5. Anwendungsaufgaben

5.1 Dose

Titel	V2 – 5-1 Dose 2
Version	Mai 2011
Themenbereich	Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung
Themen	Optimierung
Rolle des GTR	Lösen von Gleichungen Berechnungen von Ableitungen Umformungen von Termen Zeichnen von Graphen
Methoden & Hinweise	Der Aufgabenteil a) kann als wiederholende Hausaufgabe aufgegeben werden. Aufgabenteil b1) kann arbeitsteilig in Gruppen bearbeitet werden. Jeder bearbeitet ein Volumen. Die Ergebnisse werden anschließend zusammengetragen. Verfügen die Schülerinnen und Schüler über gute technische Kenntnisse, so macht diese Aufteilung der Arbeit allerdings keinen Sinn, weil die Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse in kurzer Zeit selbst mit der Tabellenkalkulation erstellen können. Im Gegensatz zu der Dosen-Aufgabe in V1 geht es in der Aufgabe Dose 2 im Wesentlichen nicht um die Berechnung der optimalen Größen von Oberflächen und Volumen einer Dose. Für die Berechnung optimaler Dosenmaße benötigt man bei der Benutzung des GTR keine Differenzialrechnung. Erst die Beantwortung der Frage: „Ist das immer so?“ gelingt nicht mehr ohne Differenzialrechnung. Im Prinzip ist diese Aufgabe ohne den GTR lösbar. In diesen Aufgaben geht es aber nicht darum, dass Schülerinnen und Schüler Termumformungen üben, sondern dass sie mit deren Hilfe Erkenntnisse gewinnen. Insbesondere Schülerinnen und Schüler, die mit diesen Termumformungen Schwierigkeiten haben, können sich durch den GTR ganz auf das Wesentliche, hier das Aufstellen von funktionalen Zusammenhängen und die anschließende Lösung von Optimierungsaufgaben konzentrieren.
Quelle	Die ausgeprägte Aufteilung in einen numerisch berechnenden Teil und in die allgemeine Fragestellung „Ist das immer so?“, geht auf einen Vortrag von Prof. Rainer Danckwerts zurück, den er unter dem Titel „Analysis anders unterrichten“ im September 2008 an der Universität Dortmund gehalten hat.
Zeitlicher Rahmen	1 Schulstunde und Hausaufgaben

Diese Aufgabe bezieht sich auf eine Aufgabe aus V1, bei der zu einem gegebenen Volumen optimale Dosenmaße bezüglich des Materialverbrauchs bestimmt wurden. Falls Sie die Aufgabe zurzeit nicht parat haben, hier noch ein paar Erinnerungen.

Viele Lebensmittel sind in zylinderförmigen Blechdosen abgepackt. In dieser Aufgabe wurde untersucht, ob dabei auch auf einen möglichst geringen Verbrauch von Verpackungsmaterial, hier verzinktem Blech, geachtet wurde.

Bis zum 10. April 2009 war bei Blechdosen vorgeschrieben, dass Lebensmittel nur bestimmte Dosengrößen in den Verkauf kommen können. Seit dem 11. April ist das anders.

In den ersten Aufgabenteilen wird eine „Standard-Blechdose vom Typ 850“ betrachtet, eine Dose mit einem Volumen von $850\ \text{cm}^3 = 850\ \text{ml}$.

a. Untersuchen Sie, welche Maße eine zylindrische Dose vom Typ 850 haben muss, damit der Materialverbrauch minimal ist. Geben Sie den minimalen Oberflächeninhalt an. Sehen Sie dabei die Dose wieder als idealisierte Dose an.

   Hinweis: Benutzen Sie diesmal Methoden der Differenzialrechnung.
   Auch wenn Sie in der entsprechenden Aufgabe aus V1 die minimale Oberfläche schon mal berechnet haben, so geht es einerseits darum, dass Sie sich auch in die neue Methode einarbeiten. Zum anderen dient es auch als Vorbereitung für neue Erkenntnisse.

b. Im Aufgabenteil a) bekommt man heraus, dass das Verhältnis vom Radius zur Höhe etwa $\frac{1}{2}$ ist.
   Ist das ein Zufall, oder ist das immer so? D. h. ist bei einem beliebig vorgegebenen Volumen und den entsprechenden Maßen beim minimalen Materialverbrauch das Verhältnis vom Radius zur Höhe immer etwa $\frac{1}{2}$?
   Bearbeiten Sie zur Lösung dieses Problems die folgenden Aufgaben.

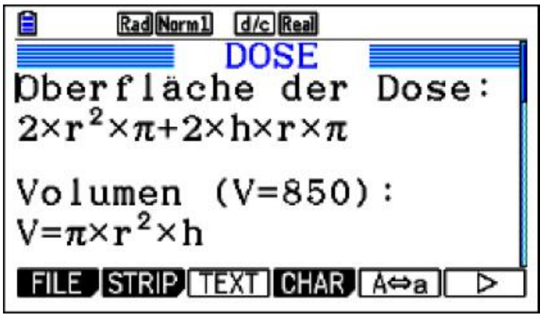
   b1. Bestimmen Sie jeweils für die Volumina 850 ml, 800 ml, 1000 ml, 1500 ml und 500 ml die Maße des geringsten Materialverbrauchs. Bestimmen Sie dabei auch jeweils das Verhältnis vom Radius zur Höhe.

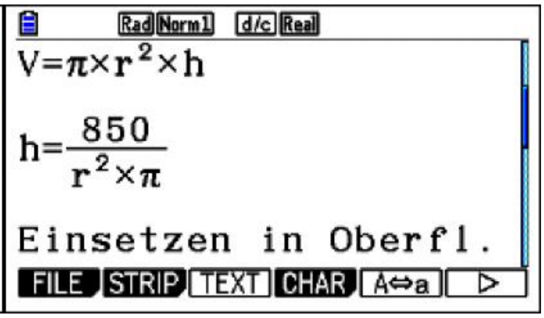
   b2. Leiten Sie das Verhältnis vom Radius zur Höhe bei beliebigem Volumen V her. Natürlich beim geringsten Materialverbrauch.

   b3. Bestimmen Sie das Volumen in Abhängigkeit eines beliebigen Volumens *V*.

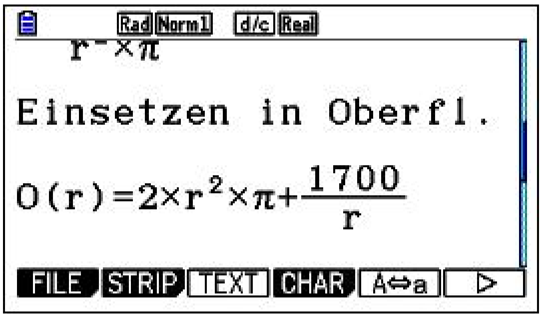
c. In der ersten Version der Dosenaufgabe in V1 hatten Sie festgestellt, dass optimalen Größen eineindeutig zueinander in Beziehung stehen. D. h. bestimmt man für Dosen vom Typ 850 diejenige mit dem minimalen Materialverbrauch, so ist umgekehrt das maximale Volumen zu dieser minimalen Oberfläche wieder das ursprüngliche Volumen von 850 ml. War das ein Zufall? Untersuchen Sie die Gesetzmäßigkeiten.

a. Sei *r* der Radius und *h* die Höhe der Dose.



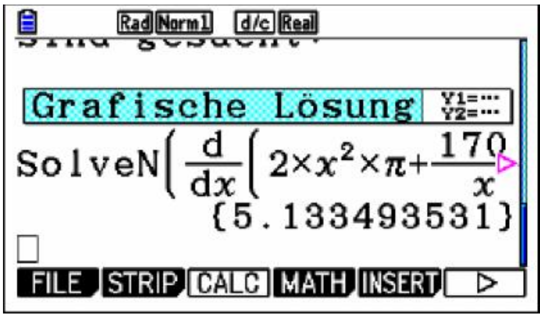


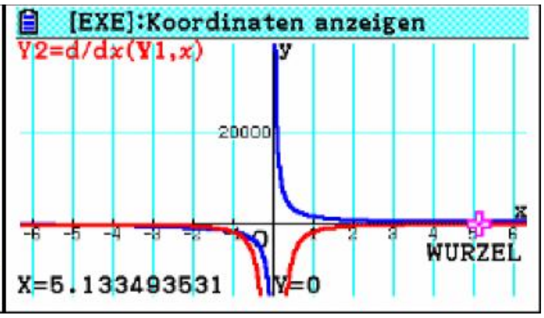
Damit ist die Oberfläche (nur) noch eine Funktion in Abhängigkeit von einer Variablen und man kann die Verfahren der Differenzialrechnung zur Bestimmung von Extremwerten darauf anwenden.



Tipp: *Für derart lange Berechnungen, die aufeinander Aufbauen empfiehlt sich die eActivity-Anwendung des GTR. Damit lassen sich die einzelnen Rechenschritte dokumentieren und die gesamte Rechnung lässt sich leicht speichern und archivieren.*

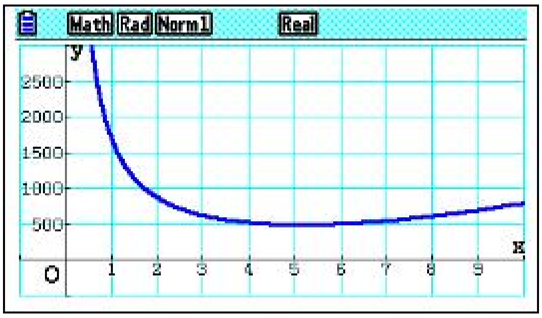
Es sind die Nullstellen der ersten Ableitung von *O* gesucht:





Nun muss überprüft werden, ob die gefundene Lösung tatsächlich eine Extremstelle ist:

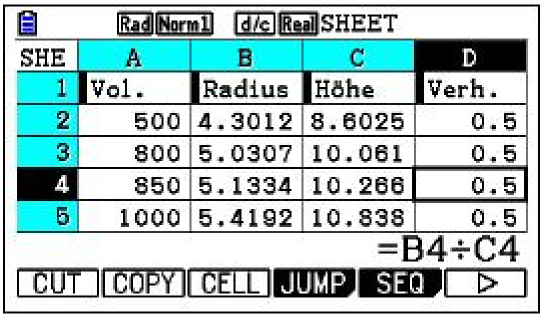
Hier wird mit dem Verlauf des Graphen argumentiert. Ebenso sind Argumente mit der zweiten Ableitung, ein Einsetzen beiderseits der möglichen Extremstelle oder eine Zeichnung des Graphen sinnvoll.



O ist für kleine (positive) *r* (sehr) groß, denn der erste Teilterm ist für kleine *r* ebenfalls klein und der zweite, große Teilterm überwiegt.
O ist für große (positive) *r* (sehr) groß, denn der erste Teilterm ist für große *r* ebenfalls groß und überwiegt.
Da eine (und nur eine) mögliche Extremstelle gefunden wurde, ist diese aufgrund des Verlaufs des Graphen eine Minimumstelle.

Alternative Argumentation:
Strebt r (für positive r) gegen null, so wächst $O(r)$ aufgrund des zweiten Teilterms über

	alle Grenzen. Wird r beliebig groß, so wächst $O(r)$ *ebenfalls über alle Grenzen.* Wird das Ergebnis in (3) eingesetzt, so erhält man $h \approx 10{,}267$ und durch Einsetzen in(4) folgt für die Oberfläche ungefähr 496,738. Eine Dose vom Typ 850 hat bei minimalem Materialverbrauch die Maße: $r \approx 5{,}1$ cm, $h \approx 10{,}3$ cm und $O \approx 497$ cm^2.
b1.	Die Berechnung verläuft analog zum ersten Aufgabenteil.



b2. Im Prinzip verläuft dieser Aufgabenteil wie a), nur dass hier anstelle von 850 die Variable *v* eingeführt und benutzt wird.

Sei *r* der Radius und *h* die Höhe der Dose.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$$

Einsetzen in die Oberflächenformel ergibt:

$$O(r) = 2r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r}$$

$$O'(r) = \frac{4r^3 \cdot \pi - 2V}{r^2}$$

Die Ableitung wird aufgelöst nach r: $r = \dfrac{\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}}{\sqrt[3]{2}}$

Einsetzen in die Formel für die Höhe h:

$$h = \frac{\sqrt[3]{4} \cdot V}{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \pi}$$

Verhältnis von Radius zu Höhe: $\dfrac{\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}}{\sqrt[3]{2}} \Big/ \dfrac{\sqrt[3]{4} \cdot V}{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \pi} = \dfrac{1}{2}$

b3. Setzt man den in b2) herausgefundenen Radius in die Formel für die Oberfläche ein, so erhält man $O_{min} = 3 \cdot \sqrt[3]{2\text{®}} \cdot \sqrt[3]{v^2}$

c. Im Prinzip verläuft dieser Aufgabenteil wie b 2), nur dass hier das Volumen optimiert wird.

Sei *r* der Radius,*h* die Höhe der Dose sowie *o* ein beliebiger Oberflächeninhalt.

Hier ist eine händische Lösung erforderlich:

$$O(r,h) = 2r^2\pi + 2h \cdot r\pi$$
$$2r^2\pi + 2h \cdot r\pi = Ober$$

Auflösen nach h ergibt:

$$h = r + \frac{Ober}{2r\pi}$$

Einsetzen von h in die Volumenformel ergibt:

$$V = -r^2 \cdot (r - \frac{Ober}{2r\pi}) \cdot \pi$$

Ableitung von V:

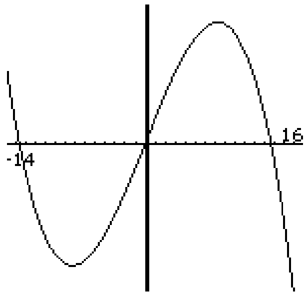
$$V'(r) = \frac{-(6 \cdot r^2 \cdot \pi - Ober}{2}$$

Auflösung nach r ergibt:

$$r = \frac{-\sqrt{6 \cdot Ober}}{6 \cdot \sqrt{\pi}}; r = \frac{\sqrt{6 \cdot Ober}}{6 \cdot \sqrt{\pi}}$$

Da *r* der Radius einer Dose ist, ist nur die positive Lösung sinnvoll.

Analog zum Aufgabenteil c) kann man für jedes *o* mit dem Verlauf des Graphen argumentieren: *V* ist eine Polynomfunktion dritten Grades mit negativem Leitkoeffizienten. Für sehr große *r* strebt $V(r)$ deshalb gegen $-\infty$. Da $r = 0$ eine Nullstelle ist, folgt aus der Symmetrie der beiden Extremstellen, dass das eben gefundene (positive) *r* eine Maximumstelle ist.



Einsetzen der Formel für den Radius in die Volumenformel liefert:

$$V(r) = \frac{\sqrt{6} \cdot Ober^{\frac{3}{2}}}{18 \cdot \sqrt{\pi}}$$

Setzt man nun dieses maximale Volumen in den minimalen Oberflächeninhalt aus b3) ein, so erhält man wieder *o.*