen
- Lehrer-Fortbildungen und Webinare
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-535

Bildquellen:
S. 1: M. Mettin, Offenbach; www.m-momente.de

Vertriebspartner Österreich:
Ivo Haas GmbH
Saalachstraße 36 • 5020 Salzburg
Tel.: 0662/430 567-0 • Fax: 0662/430 567-83
E-Mail: casio@ivohaas.com

Copyright für alle Beiträge, soweit nicht anders angegeben, bei CASIO Europe GmbH. Für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen wird keine Haftung übernommen. Nachdruck nur mit schriftlicher Genehmigung und Urhebervermerk.

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team • education@casio.de

Design:
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, HH

Design-, Farbabweichungen, Irrtümer und technische Änderungen vorbehalten. Die in diesem CASIO forum gezeigten Screenshots sind Simulationen und können von der Originaldarstellung abweichen. Verfügbarkeit der Produkte auf Anfrage. Alle Produktnamen sind Warenzeichen der jeweiligen Hersteller. Stand: Januar 2020.

4 549526 607103
120SGR-FORUM27-AT