Vorschläge für den Unterricht in der Sek I mit dem ClassPad II

Jens Weitendorf

1. Auflage – April 2017

Inhaltsverzeichnis

Vorwort und Ziel

Der ClassPad bietet neben Erleichterungen beim Rechnen, Umgang mit Termen, beim Erzeugen grafischer Darstellungen von Funktionen usw. vor allem auch vielfache Hilfe für Schülerinnen und Schülern beim Verständnis von Mathematik. Hierauf soll im Folgenden insbesondere eingegangen werden. Der vorliegende Band bezieht sich auf die Sekundarstufe 1 und besteht aus zwei Teilen. Der Hauptteil ist für Lehrerinnen und Lehrer gedacht. Im zweiten Teil findet man Arbeitsbögen für Schülerinnen und Schüler. Inhaltlich werden Stoffgebiete diskutiert, bei der Behandlung derer der Einsatz des ClassPad sinnvoll erscheint. Dabei kann es zu Redundanzen kommen, da die Arbeitsbögen für die Schülerinnen und Schüler so gestaltet sind, dass sie ohne weitere Hilfen bearbeitet werden können. Allerdings sind sie am Anfang ausführlicher; später werden geringe Kenntnisse in Bezug auf den ClassPad vorausgesetzt.

Das Curriculum wird nicht verändert; es ändert sich allerdings nach meiner Auffassung der Fokus. Ich versuche, einen Weg zu konkretisieren, der dem Untertitel von Weigand / Weth: „Computer im Mathematikunterricht: Neue Wege zu alten Zielen" entspricht. Auch schon in der Sekundarstufe 1 hat man es oft mit Funktionen zu tun, die von mehr als einer Variablen abhängig sind. Dieses zieht sich beginnend von der Prozentrechnung, über lineare, quadratische, exponentielle bis zu den trigonometrischen Funktionen durch den gesamten Lehrstoff. Die Neuen Medien helfen in Bezug auf dieses Verständnis, indem die Funktionen mehrdimensional definiert werden können und der Einfluss einzelner Variablen, die schon bisher als Parameter verstanden worden sind, zum Beispiel unter Verwendung von Schiebereglern deutlich gemacht werden kann. Des Weiteren hat man die Möglichkeit, quasi per Knopfdruck die Darstellungsform einer Funktion zu verändern. Dies ist insofern bedeutsam, dass den Lernenden weitere Zugangsmöglichkeiten zur Mathematik eröffnet werden. Besonders hervorzuheben ist die Visualisierung. So findet sich im Vorwort zu Haftendorn: "Mathematik sehen und verstehen"

Meine Erfahrung aber ist, dass auch der übliche mathematische Lehrstoff, wie er an Schule und Hochschule allgemein und natürlich mit rechnerischen Anteilen verlangt wird, entschieden besser bewältigt wird, wenn er mit visuell gestütztem Verstehen gepaart ist. (ebenda S. 3/4)

Problematisch ist zwar in dem Zusammenhang, dass bei Verwendung einer dynamischen Geometrie Software die Einsicht in die Notwendigkeit eines Beweises für die Lernenden erschwert wird. Auf der anderen Seite ist es für die Nachhaltigkeit von großer Bedeutung, dass eine mathematische Tatsache als richtig erkannt wurde. Hier kann eine Visualisierung von großer Hilfe sein, da der mathematische Beweis für Schülerinnen und Schüler teilweise schwer, wenn überhaupt, nachvollziehbar ist. Hinzu kommt, dass die Bedeutung eines Beweises oft nicht gesehen wird. So habe ich einmal eine Klasse, nachdem mehrere Beweise für den Satz von Pythagoras im Unterricht behandelt worden sind, gefragt, ob dadurch der Satz „richtiger" ist. Die Klasse hat dieser

Aussage einstimmig zugestimmt. Diese Haltung der Schülerinnen und Schüler wird dadurch verständlich, dass es in ihrem Leben außerhalb von Mathematikstunden ja in der Regel nicht die Situation gibt, dass ein Argument die Güte einer Aussage entscheidet. Von daher erscheint es mir wichtig, dass man neben formalen auch visuelle Argumente für mathematische Aussagen hat.

Vor allem für den Einsatz und die Diskussion von Simulationen ist der Einsatz neuer Medien hilfreich. Ich behandle diese nur im Zusammenhang mit dem obigen Konzept. Ansonsten verweise ich den interessierten Leser auf „Ludwicki / Weitendorf: Programmieren mit dem ClassPad II".

Die Reihenfolge der behandelten Themen entspricht teilweise nicht der Reihenfolge der Themen in den Curricula. Ich habe im Zweifelsfall der thematischen Zusammengehörigkeit den Vorzug gegeben. Abschließend ist es mir wichtig zu betonen, dass es sich bei den von mir dargestellten Inhalten um Vorschläge handelt. Die Leserin bzw. der Leser möge selbst entscheiden, worauf sie bzw. den Fokus legen möchte.

Da meines Erachtens in den Schulbüchern wenig bis gar nichts dazu zu finden ist, wie man die neuen Medien nicht nur arbeitserleichternd sondern auch verständnisfördernd einsetzen kann, schien es mir wichtig zu sein, dieses in einem Heft zusammenzustellen. Es ist selbstverständlich, dass die Zusammenstellung nicht vollständig ist und dass es sich um Vorschläge handelt.

Für Kritik und Ergänzungen bin ich dankbar. (JWeitendorf@t-online.de)

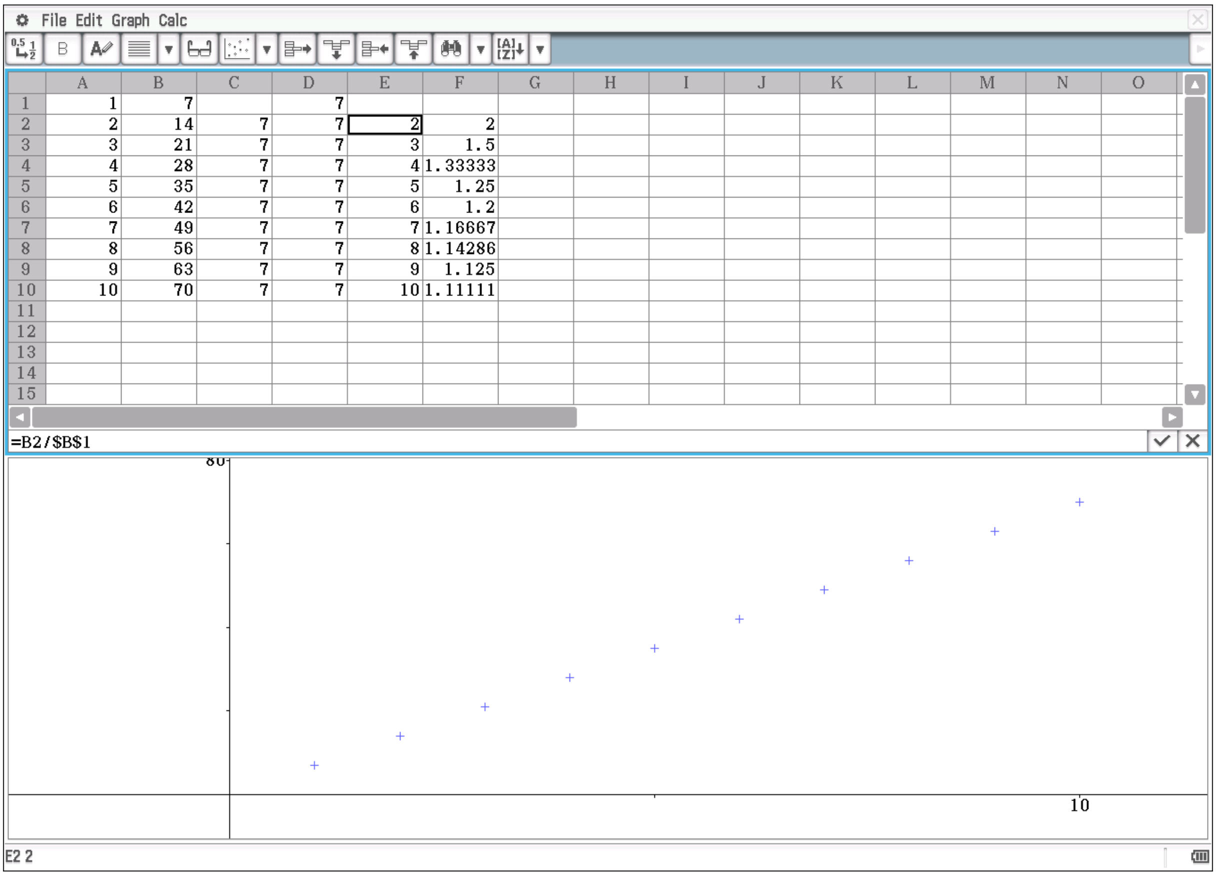
Mein Dank gilt vor allem der Firma CASIO, durch die die Erstellung dieses Heftes möglich wurde.

Norderstedt im Februar 2017

1. Proportionale Zuordnungen

1.1 Eigenschaften von proportionalen Zuordnungen

In den Spalten A und B (s. Abb. 1) wurde eine proportionale Zuordnung erzeugt und diese mit Hilfe des Befehls grafisch dargestellt. Dazu sind die Spalten A und B vorher zu markieren.



	A	B	C	D	E	F
1	1	7		7		
2	2	14	7	7	2	2
3	3	21	7	7	3	1.5
4	4	28	7	7	4	1.33333
5	5	35	7	7	5	1.25
6	6	42	7	7	6	1.2
7	7	49	7	7	7	1.16667
8	8	56	7	7	8	1.14286
9	9	63	7	7	9	1.125
10	10	70	7	7	10	1.11111

Abbildung 1: Tabelle zur Untersuchung von proportionalen Zuordnungen

Zur Erzeugung der Spalte C wurden die Differenzen zweier aufeinander folgender Werte der Spalte B gebildet (C2: *=B2 – B1*). Schülerinnen und Schüler erkennen, dass bei gleichen Abständen in der Spalte A die Differenzen bzw. der Zuwachs konstant sind bzw. ist. Das Gleiche gilt, wenn der Quotient aus Spalte B und A gebildet wird (D1: *=B2/B1*). Die Spalte A erhält man zurück, wenn die Werte der Spalte B durch den Wert von B1 dividiert werden (E2: =B2/B1[1]). Die Spalte F gibt die Quotienten zweier aufeinander folgender Werte der Spalte B an. Hier ergibt sich natürlich kein konstanter Wert. Man erhält Zahlen, die sich der 1 annähern.

Wenn man als Graf eine durchgezogene Gerade erhalten möchte, ist vorher eine lineare Regression durchzuführen (s. Abb. 2). Die obigen Untersuchungen erscheinen als Trivialitäten. Für Schülerinnen und Schüler ergeben sich aber daraus Anlässe, über

[1] Hier ist das §-Zeichen eigentlich nur vor der „1“ erforderlich. Meines Erachtens ist es für Schülerinnen und Schüler leichter zu verstehen, wenn man sich genau auf diese Zelle bezieht.

Eigenschaften von proportionalen Zuordnungen zu reflektieren. Des Weiteren lassen sich diese nutzen, um experimentelle Daten zu untersuchen.

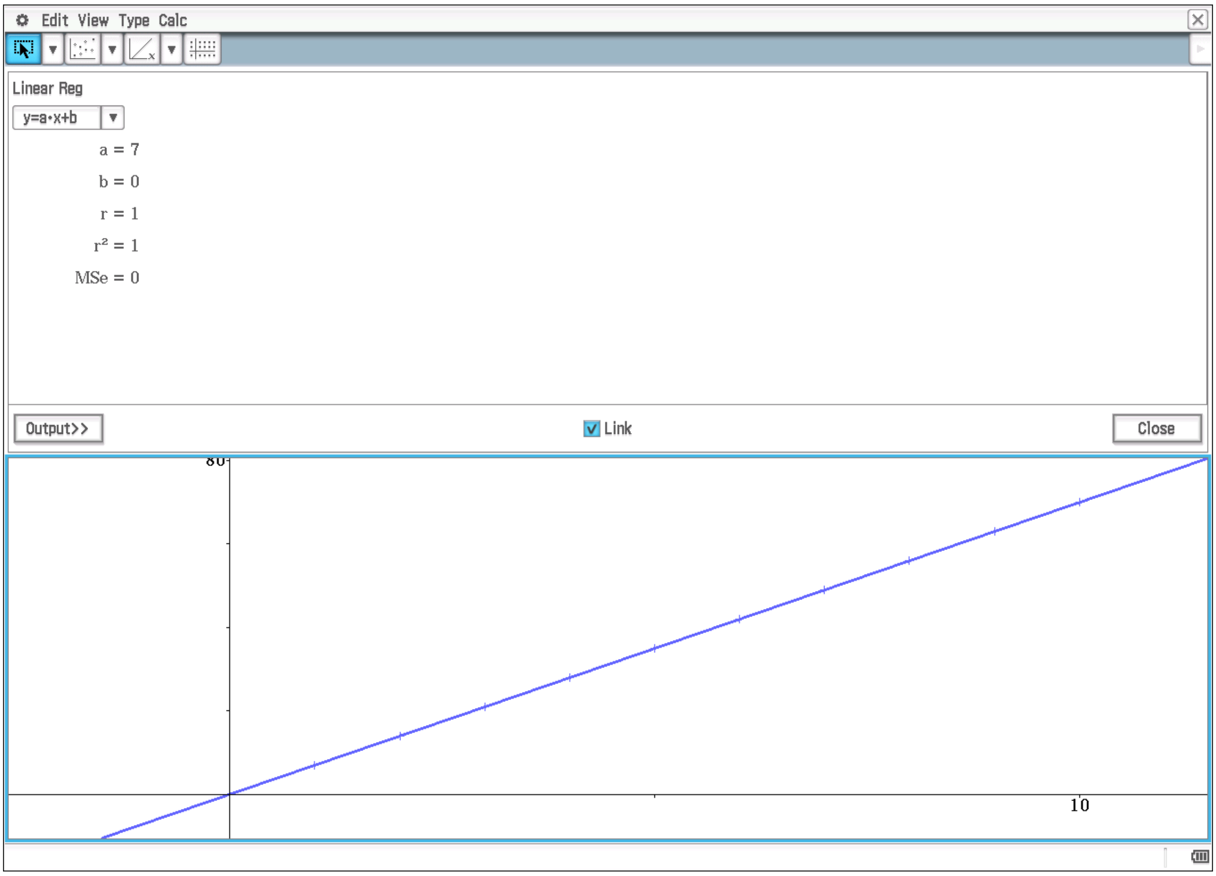


Abbildung 2: Proportionalität mit Regressionsgerade

1.2 Proportionale Zuordnungen auf zufällig erzeugte Daten

In der Regel hat man es mit Zuordnungen zu tun, die auf Grund eines theoretischen Hintergrunds proportional sind. Hierbei handelt es sich z. B. um Preise bzgl. der Menge, Füllstände in Bezug auf die Zeit usw... Mit Hilfe des Zufallsgenerators lassen sich Daten erzeugen, die nicht zu Werten führen, aus der die Proportionalität sofort erkennbar ist.

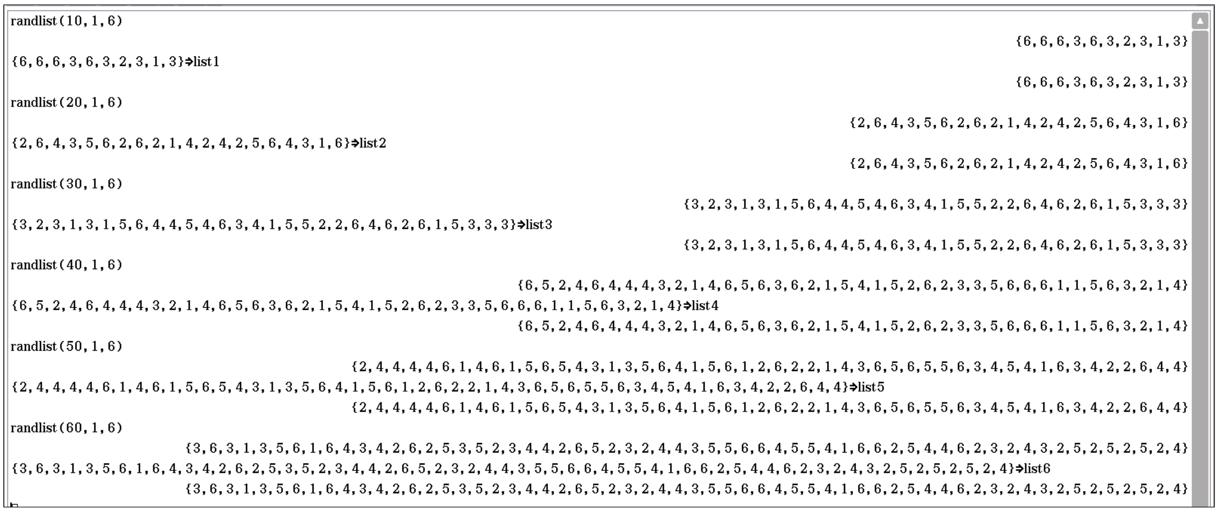


Abbildung 3: Würfelserien

Die Abbildung 3 zeigt Würfelserien, wobei die Anzahl der Würfe jeweils um 10 erhöht wird. Um diese Listen zu ordnen, werden sie in das Statistik-Modul übertragen. Dort lassen sie sich leicht ordnen, damit man die Anzahl der „6“ leicht erfassen kann. Zur weiteren Bearbeitung kann man die jeweiligen Anzahlen in die Tabellenkalkulation übertragen (s. Abb. 4)

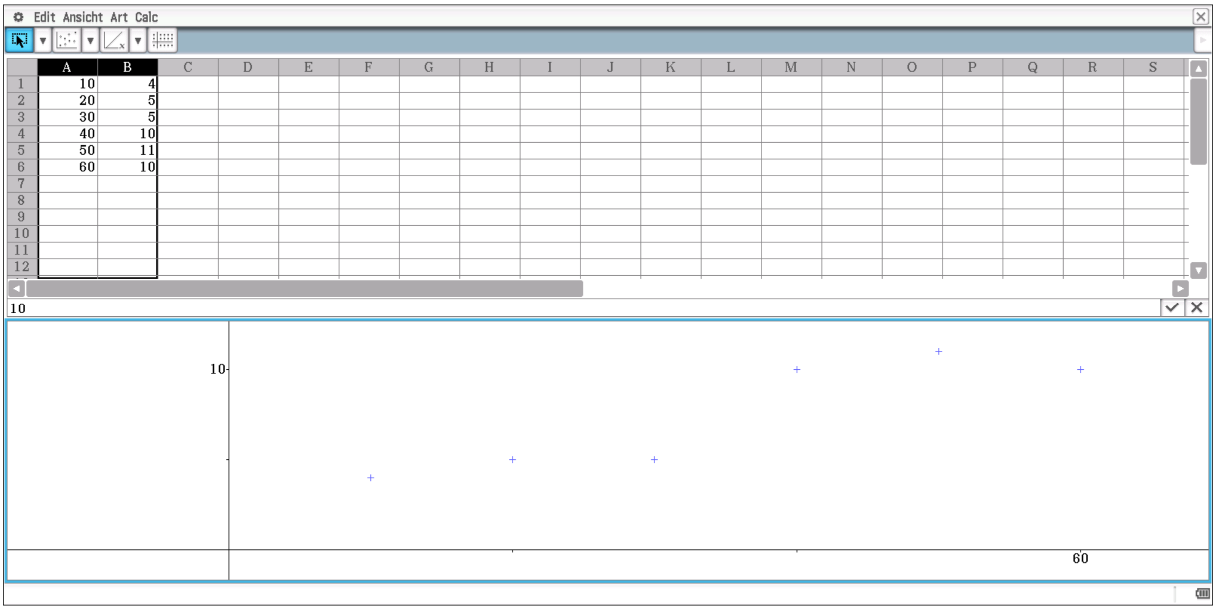


Abbildung 4: Ergebnisse der Würfelserien

Es ist leicht zu verstehen, dass man hier keine „guten“ Werte erwarten kann. Wenn aber die Ergebnisse von allen Schülerinnen und Schülern zusammengetragen werden und Durchschnittswerte gebildet werden, wird sich ein anderes Bild ergeben. Dann werden sich auch die entsprechenden Quotienten berechnen lassen und man kann die Bedeutung dieser Quotienten diskutieren.

Des Weiteren ist es natürlich nicht angemessen, dass die Anzahl der „6“ händisch gezählt wird. Der ClassPad bietet die Möglichkeit, Daten durch ein Programm zu erzeugen. So lässt sich auch die Datenmenge vergrößern, so dass man befriedigende Ergebnisse erhält.

Es wird simuliert, dass mit 50 Würfeln jeweils die Anzahl der „6“ gezählt wird und diese Zahlen werden aufaddiert. Die Abbildung 5 zeigt das entsprechende Programm.

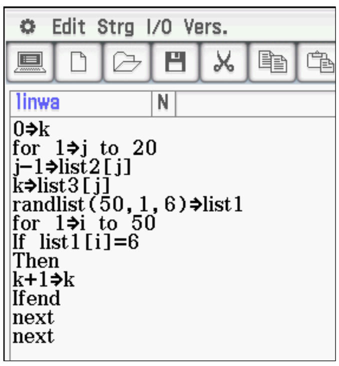


Abbildung 5: Programm zur Simulation der Proportionalität beim Würfeln

Die gewonnenen Daten werden in der Liste 3 und, um eine Zuordnung zu erhalten, werden die Ordnungszahlen des Wurfes in der Liste 2 gespeichert. Man hat jetzt die Möglichkeit, die Daten im Statistik-Modul oder mit der Tabellenkalkulation weiter zu bearbeiten. In der Statistik lässt sich dann auch eine lineare Regression durchführen. Die Abbildung 6 zeigt das Ergebnis.

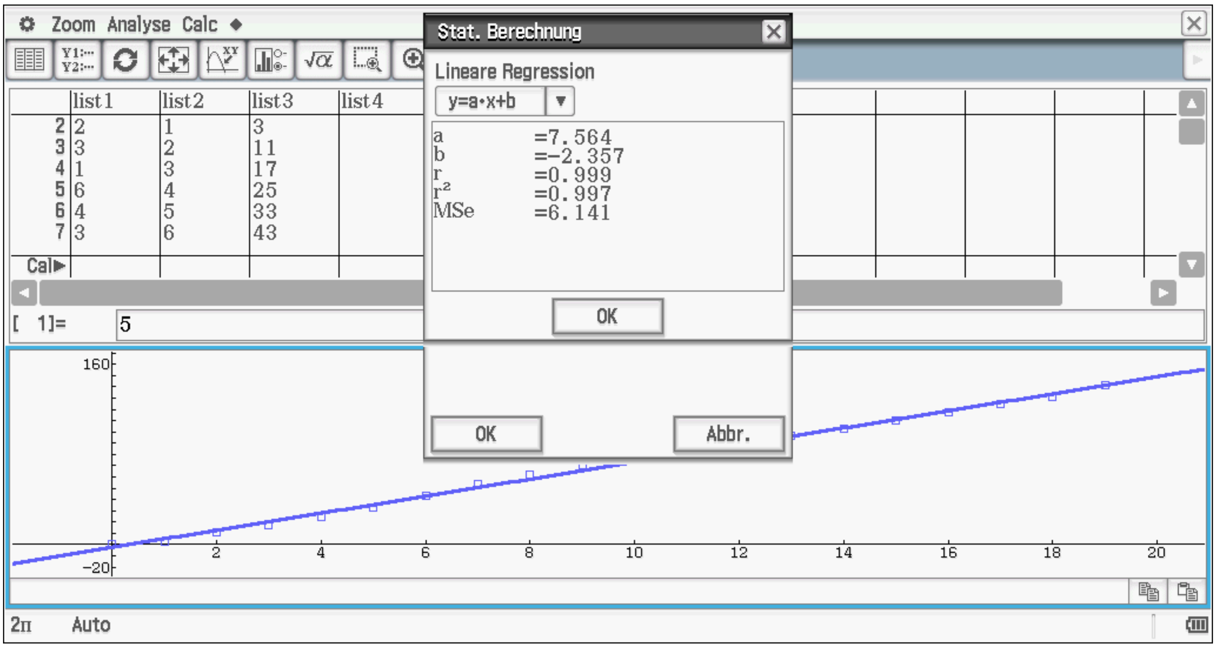


Abbildung 6: Bearbeitung der Daten im Statistik Modul

Die Proportionalität lässt sich natürlich theoretisch begründen; man erkennt, dass sich in etwa eine Ursprungsgerade ergibt.

Die Durchführung einer Regression ist in Klasse 7 sicher nicht altersgemäß, und man sollte die Tabellenkalkulation heranziehen. Die entsprechenden Werte findet man in den Spalten A und B (s. Abb. 7)[2]. Der Zuwachs ist in Spalte C berechnet. In D3 findet man den durchschnittlichen Zuwachs und in E3 den theoretischen Wert (50/6).

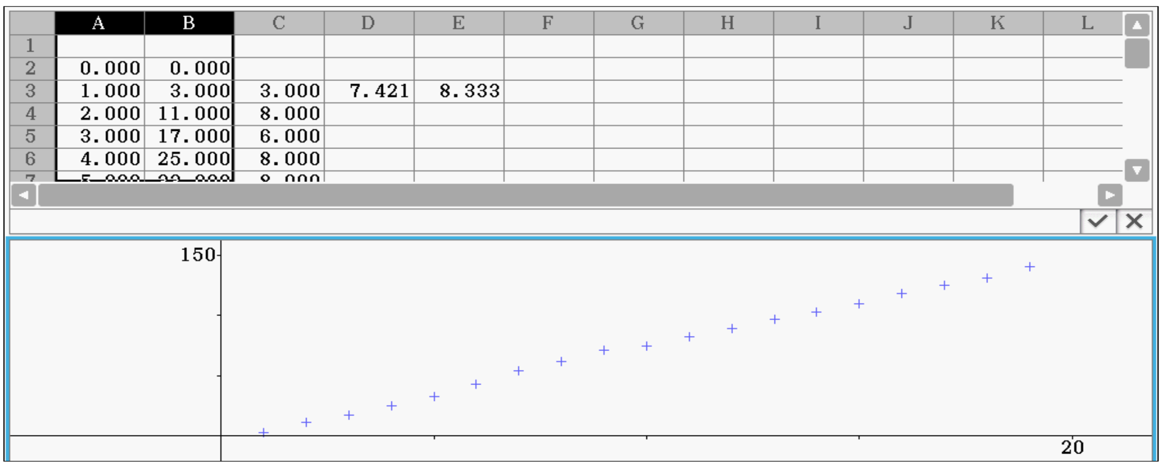


Abbildung 7: Bearbeitung der Daten des linearen Wachstums mit der Tabellenkalkulation

[2] Die Werte aus dem Statistik-Modul lassen sich mit Hilfe der *Import*-Funktion der Tabellenkalkulation direkt übertragen. Dies gilt für alle Listen, die z. B. auch im Main-Bereich erzeugt wurden.

Alternativ kann man sich ja auch die Daten erzeugen lassen, indem man die Wurfserien direkt betrachtet. Es wird 100, 200, 300 usw. mal gewürfelt und die Anzahl der „6" jeweils ermittelt. Die Abbildung 8 zeigt den Quelltext für das entsprechende Programm.

```
propwurf
for 1⇒n to 10
n⇒list1[n]
0⇒k
randlist(100*n,1,6)⇒list3
for 1⇒i to 100*n
if list3[i]=6
then
k+1⇒k
ifend
next
k⇒list2[n]
next
```

Abbildung 8: Quelltext für das Würfelprogramm

Wie oben lassen sich die Daten wieder mit dem Statistik-Modul erfassen und interpretieren (s. Abb. 9). Man hat jetzt auf Grund der größeren Datenmenge beim Würfeln die Möglichkeit, die Daten in der Tabellenkalkulation zu bearbeiten. Jetzt macht es auch Sinn, Differenzen aufeinander folgender Werte zu bilden (s. Abb. 10). Die Differenzen sind in der C-Spalte aufgeführt und der sich ergebende Mittelwert steht in der Zelle C12. Dazu wurden zusätzlich Quotienten in Bezug auf die Anzahl der Werte beim „ersten" Wurf gebildet. Diese stehen in der Spalte D. Aus der sich näherungsweise die Proportionalität erkennen lässt. Noch deutlicher wird es wenn man die Quotienten von Spalte B und A bildet. Die Werte findet man in Spalte E und erkennt, dass der Durchschnittswert (s. Abb. 10 E12) sehr nahe am erwarteten Wert ist.

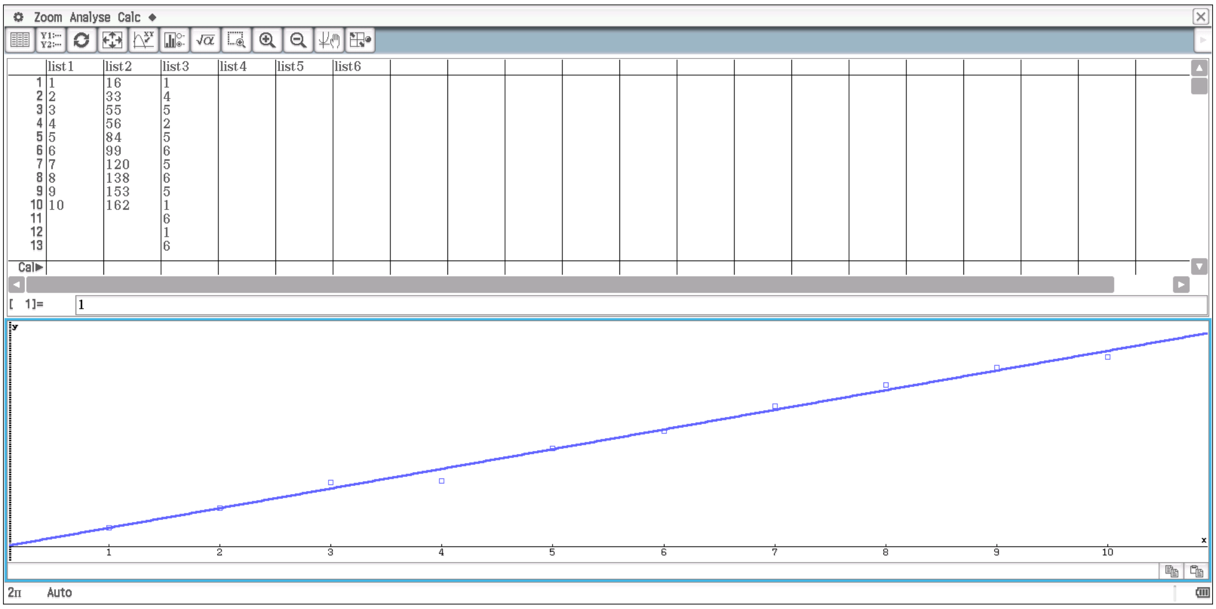
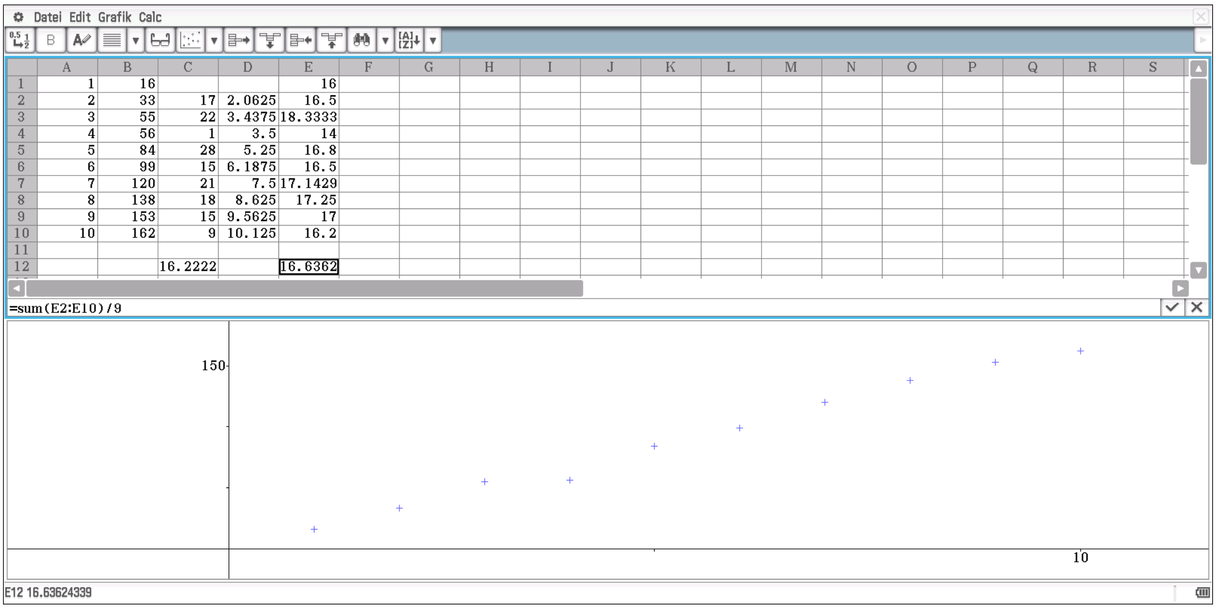


Abbildung 9: Darstellung der Daten im Statistik-Modul

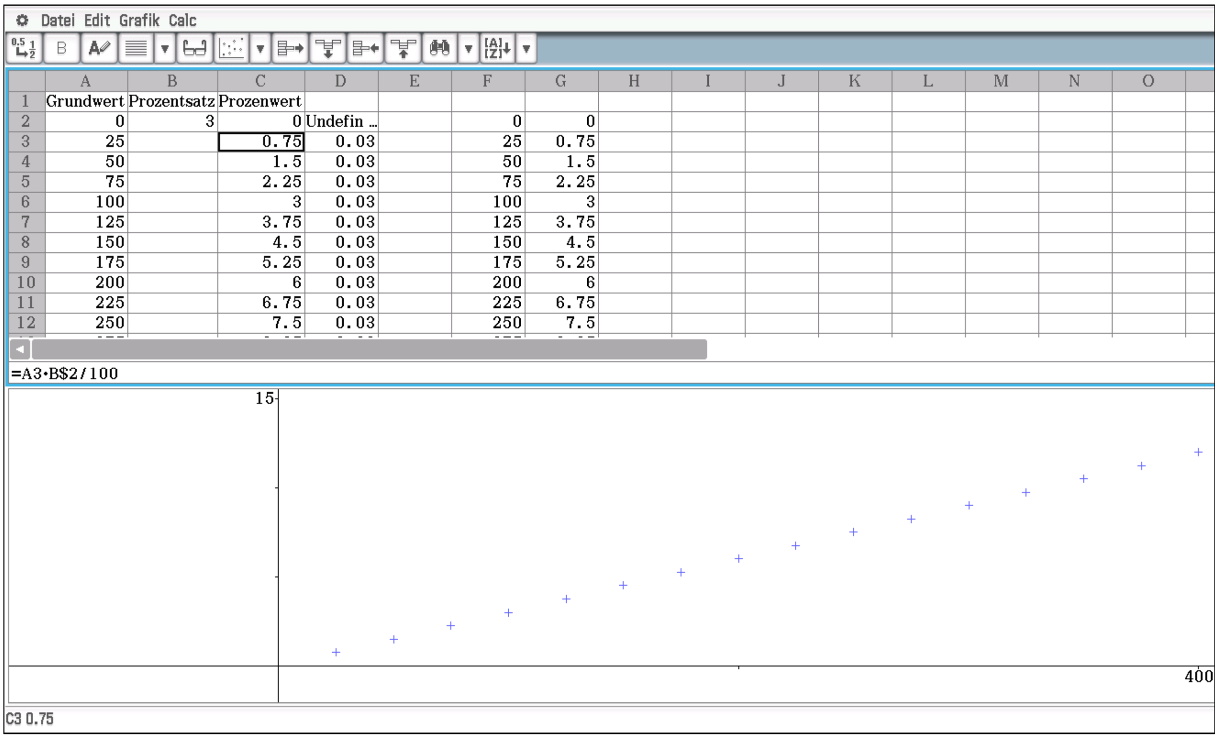


	A	B	C	D	E
1	1	16			16
2	2	33	17	2.0625	16.5
3	3	55	22	3.4375	18.3333
4	4	56	1	3.5	14
5	5	84	28	5.25	16.8
6	6	99	15	6.1875	16.5
7	7	120	21	7.5	17.1429
8	8	138	18	8.625	17.25
9	9	153	15	9.5625	17
10	10	162	9	10.125	16.2
11					
12			16.2222		16.6362

Abbildung 10: Bearbeitung der Daten mit Hilfe der Tabellenkalkulation

2. Prozentrechnung

Im Rahmen der Einführung der Prozentrechnung bietet sich der Einsatz einer Tabellenkalkulation an. Schülerinnen und Schüler haben so die Möglichkeit zu erkennen, wie sich der Prozentwert verändert, wenn man den Grundwert bzw. den Prozentsatz verändert.

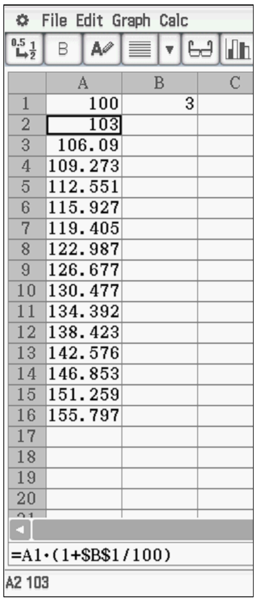


	A	B	C	D	E	F	G
1	Grundwert	Prozentsatz	Prozenwert				
2	0	3	0	Undefin …		0	0
3	25		0.75	0.03		25	0.75
4	50		1.5	0.03		50	1.5
5	75		2.25	0.03		75	2.25
6	100		3	0.03		100	3
7	125		3.75	0.03		125	3.75
8	150		4.5	0.03		150	4.5
9	175		5.25	0.03		175	5.25
10	200		6	0.03		200	6
11	225		6.75	0.03		225	6.75
12	250		7.5	0.03		250	7.5

Abbildung 11: Tabelle zur Zinsrechnung mit grafischer Darstellung

Mit Hilfe der Tabelle (s. Abb. 11) lässt sich der Prozentwert als Funktion vom Grundwert und Prozentsatz erfahren. Genau genommen gilt: W = W(G,p). Schülerinnen und Schüler lernen in der Regel unbewusst eine Funktion von R^2 -> R kennen, und es wird deutlich, dass man für das Erstellen einer Tabelle einen Wert konstant hält. In unserem Fall ist es der Prozentsatz. Die Tabelle ist so aufgebaut, dass durch eine Veränderung des Wertes in B2 sich die anderen Werte automatisch mit verändern. Man hat also eine zweifache Proportionalität, die insbesondere aus der grafischen Darstellung erkennbar ist. Die Spalte D (s. Abb. 11) wird dadurch erzeugt, dass der Grundwert durch den Prozentwert geteilt wird. Für Schülerinnen und Schüler ist es im Allgemeinen erstaunlich, dass sich ein konstanter Wert ergibt. Dieses ist natürlich ein weiterer Hinweis für die Proportionalität.

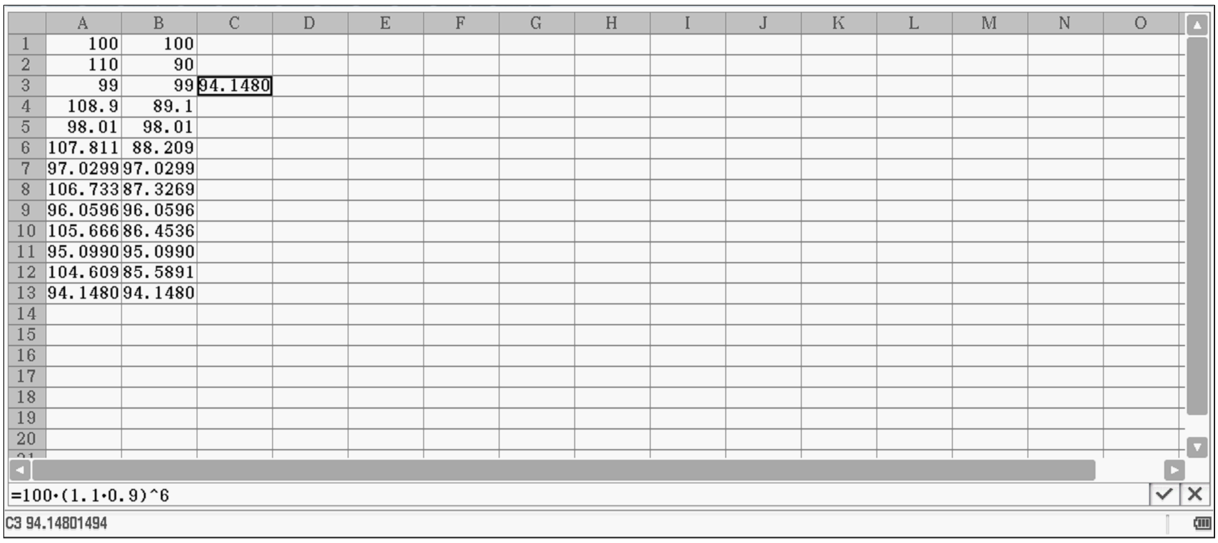
Wenn man Tabellenkalkulation benutzt, kann man relativ einfach Zinseszins Betrachtungen anstellen.



	A	B	C
1	100	3	
2	103		
3	106.09		
4	109.273		
5	112.551		
6	115.927		
7	119.405		
8	122.987		
9	126.677		
10	130.477		
11	134.392		
12	138.423		
13	142.576		
14	146.853		
15	151.259		
16	155.797		
17			
18			
19			
20			

Abbildung 12: Zinseszinsberechnungen

Durch den Bezug zur Zelle B1 (s. Abb. 12) können die Schülerinnen und Schüler die Abhängigkeit vom Zinssatz erfahren. Da es für die Lernenden ein Hauptproblem ist, den richtigen Bezugswert zu benutzen, hilft es mit veränderten Bezügen zu arbeiten. Eine weitere unterstützende Maßnahme ist es, die Frage zu diskutieren, was geschieht, wenn man immer abwechselnd um 10% erhöht und dann wieder 10% abzieht. Bevor man Tabellenkalkulation benutzt, sollte diskutiert werden, wie sich die Werte entwickeln (s. Abb. 13).



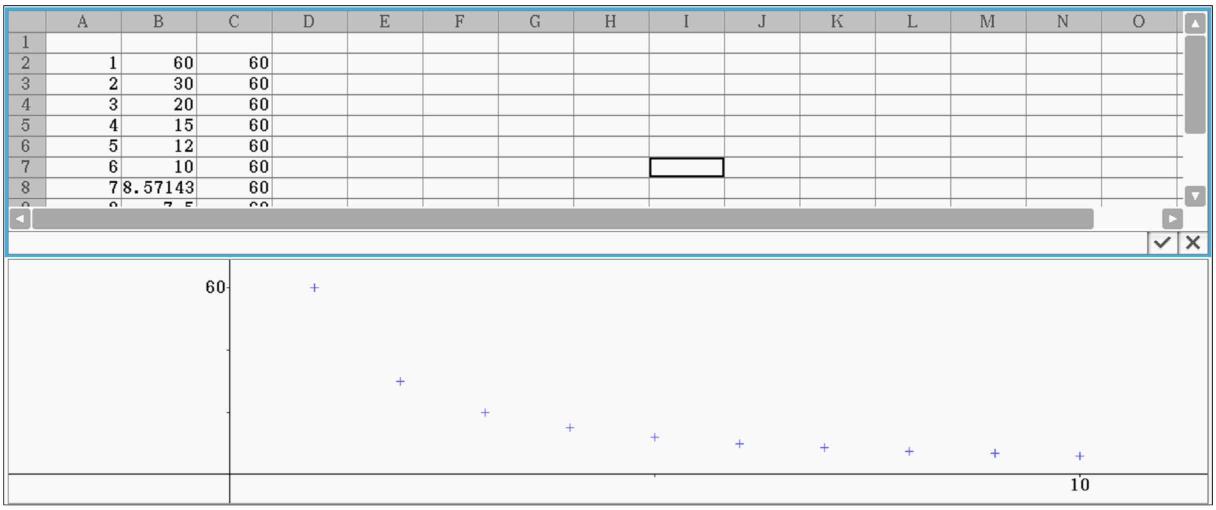
	A	B	C
1	100	100	
2	110	90	
3	99	99	94.1480
4	108.9	89.1	
5	98.01	98.01	
6	107.811	88.209	
7	97.0299	97.0299	
8	106.733	87.3269	
9	96.0596	96.0596	
10	105.666	86.4536	
11	95.0990	95.0990	
12	104.609	85.5891	
13	94.1480	94.1480	

Abbildung 13: Erhöhung und Erniedrigung um 10%

Eine Erklärung, für das, was eigentlich geschieht, findet man in der Zelle C3, deren Berechnung unten links dargestellt ist. Hilfreich ist diese Diskussion der Bezüge im Hinblick auf die Berechnung eines Netto-Preises, das heißt eines Preises ohne Mehrwertsteuer. Ein üblicher Fehler ist, dass der Preis mit 0,81 multipliziert wird, wenn die Mehrwertsteuer 19% beträgt. Der Einsatz der Tabellenkalkulation im Zusammenhang mit dem angestrebten funktionalen Verständnis bietet Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, ihren Fehler selbst zu erkennen.

3. Antiproportionale Zuordnungen

Auch für das Verständnis der Antiproportionalität kann die Verwendung einer Tabellenkalkulation hilfreich sein (s. Abb. 14). In der Spalte A wurden die Zahlen 1 bis 10 erzeugt. Die Spalte B ist durch die Division des Wertes in der Spalte C durch den in der Spalte A entstanden. Auch hier zeigt sich wieder, dass die Werte in B von zwei Variablen abhängig sind.



	A	B	C
1			
2	1	60	60
3	2	30	60
4	3	20	60
5	4	15	60
6	5	12	60
7	6	10	60
8	7	8.57143	60

Abbildung 14: Darstellung der Antiproportionalität

Ein Vergleich mit proportionalen Zuordnungen zeigt, dass im Grunde genommen eine Gleichung der Art: x·y = z diskutiert wird. Im Fall der Proportionalität wird eine Funktion der Art z = f(x,y) behandelt, wobei eine der Variablen x oder y vorgegeben wird. Für antiproportionale Zuordnungen wird die Funktion x = f(y,z) bzw. y = f(x,z) betrachtet. Auch hier ist eine Variable y bzw. x vorgegeben. Diese Betrachtungsweise wird durch die Benutzung einer Tabellenkalkulation unterstützt, da sich für beide Zuordnungen die Gleichung x·y = z in der Tabelle wieder finden lässt.

4. Winkelsätze an Parallelen und am Dreieck

Die Korrektheit der Winkelsätze ist in der Regel für Lernende leicht einzusehen. Für den Umgang mit der DGS des ClassPad sind sie daher ein gutes Beispiel für den Einstieg. Man lässt die Strecke AB und eine Parallele durch den Punkt C zeichnen (s. Abb. 15). Auf die Strecke AB wird der Punkt D gelegt, der dadurch an diese Strecke gebunden ist. Durch diesen Punkt D legen wir eine weitere Gerade, die die Parallele in E schneidet. Durch Markierung der entsprechenden Geraden oder Strecken lassen sich die Winkel messen, deren Größe im Messfenster angegeben wird. Durch Markieren und Ziehen des Wertes in das Konstruktionsfenster lässt sich die Veränderung der Winkelgrößen darstellen.

Indem man den Punkt D und die Strecke AB markiert, lässt sich eine Animation erzeugen. Im Bereich *edit* ist dann eine Animation hinzuzufügen, die danach einmal ablaufen muss. Der Punkt D wandert auf der Strecke und mit dieser Veränderung der Lage von D ändern sich natürlich auch die Gerade durch D und E und damit die Winkelgrößen, deren Werte nun zu beobachten sind. Entsprechendes lässt sich natürlich für die anderen Winkelsätze an Parallelen durchführen.

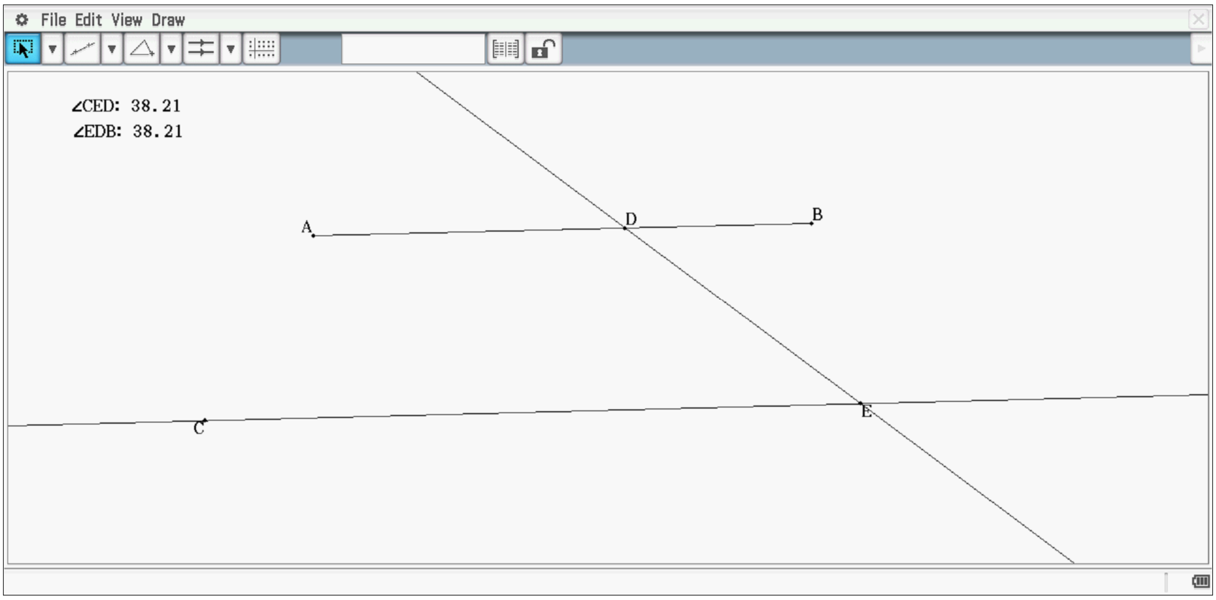


Abbildung 15: Der Wechselwinkelsatz

Verbindet man in der obigen Konstruktion (s. Abb. 14) den Punkt C mit dem Punkt D, so lässt sich durch entsprechende Messungen der Innenwinkelsummensatz für Dreiecke verifizieren. Dabei ergibt sich natürlich das Problem, dass die Beweisbedürftigkeit verloren geht. Diese ergibt sich aber auch aus der Zeichnung, wobei der Zusammenhang zu den Winkelsätzen an Parallelen deutlich wird.

5. Flächenberechnungen

Auch bei den Gleichungen für die Bestimmung von Flächeninhalten hat man es mit Funktionen der Art f: R^2 -> R bzw. R^3 -> R zu tun. Grundlegend ist der Flächeninhalt des Rechtecks. Aus diesem ergibt sich dann der Flächeninhalt des Parallelogramms. Visualisieren lässt sich dies im Geometrie-Modul (s. Abb. 16). Zunächst zeichnet man die Strecke AB und legt auf diese eine Gerade. Zu dieser wird eine Parallele durch den Punkt C, der für das weitere aber keine Bedeutung mehr hat, konstruiert. Auf diese Parallele legen wir den Punkt D, der dadurch an diese gebunden ist. Um eine Dynamik zu bekommen, wird die restliche Konstruktion bezogen auf diesen Punkt D durchgeführt. Der Punkt E wird konstruiert, indem eine Parallele zu AD durch B konstruiert wird. Der Punkt E ergibt sich als Schnittpunkt der Parallelen zu AD und der Geraden durch C. Das Programm übernimmt solche Schnittpunkte nicht automatisch; sie müssen als Punkt gesetzt werden. Um die Höhe zu erhalten, fällt man das Lot vom Punkt D auf die Gerade AB. Der Zusammenhang zum Rechteck lässt sich durch die Konstruktion des Dreiecks BGE darstellen. Flächengrößen und Streckenlängen lassen sich im Messfenster ablesen. Wenn man diese markiert, lassen sich die Werte auf das Hauptfenster übertragen. Dies hat den Vorteil, dass die Veränderung der Werte unmittelbar abzulesen ist. Die Dynamik der Konstruktion ergibt sich durch das Markieren des Punktes D, der sich dann auf der Geraden durch C verschieben lässt. Für die Schülerinnen und Schüler wird deutlich, dass der Flächeninhalt der sich ergebenden Parallelogramme immer gleich ist, obwohl die Form nicht die gleiche bleibt, was sich auch darin zeigt, dass sich die Flächeninhalte der Dreiecke verändern.

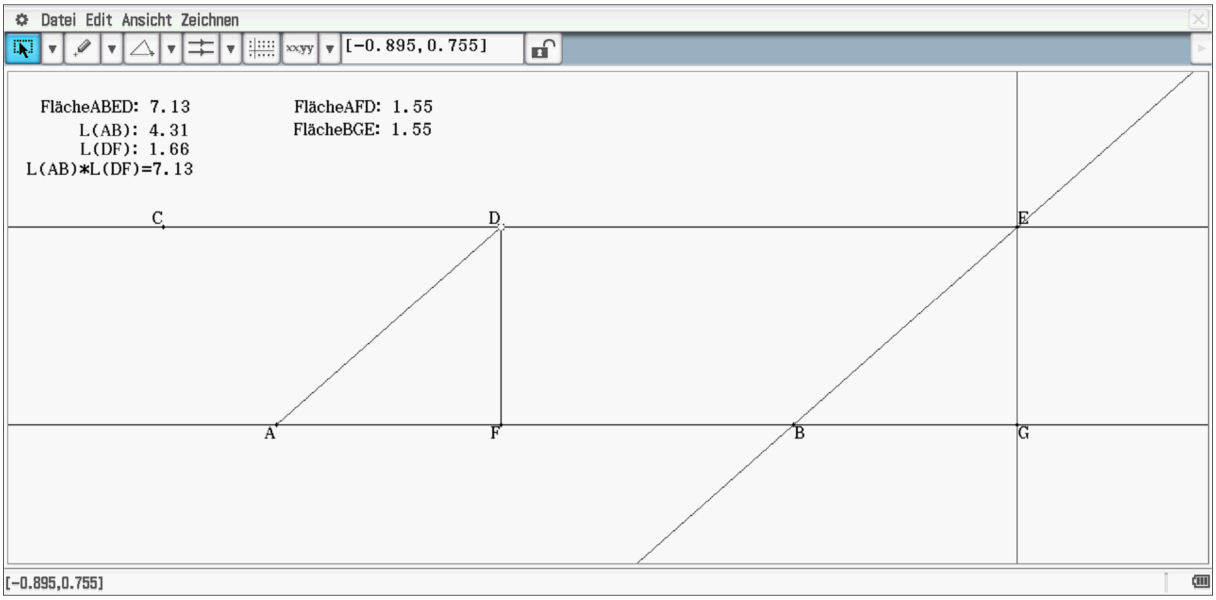


Abbildung 16: Der Flächeninhalt des Parallelogramms

6. Geometrische Konstruktion am Dreieck

Mit der DGS lassen sich natürlich die üblichen Dreiecks Konstruktionen durchführen. Da hier in der Regel die Dynamik keine Bedeutung hat, verzichten wir auf eine Darstellung.

Aber durch den Einsatz von DGS kommt dem Variablenaspekt auch in der Geometrie eine größere Rolle zu.

6.1 Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

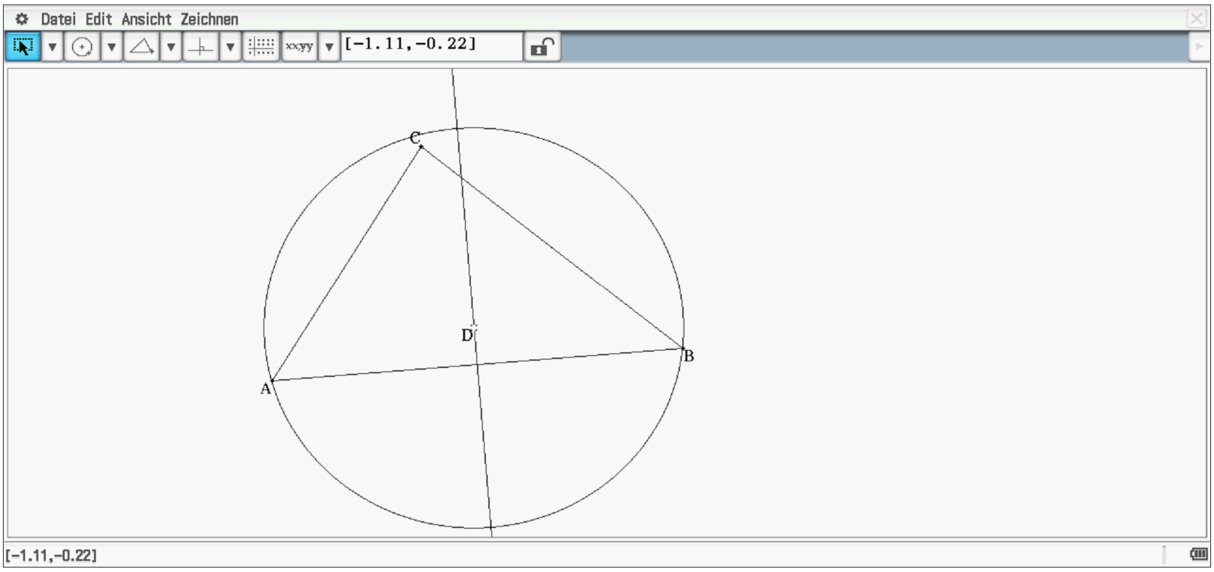


Abbildung 17: Anpassen des Umkreises

Da der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten für das folgende bedeutsam ist, werden zunächst die Eigenschaften dieses Punktes herausgearbeitet. Wenn man Zirkel und Lineal benutzt, konstruiert

man die drei Mittelsenkrechten und stellt fest, dass diese sich in einem Punkt schneiden und dass dies der Mittelpunkt des Umkreises ist. Wenn man eine dynamische Geometriesoftware einsetzt, lässt sich dieses Vorgehen auch anders durchführen.

Für das Dreieck ABC wird die Mittelsenkrechte der Seite AB konstruiert (s. Abb. 17). Auf diese Mittelsenkrechte wird der Punkt D gelegt, der dadurch an diese gebunden ist. Wir konstruieren dann einen Kreis mit Mittelpunkt D so, dass der Punkt A bzw. der Punkt B auf dem Kreisbogen liegt. Durch das Ziehen am Punkt D lässt sich der Kreis so anpassen, dass auch der Punkt C auf diesem Kreisbogen liegt. Im Unterricht muss jetzt natürlich begründet werden, dass der Punkt D auch auf den Mittelsenkrechten der Seiten BC und CA liegt.

Die Bedeutung des Variablenaspekts in der Geometrie veranschaulichen wir an dem folgenden Beispiel. Es wird der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten F konstruiert (s. Abb. 18). Da wir später den einen Eckpunkt variieren wollen, wurde zunächst eine Strecke gezeichnet und auf diese der Eckpunkt C gelegt. Für die Variation dieses Punktes benutzen wir eine Animation. Dazu wird die Strecke AB und der Punkt C markiert. Um eine Animation einzurichten, geht man folgendermaßen vor.

Edit -> Animieren -> Animation hinzufügen

Edit -> Animieren -> Ablaufen (einmal)

Die Spur des Schnittpunktes lässt sich folgendermaßen sichtbar machen:

Edit -> Animieren -> Verfolgen

Der Punkt F muss natürlich vorher markiert werden. Die Abbildung 19 zeigt das Ergebnis.

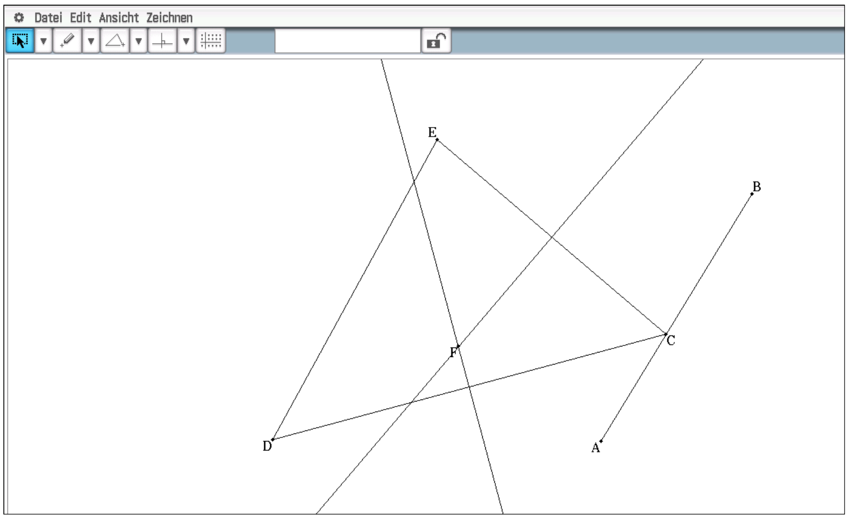


Abbildung 18: Konstruktion des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten

Man hätte sich natürlich vorher überlegen können, dass sich eine Gerade ergibt und dass es sich dabei um die Mittelsenkrechte der zum Punkt C gegenüberliegenden Seite handeln muss. Für Schülerinnen und Schüler ist dies nicht selbstverständlich. So ergibt sich hier die Möglichkeit einer Reflexion der geometrischen Eigenschaften der Mittelsenkrechtenkonstruktion. Es könnte sein, dass Schülerinnen und Schüler einen Zusammenhang dazu vermuten, dass der Punkt C sich ja auf einer geraden Strecke bewegt hat. Diese Lernenden werden sich dann umso mehr wundern, wenn man die Strecke AB durch einen Kreis ersetzt und sich das gleiche Resultat ergibt. Dadurch wird aber die Unabhängigkeit der Geraden, auf der der Punkt F liegt, von der Lage des Eckpunktes C deutlich.

Sowohl die Winkelhalbierenden als auch die Höhen und Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt. Entsprechende Konstruktionen, wie sie für die Mittelsenkrechten gemacht worden sind, lassen sich auch für die Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden und Höhen durchführen.

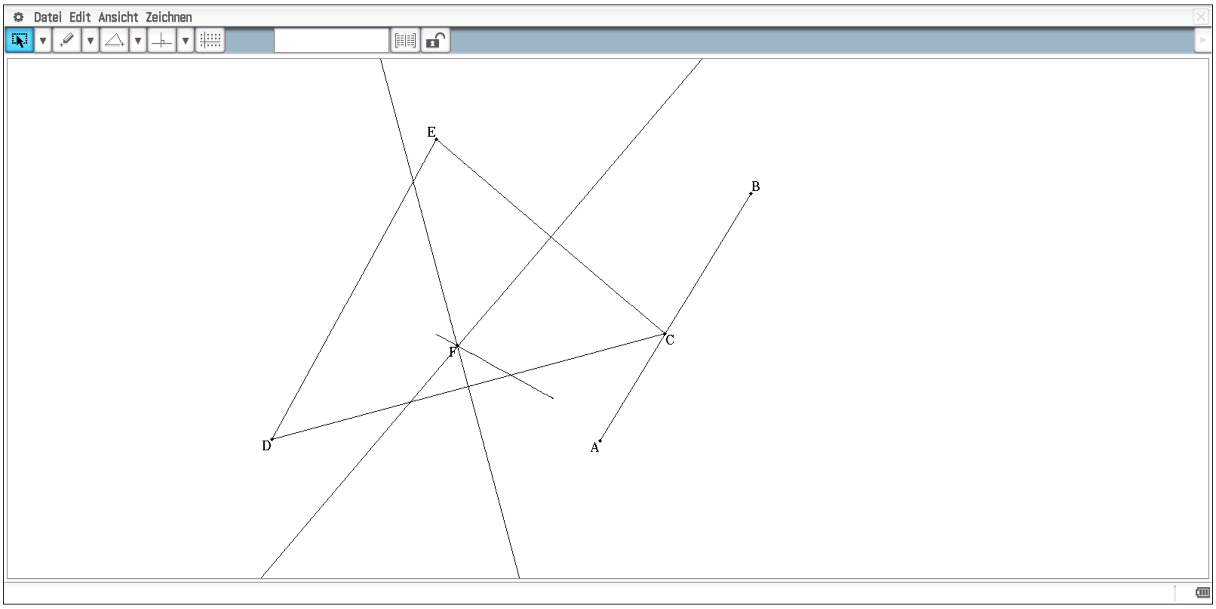


Abbildung 19: Spur des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten

Auf die Euler-Gerade wollen wir an dieser Stelle nicht weiter eingehen. Dies könnte man in der Sek. 2 wieder aufnehmen, um dann mit vektorieller Unterstützung den Beweis zu führen.

6.2 Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Betrachtet man nun den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so ergibt sich offensichtlich eine Gerade, die parallel zur Strecke AB ist (s. Abbildung 20).

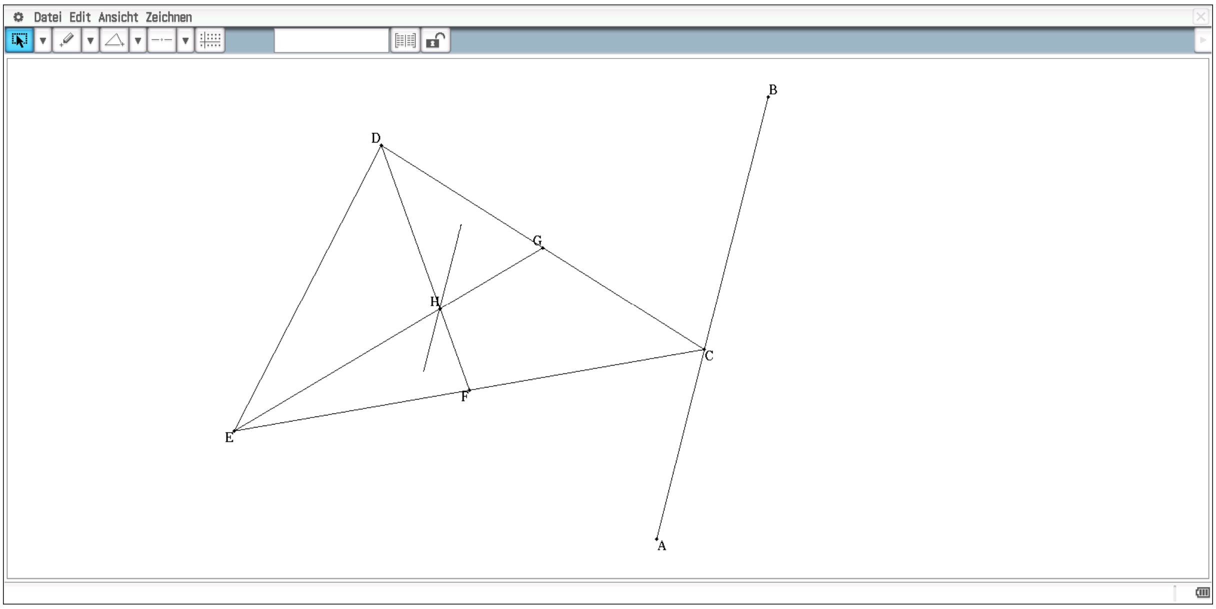


Abbildung 20: Animation des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden

Der Beweis ist in dieser Klassenstufe nicht durchführbar. Die x- und y-Werte der Punkte C und H lassen sich aber auslesen und mit Hilfe des Kopierbefehls in die

Tabellenkalkulation übertragen.[3] Es kann jetzt zumindest für das Beispiel gezeigt werden, dass die Punkte auf zwei parallelen Geraden liegen. Hierzu sind allerdings Kenntnisse von Geradengleichungen erforderlich.

Datei Edit Grafik Calc

	A	B	C	D	E	F
1						
2	0.405	-1.84		-1.5333	-0.4467	
3	0.45395	-1.6461	3.96237	-1.5170	-0.3820	3.96237
4	0.50289	-1.4521	3.96237	-1.5007	-0.3174	3.96237
5	0.55184	-1.2582	3.96237	-1.4844	-0.2527	3.96237
6	0.60079	-1.0642	3.96237	-1.4681	-0.1881	3.96237
7	0.64974	-0.8703	3.96237	-1.4518	-0.1234	3.96237
8	0.69868	-0.6763	3.96237	-1.4354	-0.0588	3.96237
9	0.74763	-0.4824	3.96237	-1.4191	5.88E-3	3.96237
10	0.79658	-0.2884	3.96237	-1.4028	0.07053	3.96237
11	0.84553	-0.0945	3.96237	-1.3865	0.13518	3.96237
12	0.89447	0.09947	3.96237	-1.3702	0.19982	3.96237
13	0.94342	0.29342	3.96237	-1.3539	0.26447	3.96237
14	0.99237	0.48737	3.96237	-1.3375	0.32912	3.96237
15	1.04132	0.68132	3.96237	-1.3212	0.39377	3.96237
16	1.09026	0.87526	3.96237	-1.3049	0.45842	3.96237
17	1.13921	1.06921	3.96237	-1.2886	0.52307	3.96237
18	1.18816	1.26316	3.96237	-1.2723	0.58772	3.96237
19	1.23711	1.45711	3.96237	-1.2560	0.65237	3.96237
20	1.28605	1.65105	3.96237	-1.2396	0.71702	3.96237
21	1.335	1.845	3.96237	-1.2233	0.78167	3.96237

=(E3-E2)/(D3-D2)

F3 3.962365706

Abbildung 21: Untersuchung der sich ergebenen Punkte

In der Spalte C (s. Abb. 21) wurden die Steigungen von jeweils 2 Punkten der Strecke AB bestimmt. Entsprechendes liefert die Spalte F für die Spurpunkte des Schnittpunktes.

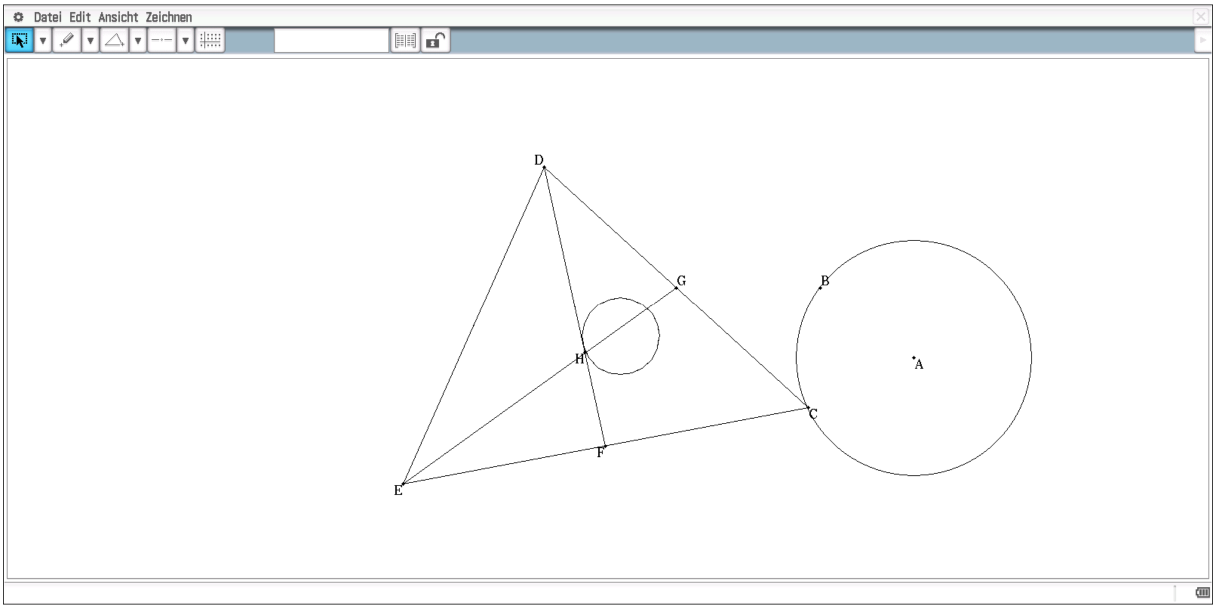


Abbildung 22: Animation des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden

[3] Man markiert dazu den entsprechenden Punkt. Im Messfenster erscheinen die Koordinaten. Durch einen Klick auf das Tabellensymbol erhält man alle Werte, die der Punkt bei der Animation durchlaufen hat. Diese lassen sich dann in das Menü Tabellenkalkulation übertragen.

Obiges führt zu der Vermutung, dass die Bewegung des Eckpunktes auf den Schnittpunkt übertragen wird. Als weiteres Beispiel zeigt die die Abbildung 22 dies für den Kreis. Die Untersuchung der Koordinaten der Punkte ist natürlich erst möglich, wenn die Kreisgleichung im Unterricht behandelt worden ist.

Die Ähnlichkeit der durch die Spur des Mittelpunktes erzeugten Figur mit der Figur, auf der der Eckpunkt bewegt wurde, lässt vermuten, dass es sich bei der Abbildung der einen Figur auf die andere um eine zentrische Streckung handelt. Streckzentrum könnte dann der Mittelpunkt der dem animierten Punkt gegenüberliegenden Seite sein. Dies kann man ja bezüglich der beiden Strecken leicht überprüfen (s. Abb. 23).

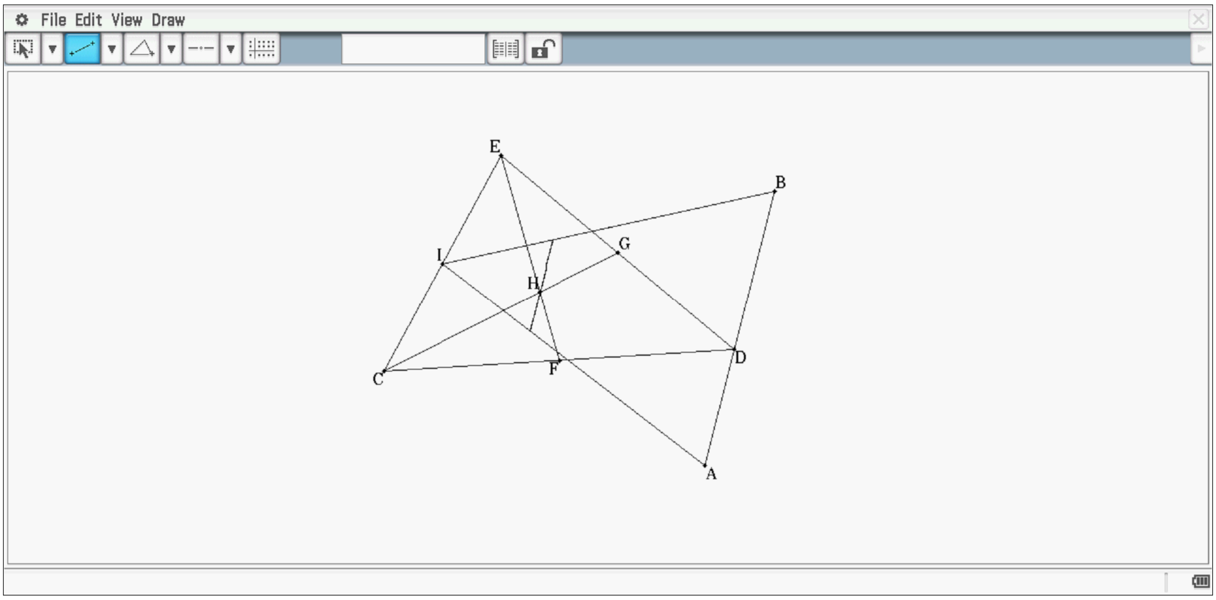


Abbildung 23: Animation des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden mit zusätzlichen Grenzstrecken

Bei genauerer Betrachtung der Abbildung 23 wird deutlich, dass jeder Punkt der Spur des Mittelpunktes H auf der Strecke zwischen dem Mittelpunkt der Dreiecksseite CE und dem entsprechenden animierten Eckpunkt D auf der Strecke AB liegen muss. Da die Seitenhalbierenden sich im Verhältnis 1:2 schneiden muss dies natürlich auch für die Seitenhalbierende ID gelten. Daraus folgt, dass die beiden Strecken parallel verlaufen müssen und damit wird dann auch sofort verständlich, dass sich dann in Abb. 22 ein Kreis ergeben muss.

6.3 Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Als nächstes wollen wir entsprechende Abhängigkeiten in Bezug auf den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden diskutieren. Dazu „konstruieren“ wir den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises entsprechend der Konstruktion für den Umkreismittelpunkt.

Die Winkelhalbierende für den Winkel α wird zunächst konstruiert und auf diese der Punkt D gelegt (s. Abb. 24). Vom Punkt D fällen wir das Lot auf die Seite AB und markieren den Schnittpunkt. Danach legen wir einen Kreis durch die Punkte D und E. Durch Verschieben des Punkte D auf der Winkelhalbierenden lässt sich genau wie oben der Kreis anpassen, so dass alle drei Seiten des Dreiecks berührt werden. Auch jetzt muss natürlich die Diskussion erfolgen, dass der Punkt D ein gemeinsamer Punkt aller drei Winkelhalbierenden ist.

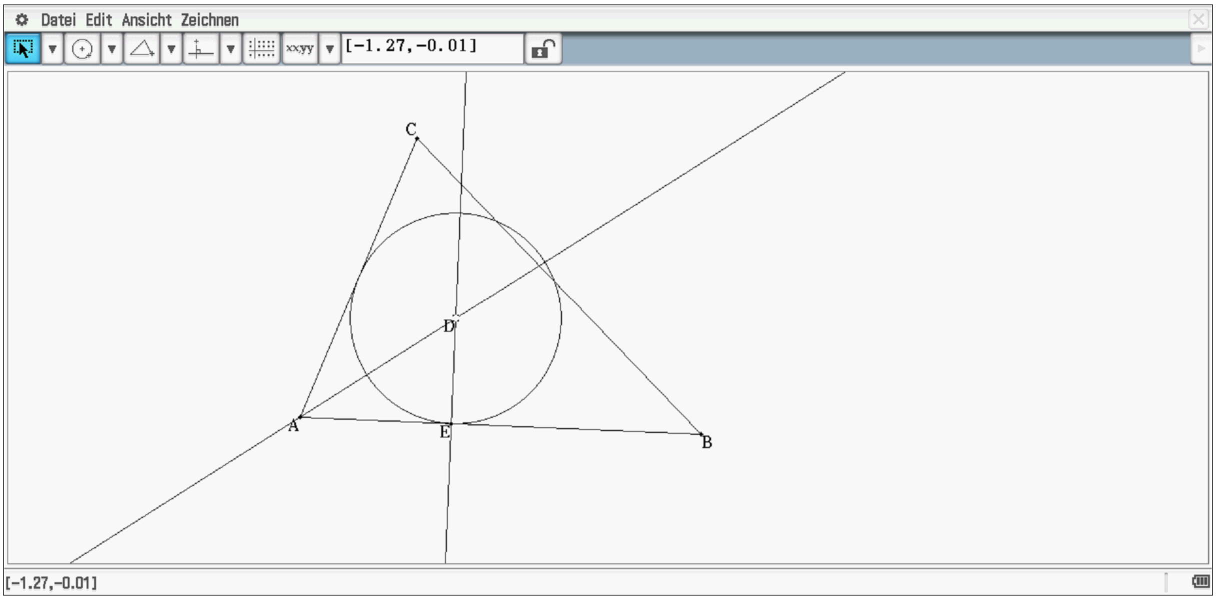


Abbildung 24: Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

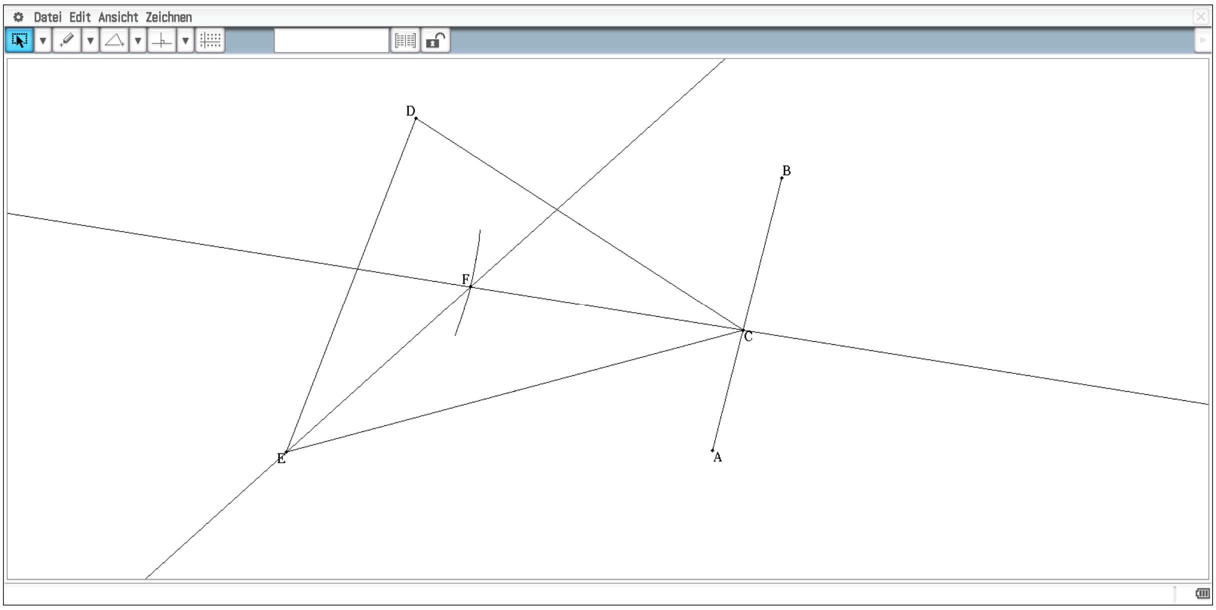


Abbildung 25: Animation des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden

Aus der Abbildung 25 lässt sich für den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden nur vermuten, dass sich keine Gerade ergibt. Die Frage, um was für eine Kurve es sich handelt muss an dieser Stelle unbeantwortet bleiben. Das heißt, die Form der Geraden AB wird nicht übertragen. Ähnliches ergibt sich, wenn man den Eckpunkt C auf einem Kreis animiert (s. Abb. 26). Auch hier wird der Kreis natürlich nicht als Kreis übertragen. Die sich ergebende Kurve ist natürlich auch wieder geschlossen. Dass das so sein muss, kann man sich relativ leicht überlegen.

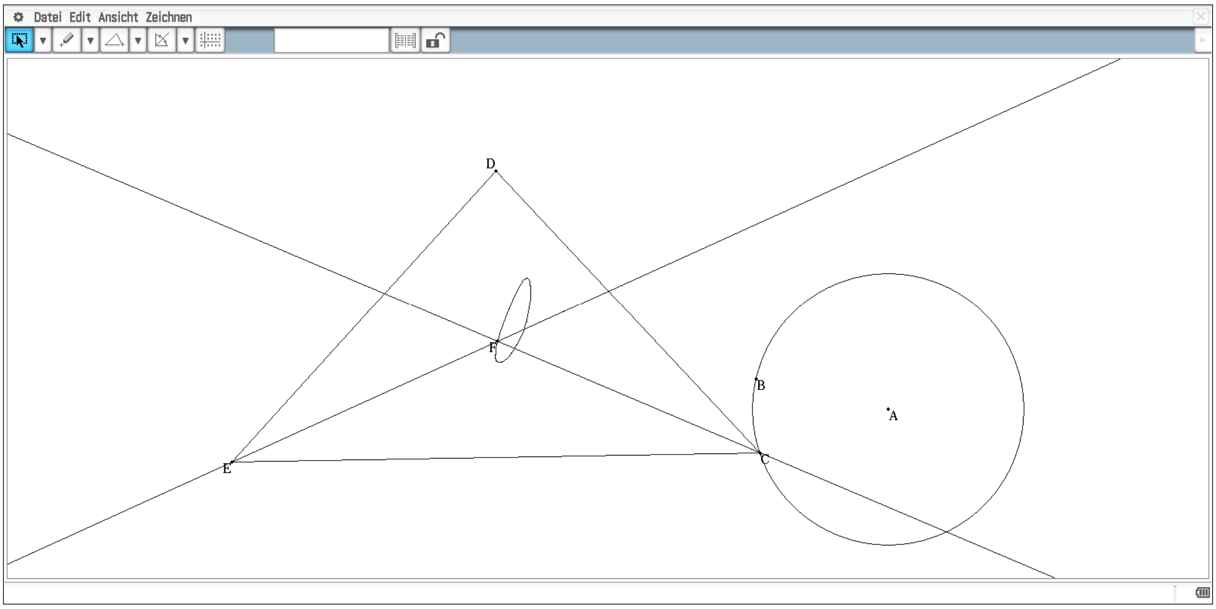


Abbildung 26: Animation des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden, C liegt auf einem Kreis

6.4 Schnittpunkt der Höhen

Wenn man entsprechendes für den Schnittpunkt der Höhen macht, ergeben sich ebenfalls komplexere Kurven, die nicht elementar beschreibbar sind (s. Abbildungen 27 und 28).

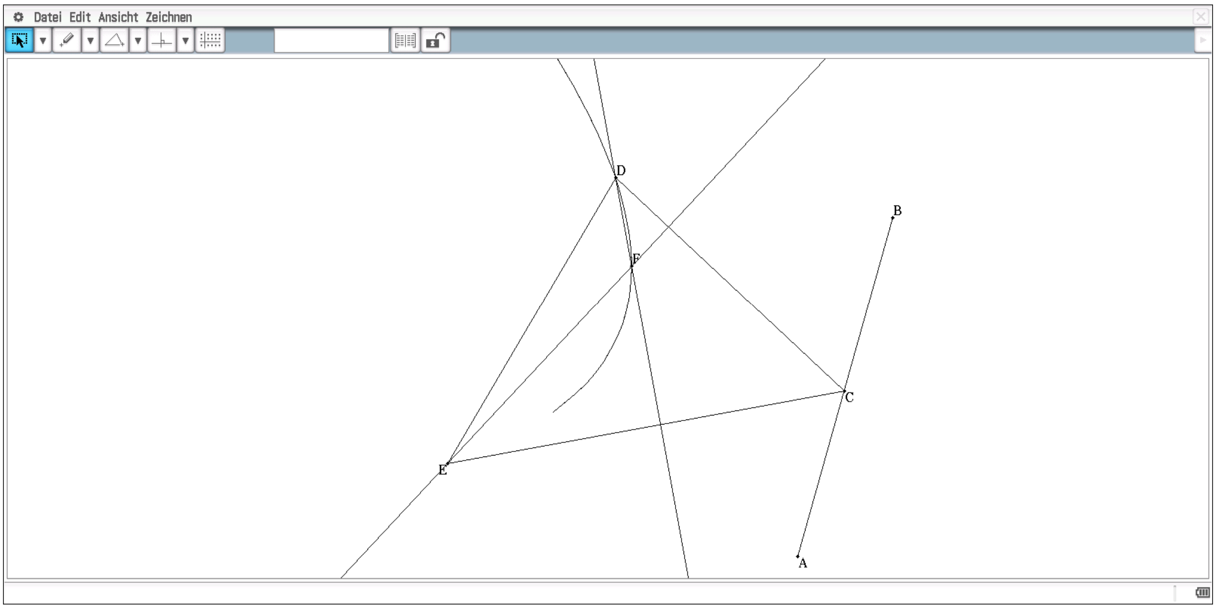


Abbildung 27: Animation des Höhenschnittpunktes

Für Schülerinnen und Schüler mag es auf der einen Seite frustrierend sein, dass sich keine einfachen beschreibbaren Kurven ergeben; auf der anderen Seite zeigt sich aber gerade hier ein typisches Merkmal der Mathematik. Man beginnt mit „einfachen“ Beispielen und versucht, gewonnene Erkenntnisse zu erweitern und eventuell zu verallgemeinern. Dass dies nicht auf Anhieb oder überhaupt gelingt, zeigen die obigen Beispiele. Trotzdem sind es Beispiele für funktionale Zusammenhänge, die in der Regel nicht durch einfache Zusammenhänge beschrieben werden können.

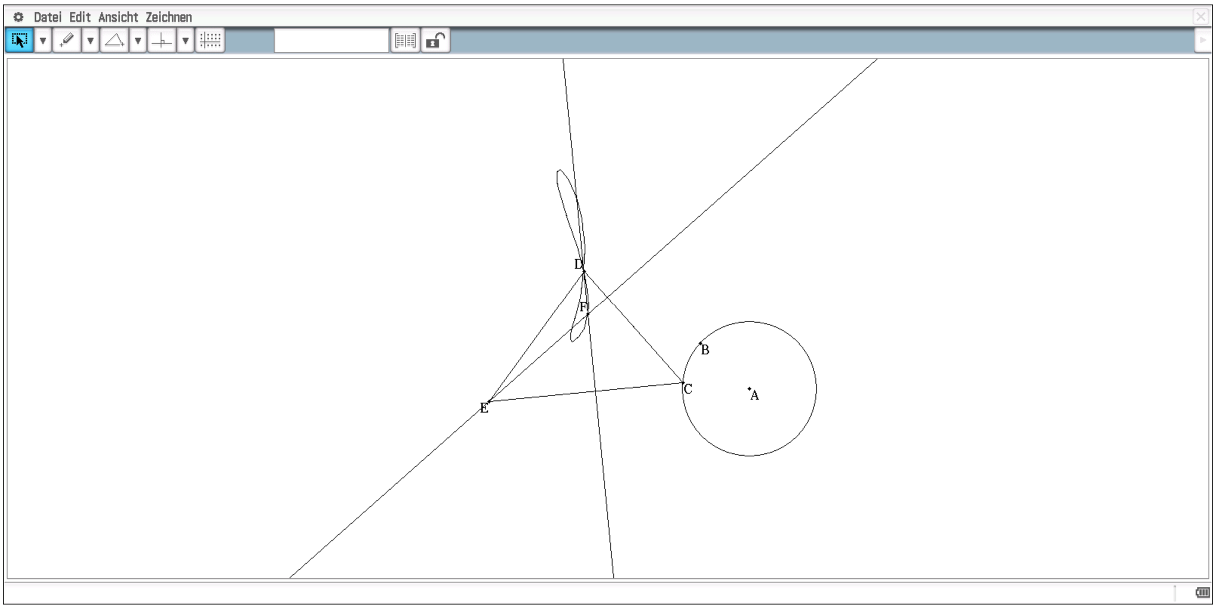


Abbildung 28: Animation des Höhenschnittpunktes

7. Lineare Terme, Funktionen und Gleichungen

7.1 Der Graph der linearen Funktion

Zunächst sollte die grafische Bedeutung der Koeffizienten in der allgemeinen Gleichung f(x) = m·x + b für die lineare Funktion geklärt werden. Auch hier handelt es sich im Grunde genommen um eine Funktion der Art f(m,b,x). Zur Klärung lassen sich für die Koeffizienten Schieberegler anlegen oder man definiert die Funktion als f: R^3 -> R und legt für die Koeffizienten Listen an. Die Methode mit den Schiebereglern zeigt einen eher dynamischen Zugang, während man mit der anderen Methode die verschiedenen Graphen besser vergleichen kann. Die Abbildung 29 zeigt zunächst die Schieberegler-Methode.

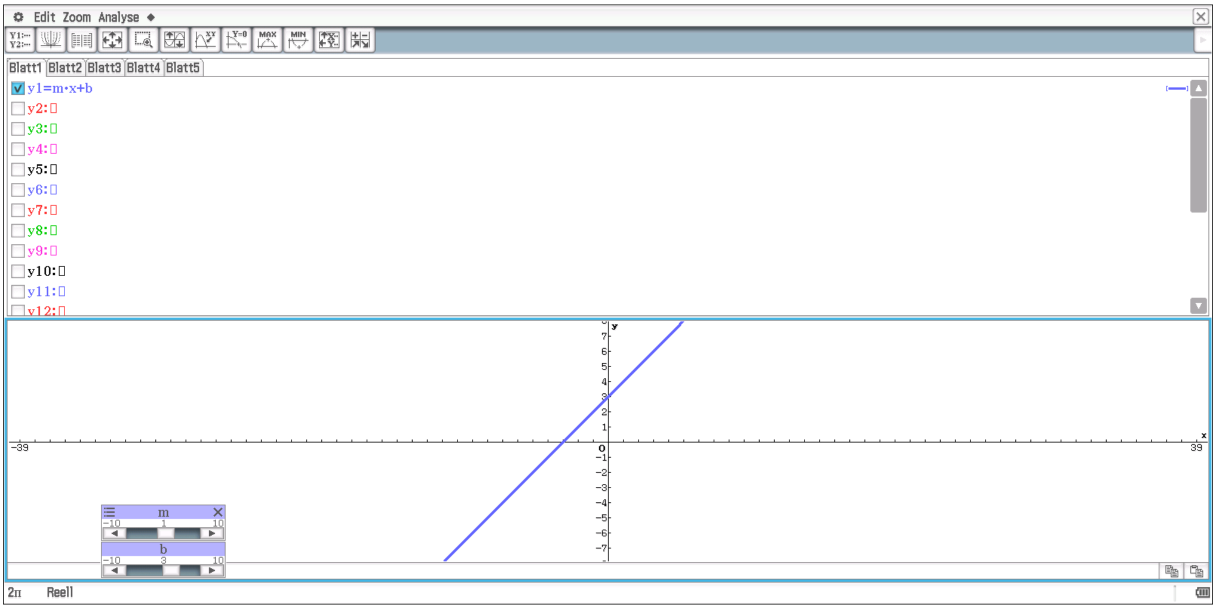


Abbildung 29: Grafik zur linearen Funktion

Will man mehrere Graphen gleichzeitig betrachten, so kann man zunächst Listen definieren.

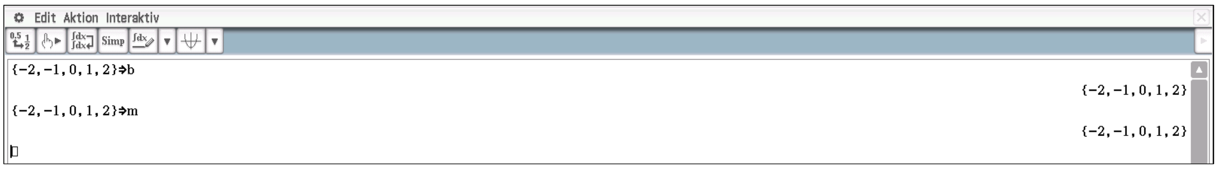


Abbildung 30: Definition von Listen

Für die Diskussion sollte man natürlich nicht beide Listen gleichzeitig benutzen. In der Abbildung 31 wurde m variiert und b = 1 gesetzt.

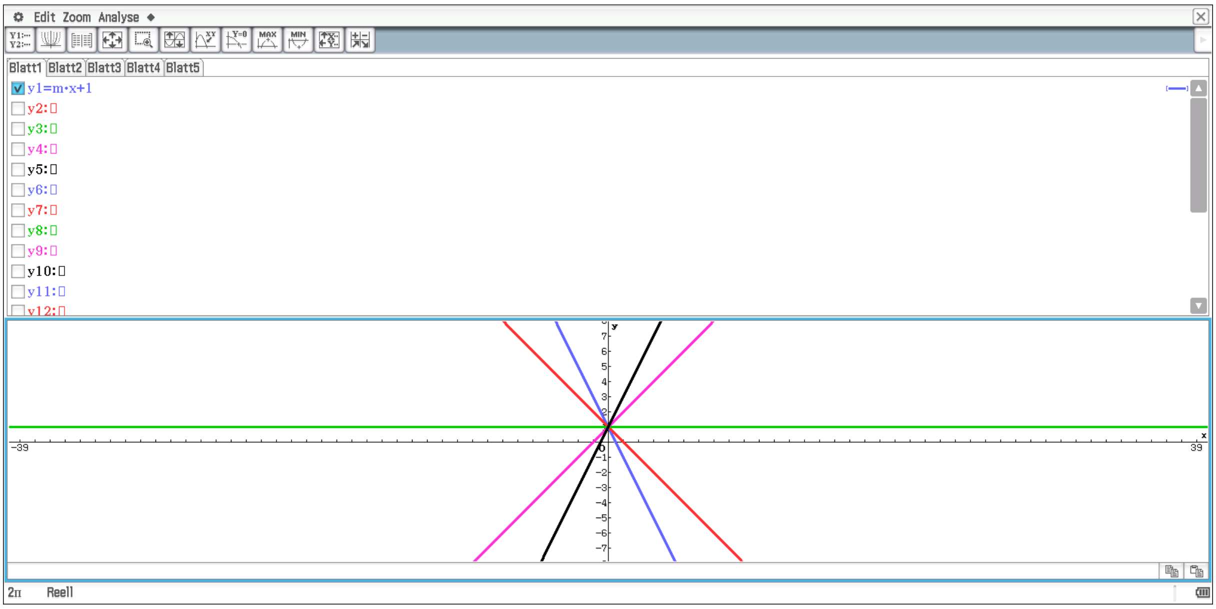


Abbildung 31:Variation der Variablen m

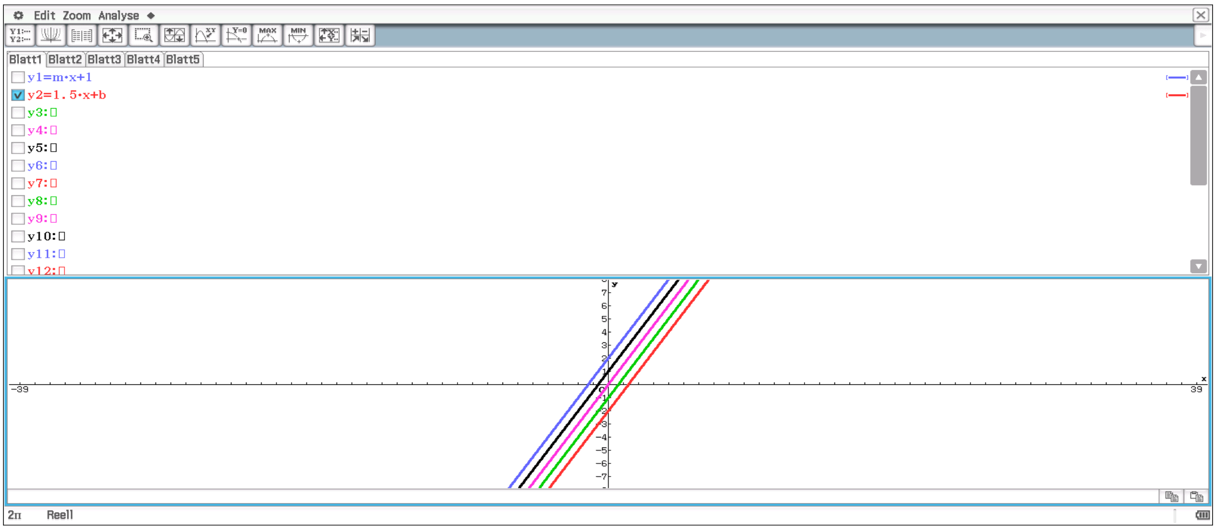


Abbildung 32: Variation der Variablen b

Schülerinnen und Schüler sollten erkennen, dass die Variation der Variablen b eine Verschiebung in y Richtung zur Folge hat. Eine Variation der Variablen m führt zu einer Drehung der Geraden um den Punkt (0,b). Aus diesem Ansatz ergibt sich natürlich das

Problem, die Variable m als Steigung der Geraden zu interpretieren. Auf der anderen Seite wird aber auch so eine Verknüpfung von Drehwinkel und Steigung hergestellt. Für die Klärung des Zusammenhangs benutzen wir eine entsprechende Konstruktion im Geometrie-Modul.

In der Abbildung 33 wird eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt. Im Messfenster kann man sich die Gleichung der Gerade, die Steigung oder den Winkel zwischen Gerade und x-Achse anzeigen lassen.

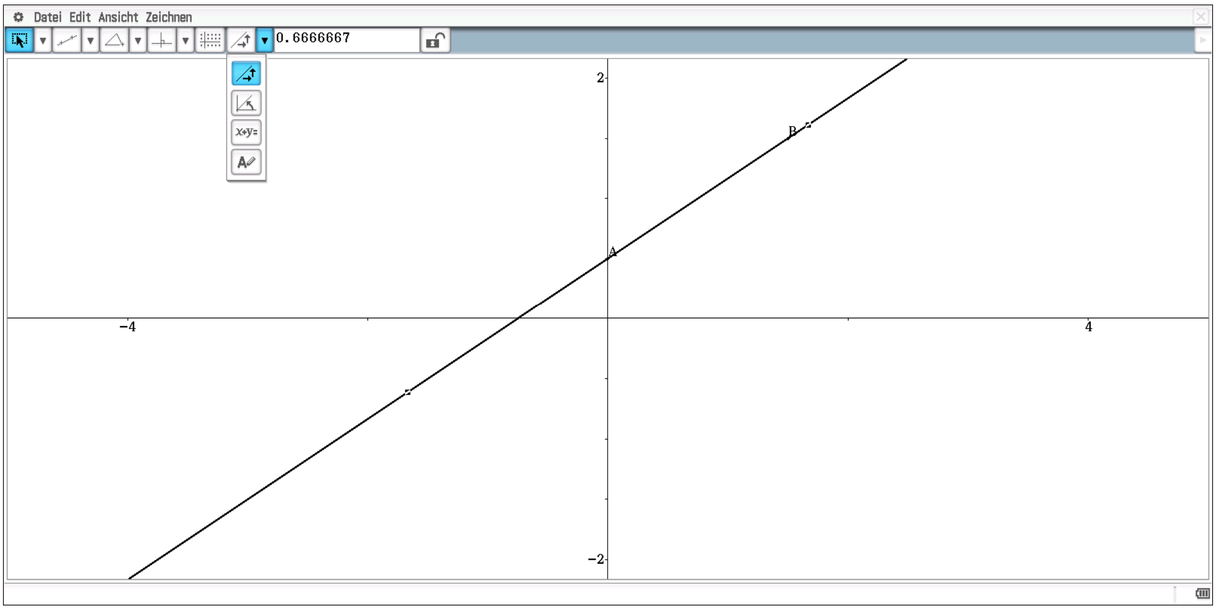


Abbildung 33: Gerade mit Steigung

Durch Ziehen am Punkt B lässt sich die Gerade um den Punkt A drehen, und es wird deutlich, wie sich dadurch die Steigung verändert. Es sollte aber an dieser Stelle nicht versäumt werden, das Steigungsdreieck einzuzeichnen.

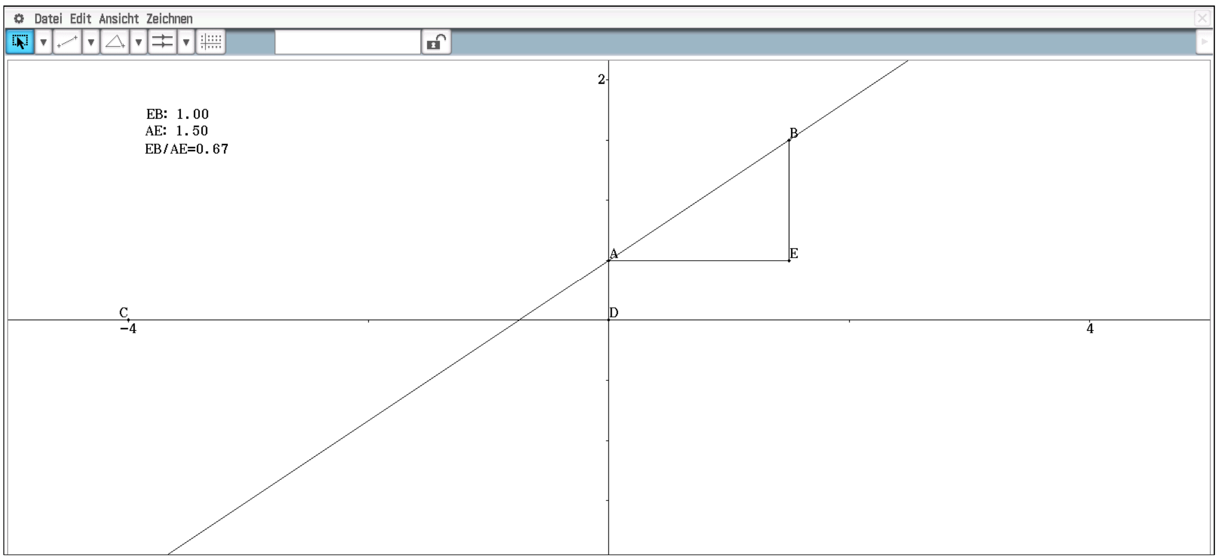


Abbildung 34: Gerade mit Steigungsdreieck

Die Konstruktion des Steigungsdreiecks ist etwas aufwendig (s. Abb. 34). Um Parallelen zu den Achsen zu erzeugen, muss man zunächst Geraden auf die Achsen legen. Dann lassen sich zu diesen Geraden Parallele durch die Punkte A und B konstruieren. Der Schnittpunkt E ist zu kennzeichnen. Um die Konstruktion übersichtlich zu gestalten, wurden die Parallelen ausgeblendet und durch Strecken ersetzt. Die beiden Streckenlängen lassen sich messen und mit dem Stift auf die Zeichenfläche ziehen. Mit dem Befehl *Formelterm* wird der Quotient, der die Steigung angibt, erzeugt. Dadurch lassen sich die Veränderungen direkt beobachten. Die Veränderung des Winkels ließe sich natürlich noch zusätzlich beobachten. Da zum jetzigen Zeitpunkt für die Schülerinnen und Schüler keine Beziehung zwischen Steigung und Winkel hergestellt werden kann, sollte hier darauf verzichtet werden. Da aber dies möglich ist, ist dies ein eindeutiger Hinweis, dass es eine solche Beziehung geben muss.

Als eine Differenzierung kann die Frage diskutiert werden, wie die Verhältnisse sich ändern, wenn man den „Drehpunkt“ nicht auf der y-Achse wählt.

7.2 Termverständnis und grafische Darstellung[4]

Mit Hilfe des Befehls *rand()* lassen sich Zufallszahlen im Intervall (0,1) erzeugen. Lässt man diesen Befehl zweimal ausführen, so kann man die erhaltenen Werte als x- und y-Koordinaten eines Punktes interpretieren, der sich dann bildlich darstellen lässt. (s. Abb. 35 und 36)

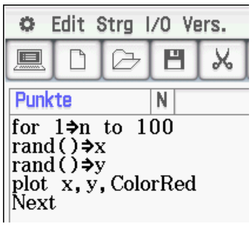


Abbildung 35: Erzeugung von 100 Zufallspunkten

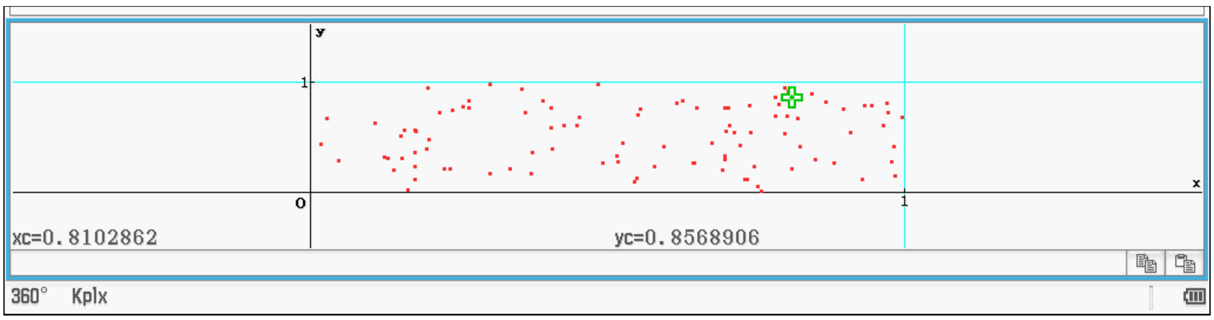


Abbildung 36: Darstellung der erhaltenen Punkte[5]

Durch die Darstellung bietet es sich an, über Verteilungen zu diskutieren. Dies soll hier allerdings nicht geschehen; sondern wir wollen die erhaltenen Punkte als Eckpunkte

[4] Die Idee zu den Inhalten stammt aus [2]

[5] Das grüne Kreuz zeigt auf den letzten gezeichneten Punkt; vermeiden lässt sich das Kreuz, wenn man den Befehl *plot* durch *ploton* ersetzt.

eines Rechtecks interpretieren und zusätzlich den Flächeninhalt und Umfang in Abhängigkeit der einen Rechteckseite darstellen.

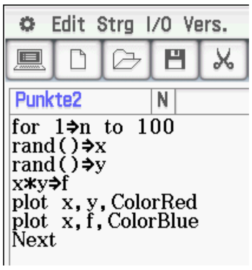


Abbildung 37: Erzeugung von Zufallspunkten mit Flächeninhalt

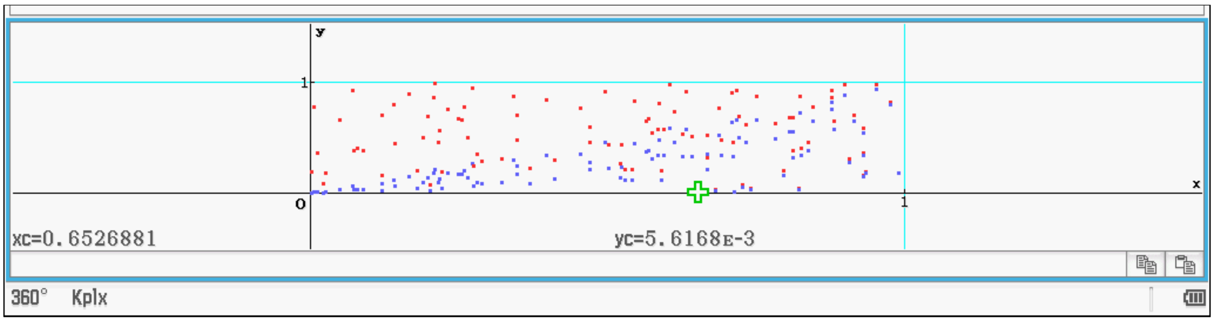


Abbildung 38: Darstellung der Punkte und des Flächeninhalts in Abhängigkeit der X-Koordinate

Man erkennt, dass die blauen Punkte, die den Flächeninhalt in Abhängigkeit von der x-Koordinate widergeben, offensichtlich in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Geraden f(x) = x als Hypotenuse liegen. Die beiden Katheten ergeben sich automatisch aus den Voraussetzungen. Da x < 1 und y < 1 folgt natürlich x·y < 1. Die Begründung für die Begrenzung durch die Winkelhalbierende ergibt sich auch direkt. Da y < 1 folgt x·y < x. (s. Abb. 37)

Als nächstes wollen wir uns dem Umfang widmen. (s. Abb. 39 und 40)

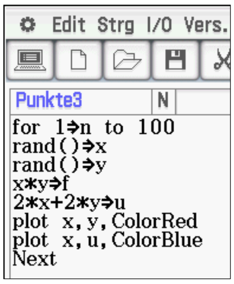


Abbildung 39: Programm zur Darstellung des Umfangs in Abhängigkeit der X-Koordinate

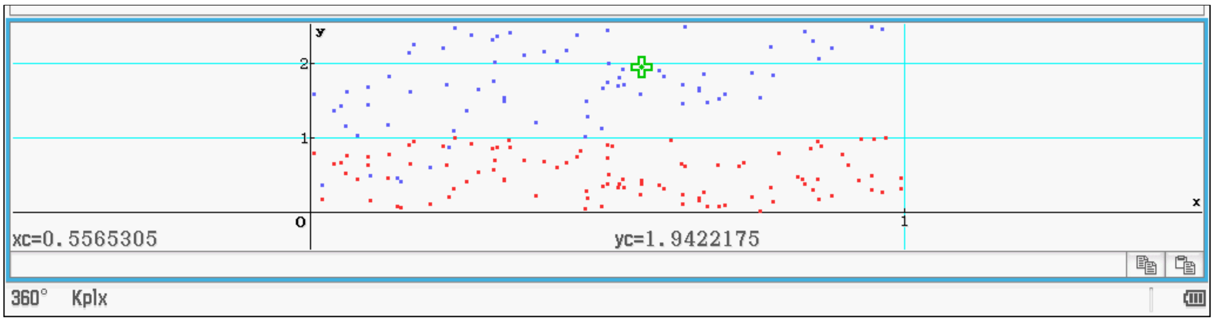


Abbildung 40: Darstellung der Punkte und des Umfangs in Abhängigkeit der X-Koordinate

Aus der Darstellung ergibt sich zunächst nichts, was sich lohnen würde, genauer mathematisch analysiert zu werden. Um sich einen besseren Überblick zu verschaffen, wird die Anzahl der Punkte auf 200 erhöht und der Bereich in y-Richtung vergrößert.

Aus der Abbildung 41 ist jetzt deutlich eine Punktmenge erkennbar, die von vier Geraden begrenzt wird. Interessant sind vor allem die Geraden in y-Richtung; die beiden anderen ergeben sich automatisch aus der Begrenzung der x-Werte. Die Gerade, die die Menge in y-Richtung nach unten begrenzt, ergibt sich direkt aus $U = 2a + 2b$. Da $b > 0$, gilt $U > 2a$ bzw. g_1: $f(x) = 2x$. Mit einer ähnlichen Überlegung ergibt sich aus $b < 1$: $U < 2a + 2$ bzw. g_2: $f(x) = 2x + 2$. Interessanter ist es, die Abhängigkeit des Flächeninhalts vom Umfang darzustellen. (s. Abb. 42 und 43)

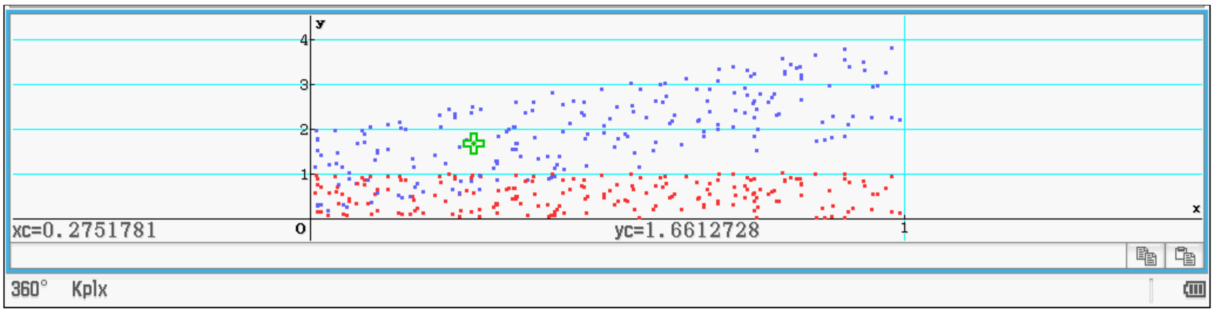


Abbildung 41: Darstellung der 200 Punkte und des Umfangs in Abhängigkeit der X-Koordinate

```
Punkte4    N
for 1⇒n to 200
rand()⇒x
rand()⇒y
x*y⇒f
2*x+2*y⇒u
ploton u,f, ColorBlue
Next
```

Abbildung 42: Programm zur Darstellung des Flächeninhalts in Abhängigkeit vom Umfang

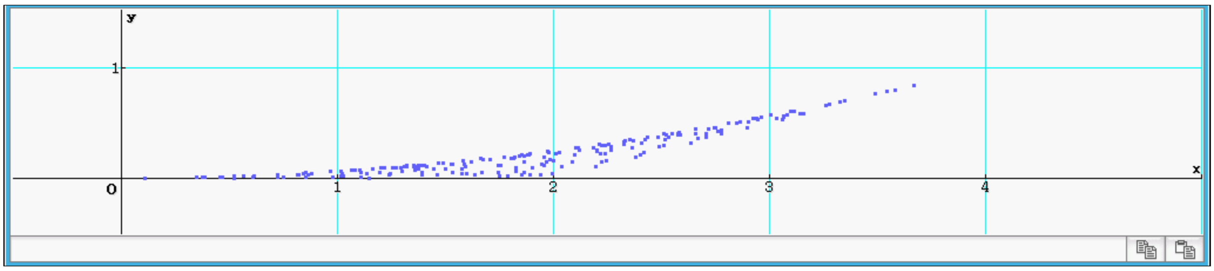


Abbildung 43: Darstellung des Umfangs in Abhängigkeit vom Umfang

Aus der Darstellung (s. Abb. 43) lässt sich vermuten, dass die Punkmenge nach oben durch eine Parabel und nach unten für $x > 2$ durch eine Gerade begrenzt ist. Zur Überprüfung und Bestätigung werden die entsprechenden Terme herangezogen.

Es gilt: $F = a \cdot b$ und $U = 2a + 2b$

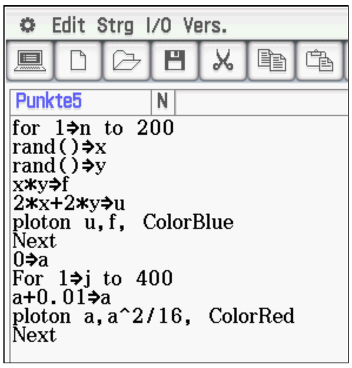
Wir lösen die zweite Gleichung nach b auf und setzen dies in die erste ein.

⇨ $F = a(U/2 - a) = -a^2 + U/2 \cdot a$ (*)

Der Ausdruck (*) beschreibt eine nach unten geöffnete Parabel. Für die Abschätzung interessiert uns das Maximum. Die beiden Nullstellen haben die Werte $a_1 = 0$ und $a_2 = U/2$

⇨ Das Maximum erhält man für $a_m = U/4$ und die maximale Fläche ergibt sich zu $F_m = U^2/16$. Für Schülerinnen und Schüler ist es an dieser Stelle natürlich hilfreich den Graphen der Funktion mit in das obige Bild hinein zeichnen zu lassen. Dies ist aber leider nicht so einfach möglich. Wenn man nach Beendigung des Programms sich den Graphen einer zusätzlichen Funktion zeichnen lassen will, so wird vorher der Bildschirm gelöscht.

Die Abbildung 44 zeigt den Ausweg aus der oben geschilderten Problematik. Der Graph der Grenzfunktion wird mit Hilfe der zweiten *For*-Schleife punktweise geplottet. Das Ergebnis zeigt die Abbildung 45.




```
for 1⇒n to 200
rand()⇒x
rand()⇒y
x*y⇒f
2*x+2*y⇒u
ploton u,f, ColorBlue
Next
0⇒a
For 1⇒j to 400
a+0.01⇒a
ploton a,a^2/16, ColorRed
Next
```

Abbildung 44: Programm mit „oberer“ Grenzfunktion

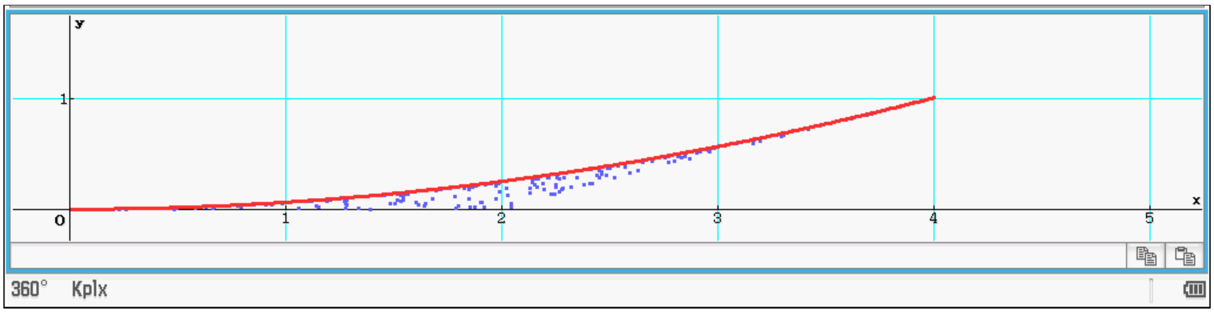


Abbildung 45: Punktmenge mit Grenzfunktion

Es fehlt noch die untere Begrenzung. Es ist leicht einsehbar, dass dies für U < 2 die x-Achse ist, da aus U < 2 folgt: a = 0 oder b = 0 und damit F = 0.

Ist U > 2, dann kann weder a = 0 noch b = 0 gelten. Insbesondere muss dann a + b > 1 (*) gelten. Der Flächeninhalt wird minimal, wenn a oder b minimal sind. Wegen (*) ist dies der Fall, wenn a = 1 oder b = 1 gilt.

Es sei b = 1 => F = a und U = 2(a + 1) => F(U) = U/2 – 1 (**)

Durch (**) wird gerade die untere Gerade beschrieben (s. Abb. 46). Erzeugt wird das Bild, indem man in das Programm (s. Abb. 45) vor das letzte *next* die folgende Zeile einfügt: *ploton a,a/2-1, ColorGreen*

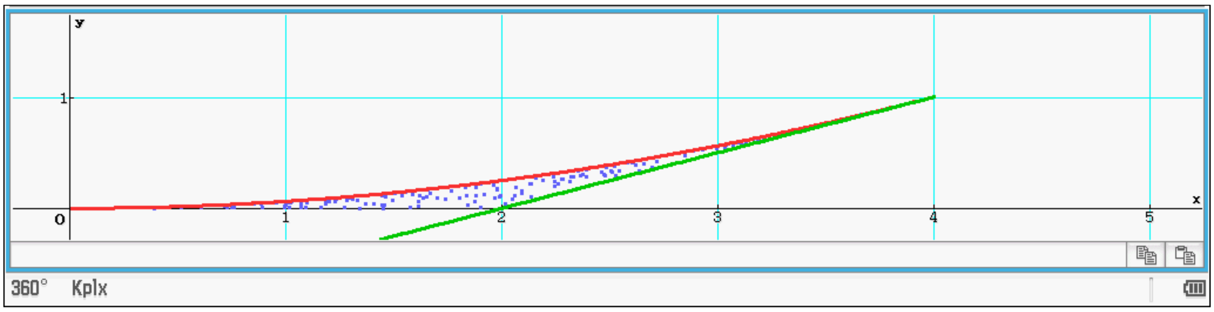
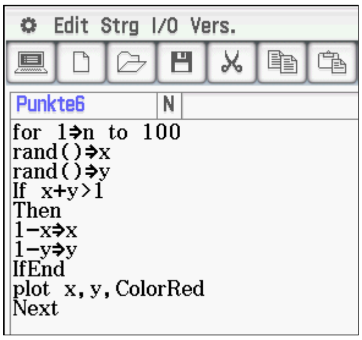


Abbildung 46: Punktmenge mit beiden Grenzfunktionen

Es wurden bisher als Ausgangspunkt Punkte betrachtet, die in einem Quadrat eingesperrt waren. Man kann die obigen Fragestellungen in der Hinsicht verändern, dass man nun als Ausgangsmenge Punkte betrachtet, die in einem rechtwinkligen Dreieck liegen. Man erhält eine solche Menge zum Beispiel dadurch, dass man die Punkte wieder nach obigem Zufallsprinzip auswählt. Wir beschränken die Menge dadurch, dass wir x + y < 1 fordern. Dies zu erreichen hat man die Möglichkeit, die Punkte, für die x + y > 1 gilt, auszuschließen oder die Punkte an der Geraden x + y = 1 zu spiegeln. (s. Abb. 47)



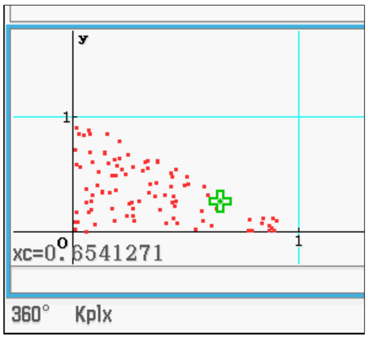


Abbildung 47: In einem Dreieck eingesperrte Punkte

Man kann nun mit diesen Punkten ebenso verfahren wie oben und hat damit sehr viele Differenzierungsmöglichkeiten für den Unterricht. Des Weiteren sei darauf hingewiesen, dass sich die in diesem Abschnitt beschriebenen Erkundungen auch mit einer Tabellenkalkulation durchgeführt werden können.

7.3 Das Lösen von Gleichungen

Die Äquivalenzumformungen werden den Schülerinnen und Schülern in der Regel mit Hilfe des Modells einer Waage nahe gebracht. Mit dem ClassPad lassen sich die jeweiligen Umformungen grafisch veranschaulichen. Daneben bietet ein CAS die Möglichkeit, die einzelnen zu machenden Schritte vom Rechner ausführen zu lassen. So können Schülerinnen und Schüler ihre Umformungen kontrollieren. Dies ist vor allem in Bezug auf den folgenden häufig auftretenden Fehler eine große Hilfe:

$$3x = 9 \mid -3$$
$$x = 6$$

Um den Rechner die Äquivalenzumformung durchführen zu lassen, ist die Gleichung einzuklammern und die Aktion anzugeben. Für die grafische Darstellung wird jeweils eine Seite der Gleichung markiert und in das Zeichenfenster gezogen. Es ist zu erkennen, dass der x-Wert der jeweiligen Schnittpunkte sich nicht ändert (s. Abb. 48). Es bietet sich jetzt an zu diskutieren, was die Äquivalenzumformungen grafisch bedeuten. Relativ einfach zu verstehen ist die Addition bzw. Subtraktion einer Zahl. Dies wurde ja schon im Zusammenhang mit der grafischen Darstellung linearer Funktionen diskutiert. Komplizierter zu verstehen sind die Addition bzw. Subtraktion von x-Werten und die Multiplikation bzw. Division mit Zahlen. Der Ausgangspunkt ist hier, dass eine lineare Gleichung immer so interpretiert werden kann, dass es sich um die Bestimmung eines Schnittpunkts zweier Geraden handelt. Der Ansatzpunkt ist ja, dass zu gleichen y-Werten x-Werte bestimmt werden. Da ja dann auch die x-Werte identisch sind, wird der Schnittpunkt um den Wert a·x in y-Richtung verschoben; gleichzeitig verändern sich natürlich auch die Steigungen der Geraden. Entsprechendes gilt für die Multiplikation bzw. Division mit Zahlen.

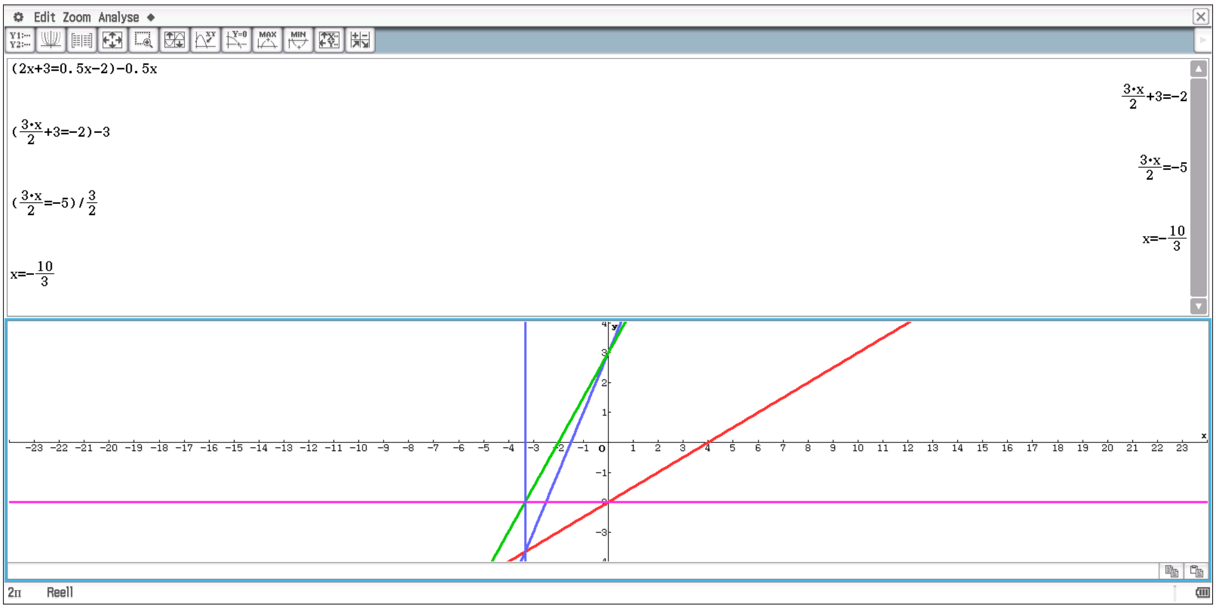


Abbildung 48: Lösen einer Gleichung

8. Binomische Formeln

Ein CAS „kennt“ natürlich die binomischen Formeln (s. Abb. 49). Für die Schülerinnen und Schüler ist es sicher erstaunlich, dass der ClassPad die Klammern nicht automatisch ausmultipliziert. Das verdeutlicht eine wichtige Tatsache, nämlich dass es vom mathematischen Gesichtspunkt aus nicht immer so ist, dass der ausmultiplizierte Term der einfachere ist. In vielen Fällen ist die Zerlegung in Faktoren der mathematisch verständlichere Term.

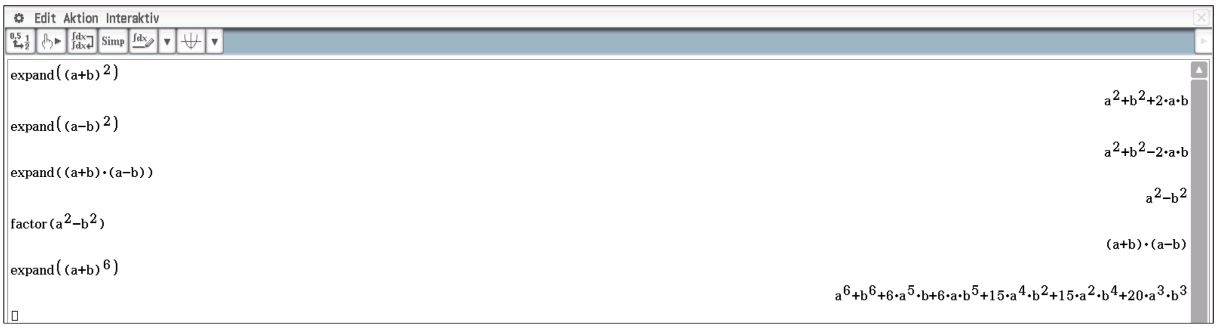


Abbildung 49: Binomische Formeln

Interessant ist es, die entstehenden Koeffizienten bei höheren Potenzen zu untersuchen. Dies könnte man mit Hilfe der Tabellenkalkulation bewerkstelligen. Es ergibt sich dabei allerdings das Problem, dass die mögliche Spaltenbreite für die Darstellung nicht ausreichend ist. Es aber möglich, sich den Inhalt einer Zelle genauer anzuschauen. Dies gelingt mit Hilfe des Symbols . In der Abbildung 50 wurde dies für die Zelle C8 realisiert. Der Inhalt einer markierten Zelle wird natürlich auch immer in der Zeile unten dargestellt.

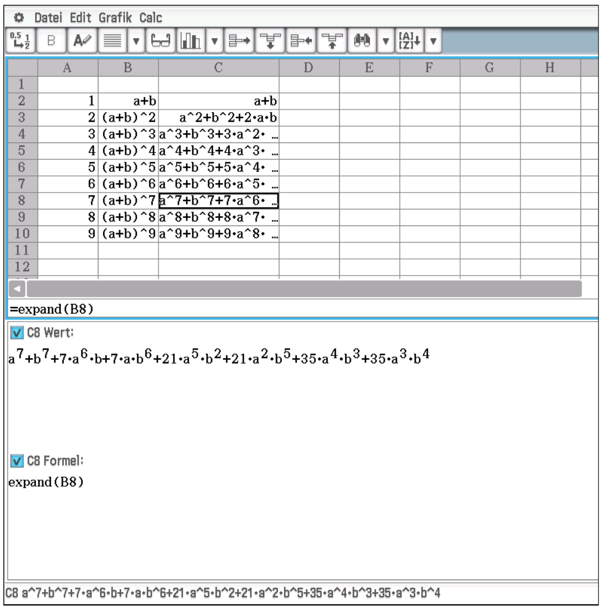


Abbildung 50: Binomische Formeln in der Tabellenkalkulation

Die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lässt sich im Geometrie-Modul veranschaulichen. Die Konstruktion ist aufwendig und wird im Folgenden beschrieben (s. Abb. 51). Zunächst sei darauf hingewiesen, dass die Koordinatenachsen im ClassPad zwar gezeichnet werden, sie aber nicht für Konstruktionen verwendet werden können. Daher müssen zunächst Strecken oder Geraden auf diese Achsen gelegt werden. Die Punkte A und B werden vorgegeben. Der Punkt E wird auf die Strecke AB gelegt, wodurch er nur noch auf dieser Strecke verändert werden kann. Die übrigen Punkte werden als Schnittpunkte mit den entsprechenden Geraden erzeugt und sind somit abhängig von der Lage des Punktes E. Oder anders ausgedrückt, wenn man an E zieht, verändert sich deren Lage entsprechend.

Um die Zeichnung übersichtlicher zu gestalten, sind die für die Konstruktion notwendigen Geraden verborgen worden und danach die Strecken als Verbindung der entsprechenden Punkte gezeichnet worden. Die Flächen der relevanten Vierecke sind zwar direkt messbar; aber man kann natürlich auch die entsprechenden Strecken direkt messen und die Werte im Konstruktionsfeld darstellen. Der ClassPad bietet im Menü *Zeichnen* den Befehl *Formelterm*, mit dem sich die Flächeninhalte der Rechtecke bestimmen lassen. Mit der Veränderung der Lage des Punktes E, verändern sich natürlich auch die Werte der Flächeninhalte und der Zusammenhang zur ersten binomischen Formel lässt sich visualisieren. Diese Veränderung kann man händisch mit dem Stift oder automatisch mit der *Animation* ausführen. Es besteht natürlich auch die Möglichkeit, die erzeugten Daten mit der Tabellenkalkulation weiter zu untersuchen.

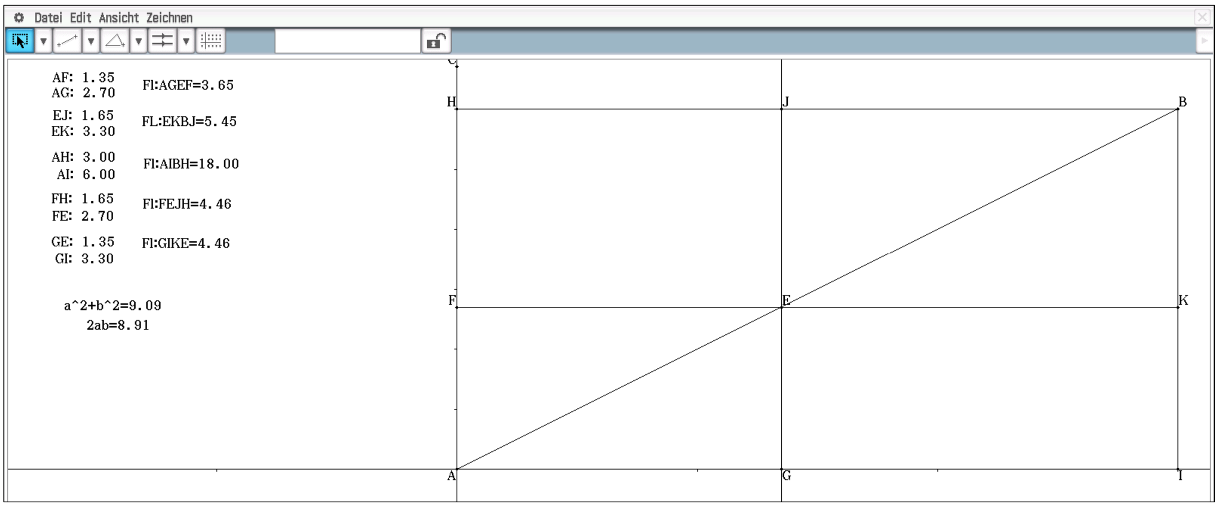


Abbildung 51: Geometrische Veranschaulichung der 1. und 2. Binomischen Formel

Durch eine entsprechende Uminterpretation der Strecken für a und b lässt sich auch der Zusammenhang zur zweiten binomischen Formel herstellen.

Für die Visualisierung der dritten binomischen Formel ist die Konstruktion zu verändern (s. Abb. 52)

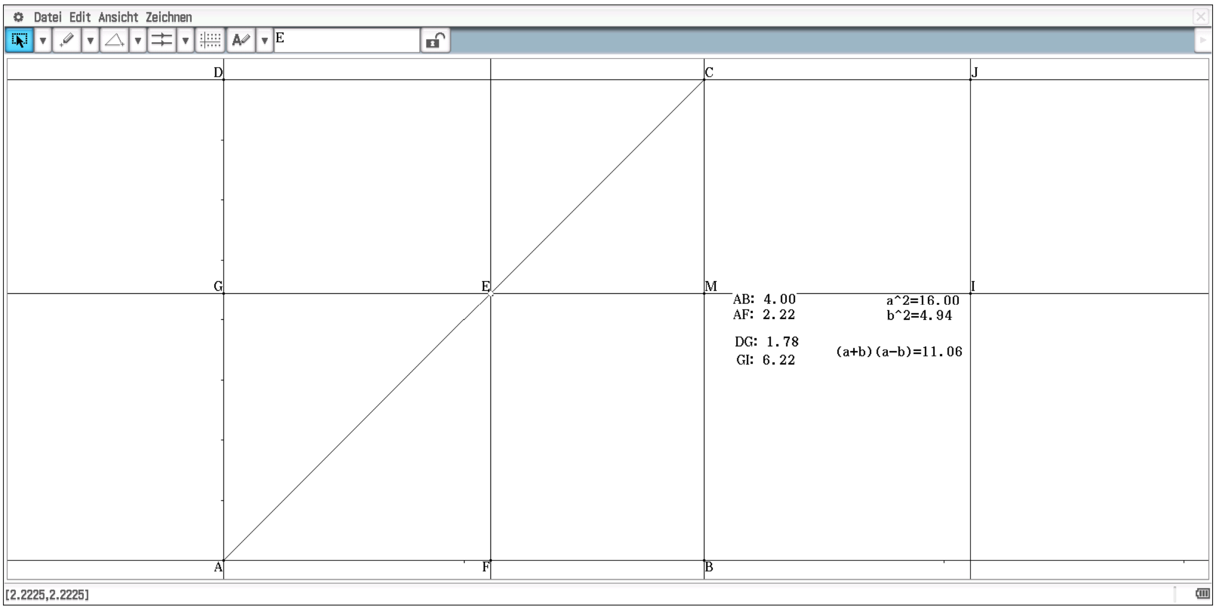


Abbildung 52: Geometrische Veranschaulichung der dritten binomischen Formel

Ausgegangen wird von dem Quadrat ABCD. Dieses visualisiert a^2 und das Quadrat AFEG steht für b^2. Die Länge der Strecke DG gibt den Wert für a–b an. Die Visualisierung von a+b ist noch zu konstruieren. Dazu wird der Punkt M als Schnittpunkt der Geraden GE und BC festgelegt. Der Punkt M ist Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius der Streckenlänge von MB, was dem Wert der Variablen b entspricht. Daraus ergibt sich, dass die Länge der Strecke GI den Term a+b repräsentiert. Genau wie oben lassen sich die Zusammenhänge bzgl. der dritten binomischen Formel durch Variation des Punktes E grafisch veranschaulichen.

9. Der Satz von Thales

Der Satz von Thales lautet in seiner Kurzform: „Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter." Dies setzt voraus, dass man zunächst in einem Kreis einen Durchmesser zeichnet und über diesem ein Dreieck einzeichnet, dessen Spitze auf dem Kreis liegt. Schülerinnen und Schüler könnten nach dieser Vorgabe eine solche Zeichnung anfertigen und feststellen, dass trotz einer Verschiebung dieser Spitze auf dem Kreis sich immer ein rechter Winkel ergibt. Wenn man die Fragestellung offener gestaltet, zum Beispiel, indem man die Lernenden auffordert, auf einen gegebenen Kreis drei Punkte so zu legen, dass sich ein rechtwinkliges Dreieck ergibt, werden die Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich eher gemäß der Abbildung 53 vorgehen. Es wurde zunächst die Sehne CD eingezeichnet und zu dieser im Punkt D eine Senkrechte errichtet. Der Schnittpunkt mit dem Kreis ergibt dann den dritten Eckpunkt. Die Schülerinnen und Schüler können jetzt entdecken, dass die sich ergebende Hypotenuse ein Durchmesser des Kreises ist. Diese Erkenntnis lässt sich noch dadurch untermauern, dass man die Konstruktion durch eine Animation dynamisiert. Um dies zu erreichen, ist der Punkt C und danach der Kreis zu markieren. Für die Animation ist: *Edit, Animieren, Animation hinzufügen* einzugeben. Danach betätigt man *Edit, Animieren, Ablaufen (einmal)* (s. Abb. 53)

Man hat jetzt die Umkehrung des Satzes von Thales den Lernenden plausibel gemacht. Natürlich ist diese damit noch nicht bewiesen. Dies muss noch erfolgen.

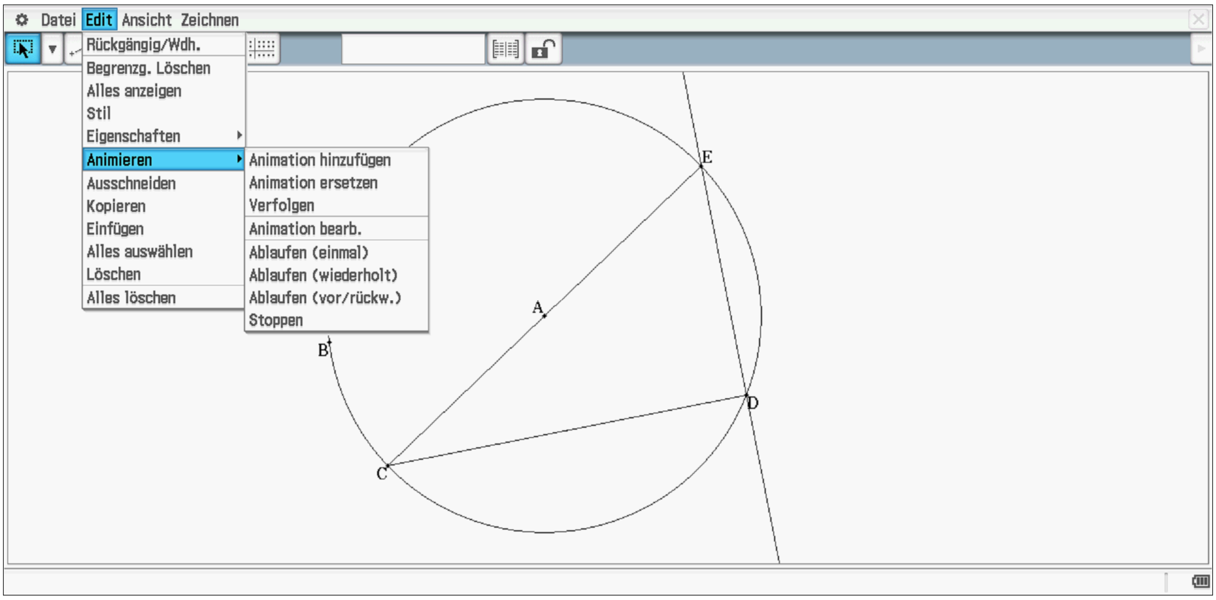


Abbildung 53: Hinführung zur Umkehrung des Satz des Thales

Aus dem Obigen ergibt sich die Frage, ob auch die Umkehrung des Satzes gilt. Der Antwort kann man sich natürlich nähern, indem, wie schon erwähnt, einen Kreis mit Durchmesser zeichnet und verschiedene Eckpunkte auf dem Kreis ausprobiert. Um auch hier das funktionale Verständnis zu stärken, halten wir ein anderes Vorgehen für ertragreicher.

In Abbildung 54 wurde zunächst ein Kreis gezeichnet. Die Gerade CD dient als Hilfslinie. Auf dieser Geraden wurde der Punkt gelegt und dazu durch E die Senkrechte zu dieser

Geraden konstruiert. Auf diese Senkrechte wurde der Punkt F gelegt und eine Parallele zur ursprünglichen Geraden konstruiert. Die Schnittpunkte G und H mit dem Kreis bilden zusammen mit dem beliebig auf den Kreis gelegten Punkt I die Eckpunkte des zu betrachtenden Dreiecks. Durch Ziehen am Punkt F erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass der Winkel bei I weniger als 90° misst, wenn die Seite GH unterhalb des Mittelpunktes bzw. mehr als 90° misst, wenn die Seite oberhalb des Mittelpunktes liegt. Daraus folgt, dass sich der rechte Winkel genau dann ergibt, wenn die Seite GH durch den Mittelpunkt verläuft. Da der Punkt I willkürlich gelegt wurde, hat man damit auch gleichzeitig den Satz vom Umfangswinkel vorbereitet. Verbindet man noch den Mittelpunkt mit den Eckpunkten G und H, so gilt dies auch für den Satz vom Mittelpunkts Winkel. Wir gehen auf diese beiden Sätze nicht weiter ein, da sie in der Regel nicht mehr Bestandteil des Curriculums sind.

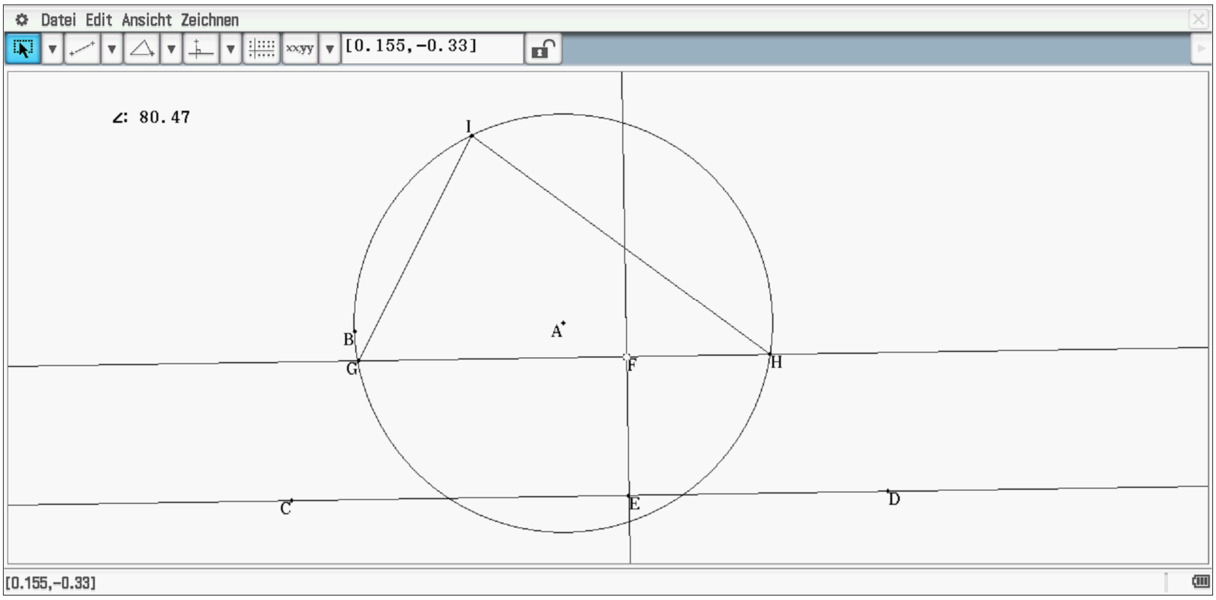


Abbildung 54: Hinführung zum Satz des Thales

10. Untersuchung an ähnlichen Dreiecken

Die Abbildung 55 zeigt die Konstruktion zur Untersuchung ähnlicher Dreiecke. Man lässt zunächst die Strecken AD und AF zeichnen. Auf die Strecke AF wird ein weiterer Punkt J gelegt und dieser mit dem Punkt D verbunden. Diese Strecke wird benötigt, damit man die zu animierende Strecke BC parallel zu dieser ausrichten kann. Der Punkt B wird auf die Strecke AD gelegt und durch diesen eine Parallele zur Strecke DJ konstruiert. C ist der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Strecke AF.

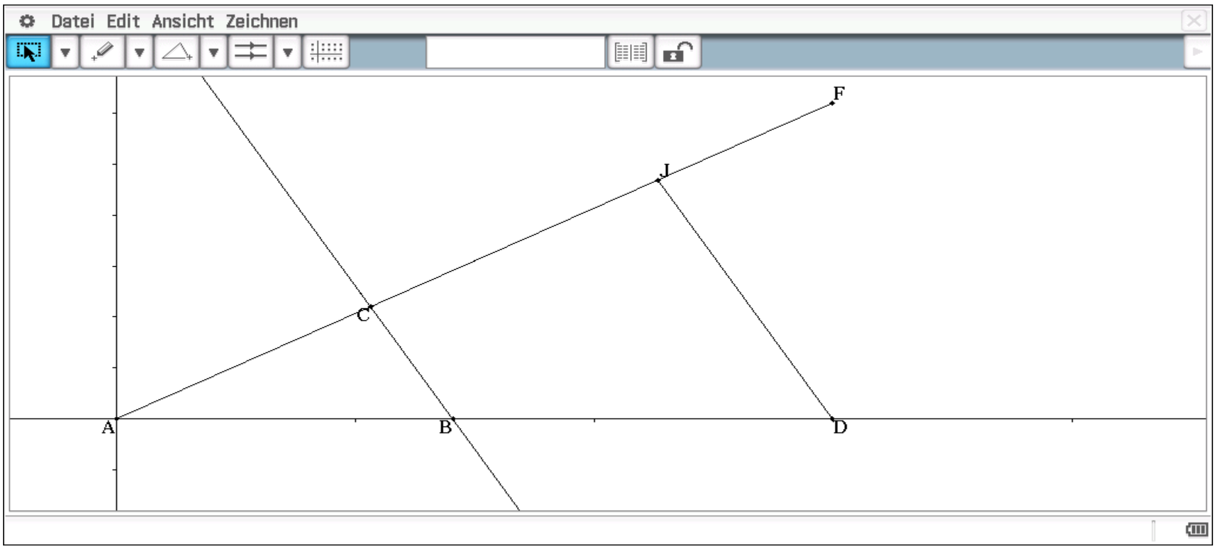
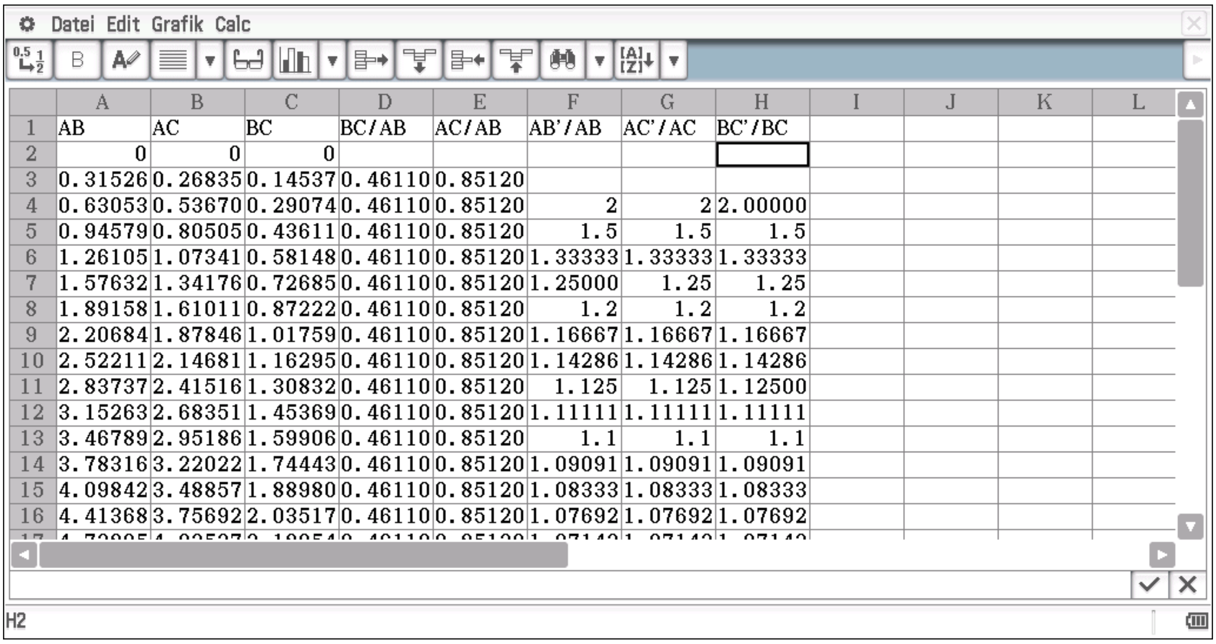


Abbildung 55: Konstruktion ähnlicher Dreiecke

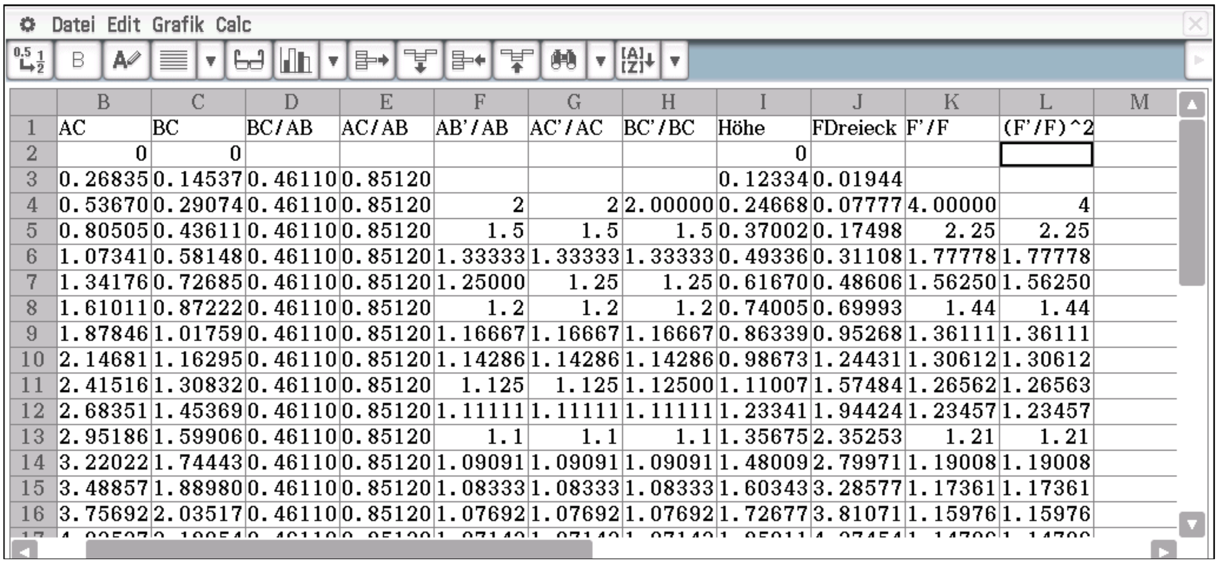
Nach der Animation sind die jeweiligen Streckenlängen zugänglich und können mit der Tabellenkalkulation untersucht werden (s. Abb. 56). Man erhält die Streckenlängen, indem die beiden Endpunkte markiert werden und im Messfenster das Tabellensymbol aktiviert wird. Nach der Markierung der Spalte lassen sich die Werte mit *Kopieren* und *Einfügen* in die Tabellenkalkulation übertragen. Zusätzlich wurden Quotienten berechnet, aus denen hervorgeht, dass die jeweiligen Seitenverhältnisse konstant sind (Spalten D und E Abb. 56). Den jeweiligen Streckungsfaktor findet man in den Zeilen der Spalten F, G und H.

Wenn man zusätzlich die Veränderung des Flächeninhalts des Dreiecks diskutieren möchte, wird zusätzlich die Höhe benötigt. Diese muss nicht extra konstruiert werden, da sich der Abstand des Punktes C von der Seite AB direkt im Messfenster ablesen lässt. Die Übertragung der Daten in die Tabellenkalkulation geschieht entsprechend. Aus den beiden hinteren Spalten (s. Abb. 57) lässt sich der Zusammenhang $F' = k^2 \cdot F$, wobei k der Streckfaktor ist, direkt ablesen.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	AB	AC	BC	BC/AB	AC/AB	AB'/AB	AC'/AC	BC'/BC				
2	0	0	0									
3	0.31526	0.26835	0.14537	0.46110	0.85120							
4	0.63053	0.53670	0.29074	0.46110	0.85120	2	2	2.00000				
5	0.94579	0.80505	0.43611	0.46110	0.85120	1.5	1.5	1.5				
6	1.26105	1.07341	0.58148	0.46110	0.85120	1.33333	1.33333	1.33333				
7	1.57632	1.34176	0.72685	0.46110	0.85120	1.25000	1.25	1.25				
8	1.89158	1.61011	0.87222	0.46110	0.85120	1.2	1.2	1.2				
9	2.20684	1.87846	1.01759	0.46110	0.85120	1.16667	1.16667	1.16667				
10	2.52211	2.14681	1.16295	0.46110	0.85120	1.14286	1.14286	1.14286				
11	2.83737	2.41516	1.30832	0.46110	0.85120	1.125	1.125	1.12500				
12	3.15263	2.68351	1.45369	0.46110	0.85120	1.11111	1.11111	1.11111				
13	3.46789	2.95186	1.59906	0.46110	0.85120	1.1	1.1	1.1				
14	3.78316	3.22022	1.74443	0.46110	0.85120	1.09091	1.09091	1.09091				
15	4.09842	3.48857	1.88980	0.46110	0.85120	1.08333	1.08333	1.08333				
16	4.41368	3.75692	2.03517	0.46110	0.85120	1.07692	1.07692	1.07692				

Abbildung 56: Untersuchung der Streckenlängen ähnlicher Dreiecke



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	AC	BC	BC/AB	AC/AB	AB'/AB	AC'/AC	BC'/BC	Höhe	FDreieck	F'/F	(F'/F)^2	
2	0	0						0				
3	0.26835	0.14537	0.46110	0.85120				0.12334	0.01944			
4	0.53670	0.29074	0.46110	0.85120	2	2	2.00000	0.24668	0.07777	4.00000	4	
5	0.80505	0.43611	0.46110	0.85120	1.5	1.5	1.5	0.37002	0.17498	2.25	2.25	
6	1.07341	0.58148	0.46110	0.85120	1.33333	1.33333	1.33333	0.49336	0.31108	1.77778	1.77778	
7	1.34176	0.72685	0.46110	0.85120	1.25000	1.25	1.25	0.61670	0.48606	1.56250	1.56250	
8	1.61011	0.87222	0.46110	0.85120	1.2	1.2	1.2	0.74005	0.69993	1.44	1.44	
9	1.87846	1.01759	0.46110	0.85120	1.16667	1.16667	1.16667	0.86339	0.95268	1.36111	1.36111	
10	2.14681	1.16295	0.46110	0.85120	1.14286	1.14286	1.14286	0.98673	1.24431	1.30612	1.30612	
11	2.41516	1.30832	0.46110	0.85120	1.125	1.125	1.12500	1.11007	1.57484	1.26562	1.26563	
12	2.68351	1.45369	0.46110	0.85120	1.11111	1.11111	1.11111	1.23341	1.94424	1.23457	1.23457	
13	2.95186	1.59906	0.46110	0.85120	1.1	1.1	1.1	1.35675	2.35253	1.21	1.21	
14	3.22022	1.74443	0.46110	0.85120	1.09091	1.09091	1.09091	1.48009	2.79971	1.19008	1.19008	
15	3.48857	1.88980	0.46110	0.85120	1.08333	1.08333	1.08333	1.60343	3.28577	1.17361	1.17361	
16	3.75692	2.03517	0.46110	0.85120	1.07692	1.07692	1.07692	1.72677	3.81071	1.15976	1.15976	

Abbildung 57: Untersuchung der Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke

Die Erkenntnisse über Dreiecksflächen lassen sich natürlich auf andere Flächen übertragen; insbesondere auch auf Kreisflächen. Dazu wird ein Punkt des Umfangs auf eine vorgegebene Strecke gelegt, deren einer Endpunkt der Mittelpunkt des Kreises ist (s. Abb. 58). Man erhält dann die Kreise durch Animation des Punktes C auf der Strecke AB. Die Tabelle *Abstand* gibt die jeweiligen Radien an.

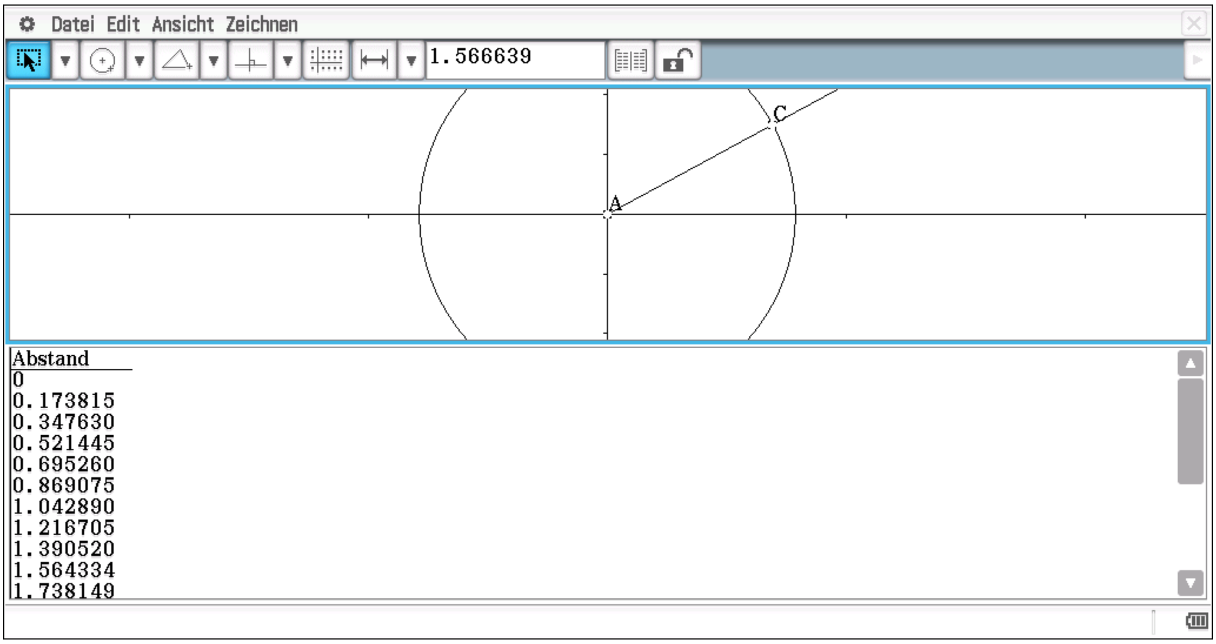
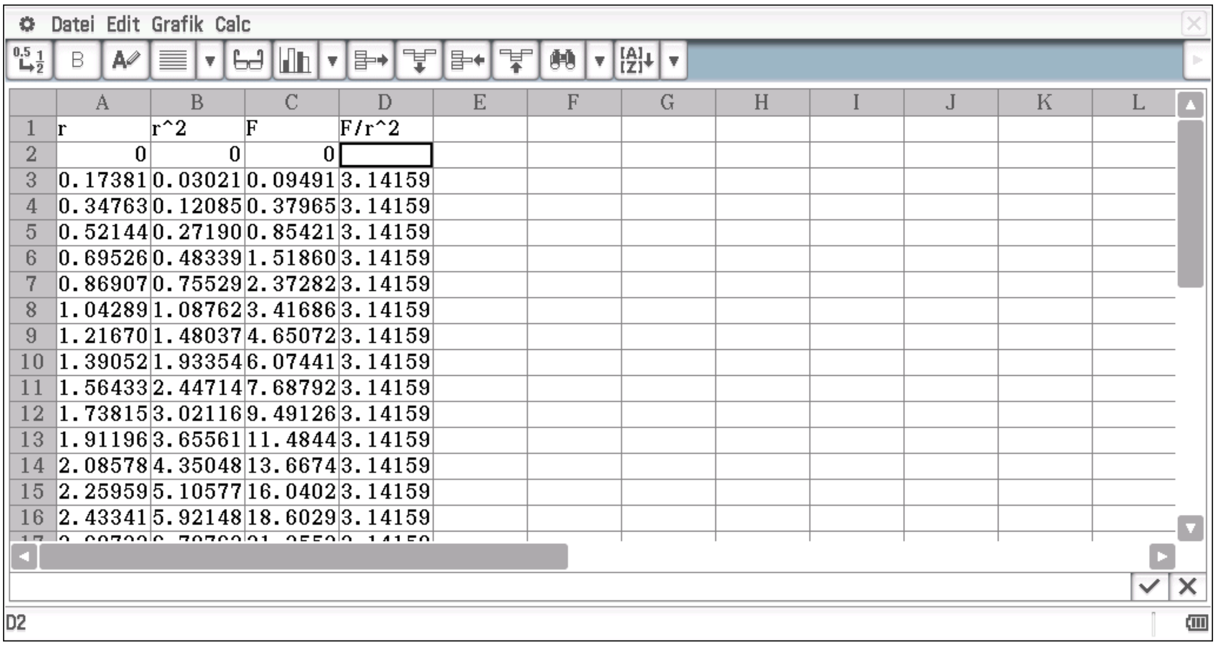


Abbildung 58: Animation mehrerer Kreise

Die Radien lassen sich wieder in die Tabellenkalkulation übertragen (s. Abb. 59). Das Gleiche gilt für den Flächeninhalt der Kreise. Es muss natürlich kritisch hinterfragt werden, wie der ClassPad die Flächeninhalte bestimmt. Die Abbildung 59 zeigt zum einen die Proportionalität der Fläche zum Quadrat des Radius, zum anderen ergibt sich in Spalte D eine Näherung für π.



	A	B	C	D
1	r	r^2	F	F/r^2
2	0	0	0	
3	0.17381	0.03021	0.09491	3.14159
4	0.34763	0.12085	0.37965	3.14159
5	0.52144	0.27190	0.85421	3.14159
6	0.69526	0.48339	1.51860	3.14159
7	0.86907	0.75529	2.37282	3.14159
8	1.04289	1.08762	3.41686	3.14159
9	1.21670	1.48037	4.65072	3.14159
10	1.39052	1.93354	6.07441	3.14159
11	1.56433	2.44714	7.68792	3.14159
12	1.73815	3.02116	9.49126	3.14159
13	1.91196	3.65561	11.4844	3.14159
14	2.08578	4.35048	13.6674	3.14159
15	2.25959	5.10577	16.0402	3.14159
16	2.43341	5.92148	18.6029	3.14159

Abbildung 59: Proportionalität der Kreisfläche zum Quadrat des Radius

11. Geometrische Konstruktion einer Parabel

Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die zu einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Gerade den gleichen Abstand haben. Mit Hilfe des Geometrie-

Programms des ClassPad lässt sich eine Parabel direkt erzeugen. Dazu wurde der Punkte C(1/0) und die Gerade y = -1 gezeichnet. Die Konstruktion erfolgt dann mit . Wenn man von der obigen Definition ausgeht, erscheint eine Konstruktion mit Hilfe der Animation sehr kompliziert, wenn nicht unmöglich.

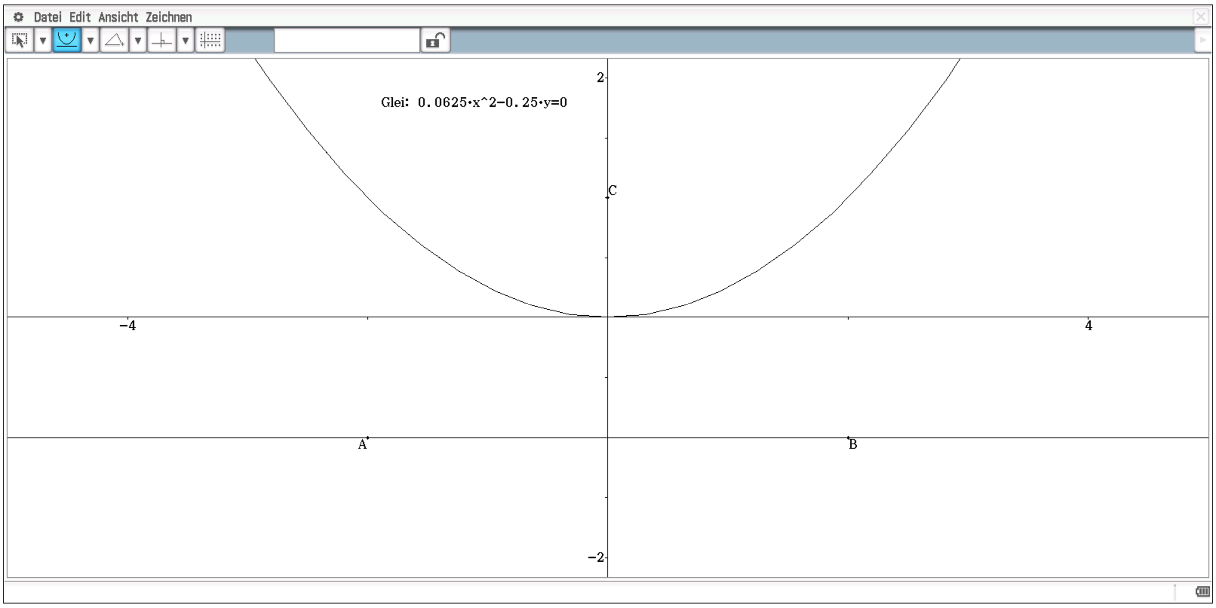


Abbildung 60: Parabel, deren Punkte bzgl. der Geraden y = -1 und des Punktes (0/1) den gleichen Abstand haben

Für die Schülerinnen und Schüler bleibt aber wegen der direkten Konstruktion wenig zu entdecken und zu erkennen; natürlich abgesehen von der Tatsache, dass die Parabel obige Eigenschaft hat. Diese Eigenschaft ist mit Sicherheit für die Schülerinnen und Schüler nicht offensichtlich. Sie lässt sich aber zumindest für einige Punkte verifizieren (s. Abb. 61).

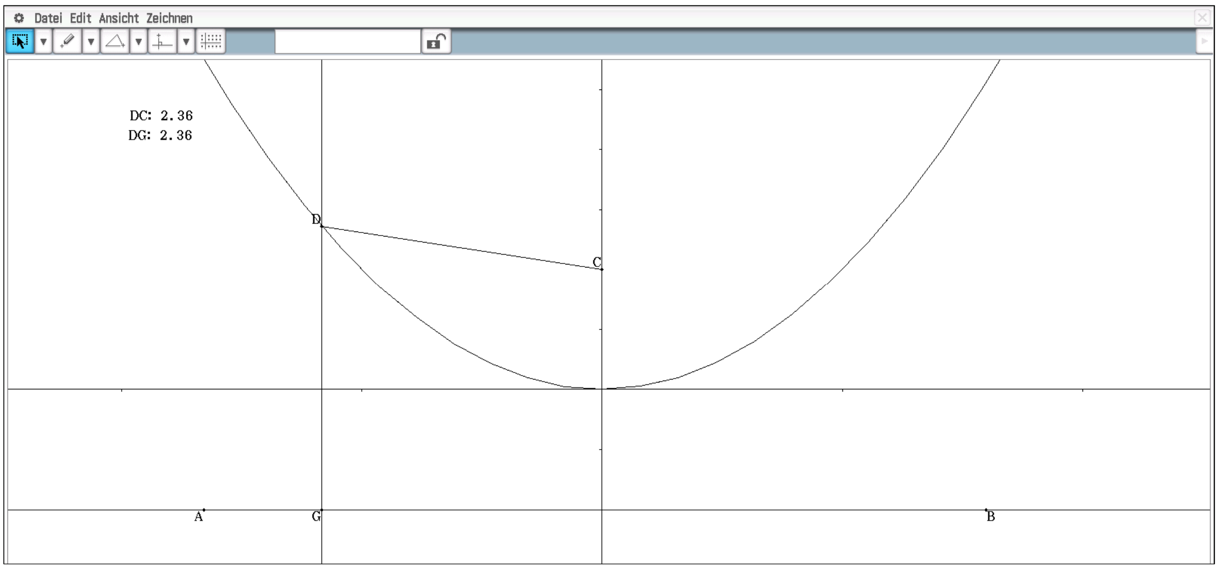


Abbildung 61: „Verifizierung" der Parabelkonstruktion

Für die Verifizierung kann man den Punkt D auf der Parabel verschieben oder eine entsprechende Animation erzeugen und die Streckenlänegen DC und DG vergleichen.

Im herkömmlichen Mathematikunterricht kommen Parabeln eigentlich nur als Graphen der quadratischen Funktion vor. Als eigenständige Leistung bleibt für die Schülerinnen und Schüler nur noch für einzelene Punkte der Parabel zu überprüfen, dass sie die gegebene Gleichung erfüllen.

Es gibt aber andere Möglichkeiten, der Parabelkonstruktion, wie das folgende Beispiel zeigt.

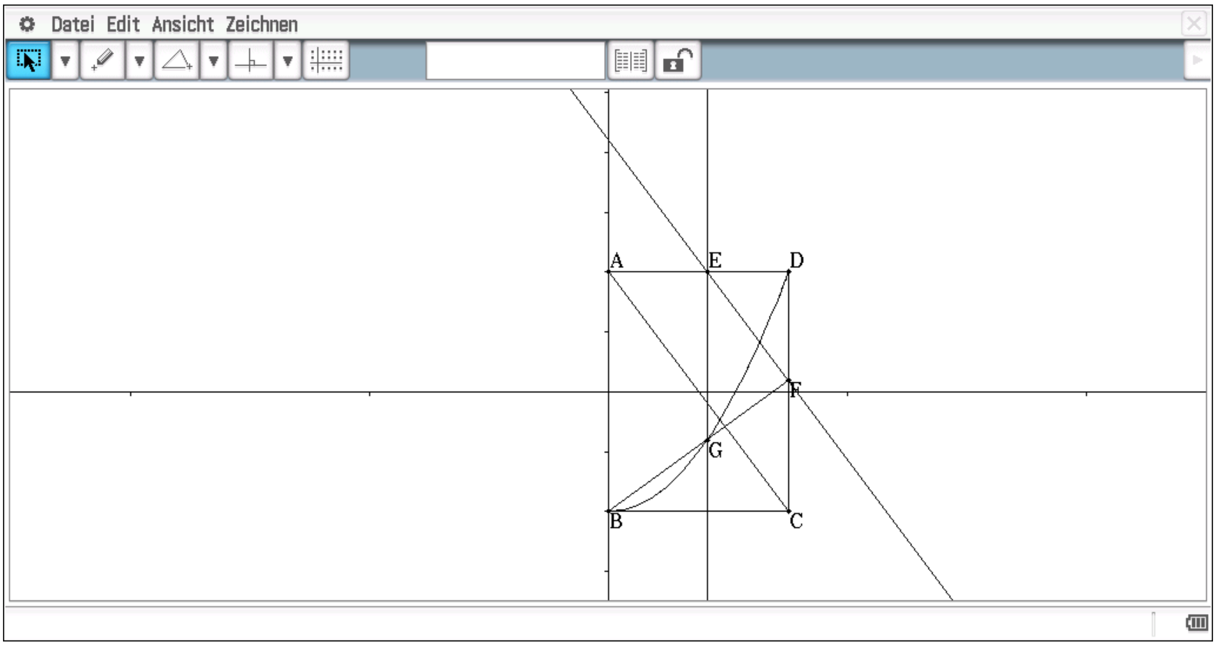


Abbildung 62: Konstruktion einer Parabel mit Hilfe einer Animation

Zunächst wird das Rechteck ABCD konstruiert (s. Abb. 62). Auf die Bedeutung der Größenverhältnisse gehen wir später ein. Durch den Punkt E, der beliebig auf der Strecke AD liegt wird eine Parallele zur Diagonalen durch die Punkte A und C gezogen. Der sich ergebene Schnittpunkt F mit der Strecke DC wird mit dem Punkt B verbunden. Die Senkrechte zur Seite AD durch den Punkt E schneidet die Strecke BF im Punkt G. Die Parabel ergibt sich als Spur des Punktes G bei Animation des Punktes E.

Dass es sich um eine Parabel handelt, lässt sich zunächst numerisch begründen. Die Spur des Punktes G kann man numerisch mit Hilfe der Tabellen erfassen. Zur Bearbeitung kopiert man diese in die Tabellenkalkulation. Dieses erreicht man dadurch, dass man nach der Animation den Punkt G markiert und im Messfenster das Tabellensymbol wählt. Es erscheinen dann die Koordinaten der Punkte, deren Spur bei der Animation gezeichnet worden sind. Diese Werte lassen sich, nachdem man die Spalte markiert hat, mit *kopieren* und *einfügen* direkt in die Tabellenkalkulation übertragen.

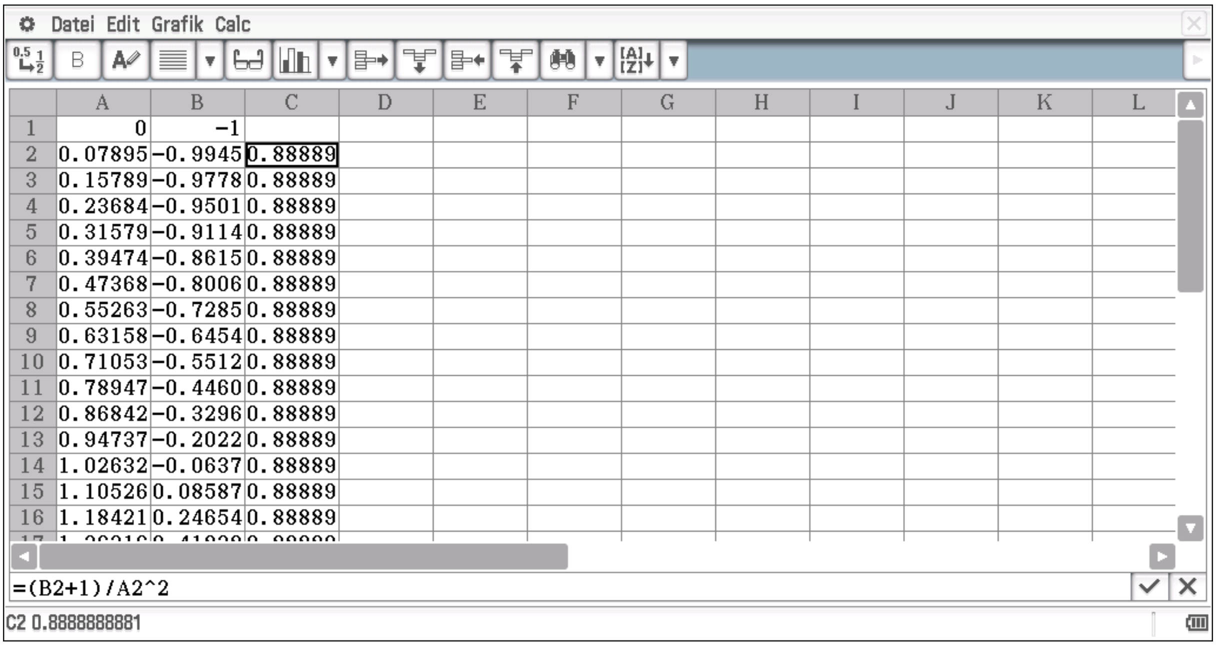
Die sich ergebenden Werte sind in Abbildung 62 wiedergegeben. Da der Scheitelpunkt im Punkt (0/1) liegt, sind die y-Werte für die Überprüfung um 1 zu erhöhen. Für die Überprüfung gehen wir auf die im Unterricht eher selten diskutierte Tatsache ein, dass y proportional zu x^2 gilt.

Als Ansatz wurde f(x) = a·x² – 1 gewählt. Man erkennt, dass sich für a = 0,88889 ergibt. Mit den Schülerinnen und Schülern ist jetzt der Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Rechteckseiten und der Variablen a zu klären. Der Wert a = 8/9 ergibt sich natürlich aus dem Seitenverhältnis $a = \frac{2}{1{,}5^2}$.

Es bleibt zu zeigen, dass der konstruierte Punkt G die Koordinaten $(x, \frac{b}{a^2}x^2)$ hat, dabei sei a die Länge der Rechteckseite in x-Richtung und b die Länge der Rechteckseite in y-Richtung. Für den Beweis sind die Punkte E, F und G relevant. Diese Punkte sind durch E(v/b), F(a/z) und G(v/w) gegeben. Zu zeigen ist: $w = \frac{b}{a^2} \cdot v^2$.

Für die Gerade g durch die Punkte E und F gilt: $y = -\frac{b}{a} \cdot x + c$ Da die Gerade g durch die Punkte E und F bestimmt ist, folgt: $c = b + \frac{b}{a} \cdot v \;\; und \;\; z = -b + c = \frac{b}{a} \cdot v$

Als nächstes betrachten wir die Gerade h durch die Punkte B und F. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Punkt B im Koordinatenursprung liegt. Dann folgt für die Gerade h: $y = \frac{z}{a} \cdot x = \frac{b}{a^2} \cdot v \cdot x \;\; und\ damit\ w = \frac{b}{a^2} \cdot v^2$. Damit ist natürlich auch die oben vermutete Beziehung zwischen den Seitenverhältnissen und dem Proportionalitätsfaktor bestätigt.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	0	-1										
2	0.07895	-0.9945	0.88889									
3	0.15789	-0.9778	0.88889									
4	0.23684	-0.9501	0.88889									
5	0.31579	-0.9114	0.88889									
6	0.39474	-0.8615	0.88889									
7	0.47368	-0.8006	0.88889									
8	0.55263	-0.7285	0.88889									
9	0.63158	-0.6454	0.88889									
10	0.71053	-0.5512	0.88889									
11	0.78947	-0.4460	0.88889									
12	0.86842	-0.3296	0.88889									
13	0.94737	-0.2022	0.88889									
14	1.02632	-0.0637	0.88889									
15	1.10526	0.08587	0.88889									
16	1.18421	0.24654	0.88889									

=(B2+1)/A2^2

C2 0.8888888881

Abbildung 63: Tabelle zur Überprüfung, ob die Punkte auf der Parabel liegen

11.1 Eine weitere Parabelkonstruktion

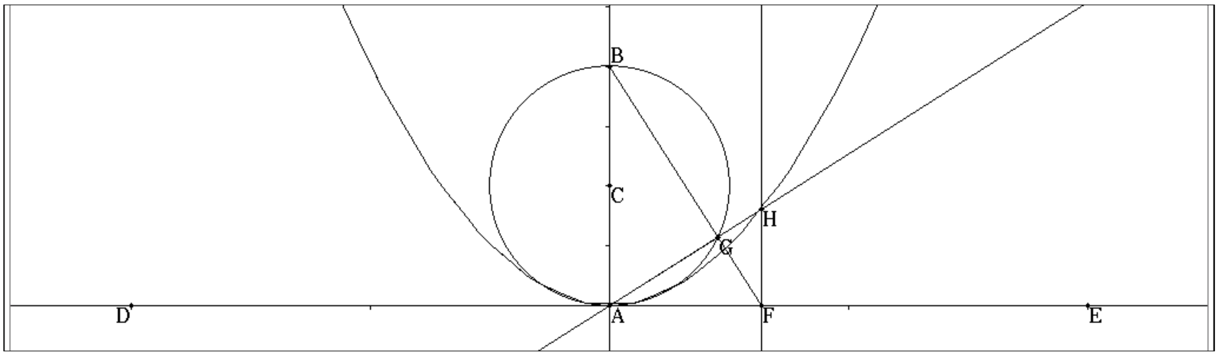
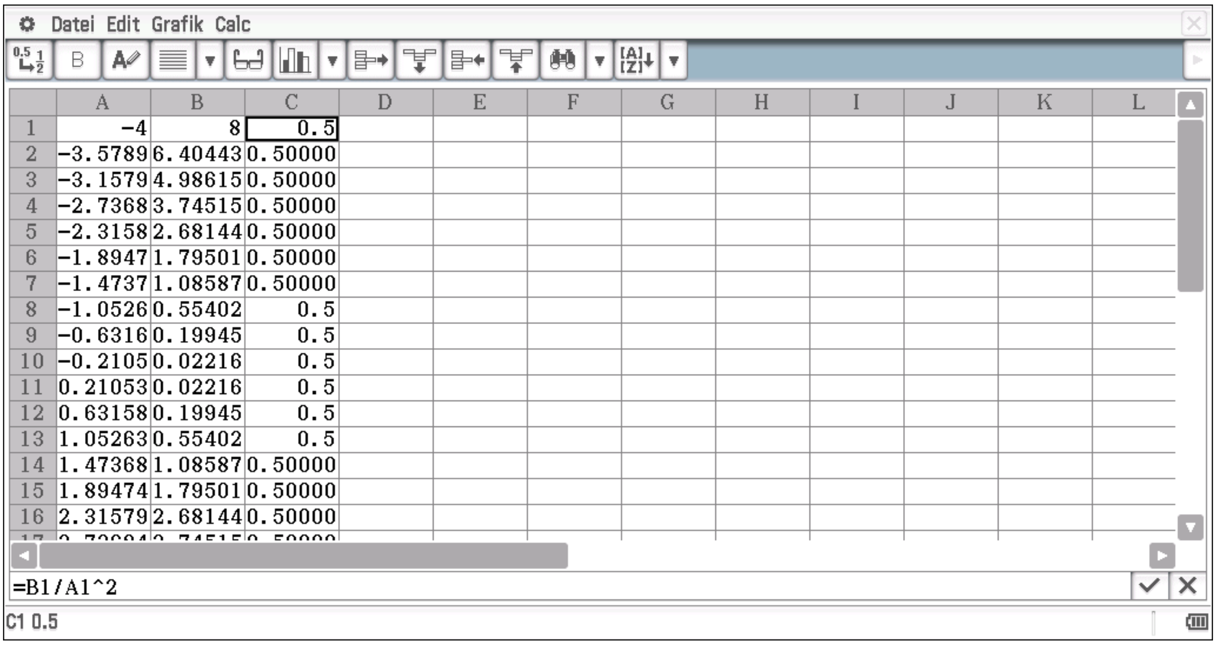


Abbildung 64: Konstruktion einer Parabel mit Hilfe des Thales-Satzes

Die Abbildung 64 zeigt eine weitere Möglichkeit der Parabelkonstruktion. Der Punkt C(1/0) ist Mittelpunkt eines Kreises, der die y-Achse in den Punkten A(0/0) und B(2/0) schneidet. Durch die Punkte D und E wurde eine Strecke gelegt, was für die zu erzeugende Animation erforderlich ist. An diese Strecke gebunden ist der Punkt F. Dieser wird mit dem Punkt B verbunden. Der Punkt G ergibt sich als Schnittpunkt mit dem Kreis. Durch den Punkt F wird eine Gerade parallel zur y-Achse gelegt. Da man auf die Koordinatenachsen nicht zugreifen kann, muss vorher eine Gerade auf die y-Achse, z.B. durch die Punkte A und B, gelegt werden. Der Punkt H ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte A und G und dieser Parallelen. Die Parabel ergibt sich durch Animation des Punktes F auf der Strecke DE und Verfolgung des Punktes H.

Auch hier lässt sich der Beweis für den speziellen Fall mit Hilfe der Tabellenkalkulation führen (s. Abb. 65).



	A	B	C
1	-4	8	0.5
2	-3.5789	6.40443	0.50000
3	-3.1579	4.98615	0.50000
4	-2.7368	3.74515	0.50000
5	-2.3158	2.68144	0.50000
6	-1.8947	1.79501	0.50000
7	-1.4737	1.08587	0.50000
8	-1.0526	0.55402	0.5
9	-0.6316	0.19945	0.5
10	-0.2105	0.02216	0.5
11	0.21053	0.02216	0.5
12	0.63158	0.19945	0.5
13	1.05263	0.55402	0.5
14	1.47368	1.08587	0.50000
15	1.89474	1.79501	0.50000
16	2.31579	2.68144	0.50000

Abbildung 65: Begründung mit Hilfe der Tabellenkalkulation für das Beispiel

Der Beweis lässt sich folgendermaßen führen:

Es sei A(0/0), B(0/2r) und F(x/0). Dann hat die Gerade BF die Steigung m_{BF} = -2r/z. Wegen des Satzes von Thales gilt dann m_{AH} = z/2r und für die Gerade $y = \frac{z}{2r} \cdot x$. Daraus ergibt sich für den verfolgten Punkt $H(z/\frac{z^2}{2r})$ Auch hier wird durch den allgemeinen Beweis der Zusammenhang zwischen dem Streckungsfaktor und einer vorgegebenen Größe, in diesem Fall der Radius des Thaleskreises deutlich.

12. Zusammenhang zwischen quadr. Funktion und Parabel

Der ClassPad bietet die Möglichkeit, unter Benutzung von Schiebereglern den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der allgemeinen quadratischen Funktion $f(x) = \ a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ und der dazugehörenden Parabel zu entdecken (s. Abb. 66). Für die Schülerinnen und Schüler ist es hier wieder wichtig, dass sie nicht alle drei Koeffizienten gleichzeitig variieren. Neben der Tatsache, dass die y-Achse für y = c geschnitten wird und dass der Koeffizient vor dem quadratischen Term für die Streckung bzw. Stauchung der Parabel verantwortlich ist, ist vor allem bedeutsam, dass der x-Wert des Scheitelpunkts $x_s = -\frac{b}{2}$ beträgt. Der y-Wert des Scheitelpunktes ergibt sich aus dem Funktionswert f(-b/2). Der algebraische Beweis ergibt sich natürlich mit Hilfe der quadratischen Ergänzung. Da diese aber für die Schülerinnen und Schüler oft schwer nachvollziehbar ist, ergibt sich so ein weiterer Zugang zur Scheitelpunktsform, mit deren Hilfe sich dann auch quadratische Gleichungen leicht lösen lassen. Ebenso ergibt sich sofort eine geometrische Interpretation für die Anzahl der Lösungen. Das heißt, quadratische Funktionen und Gleichungen sollten thematisch nicht getrennt werden.

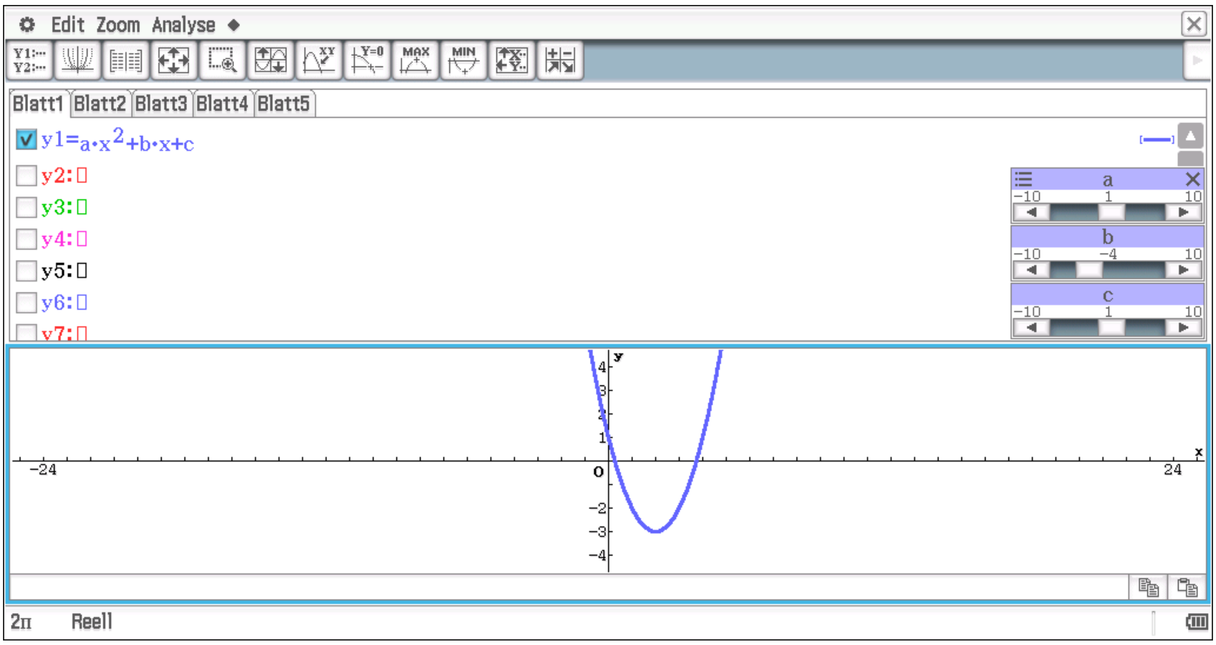


Abbildung 66: Graph der allgemeinen quadratischen Funktion

Nach den obigen Überlegungen ergibt sich sofort ein Zugang zu den quadratischen Gleichungen, da sich die Lösungen für quadratische Gleichungen direkt aus der Scheitelpunktsform ergeben. Insbesondere wird durch den Zusammenhang zur grafischen Darstellung sofort verstehbar, dass es genau eine, zwei oder keine Lösungen geben kann.

Neben der obigen Form lässt sich auch die Scheitelpunktsform entsprechend diskutieren (s. Abb. 67)

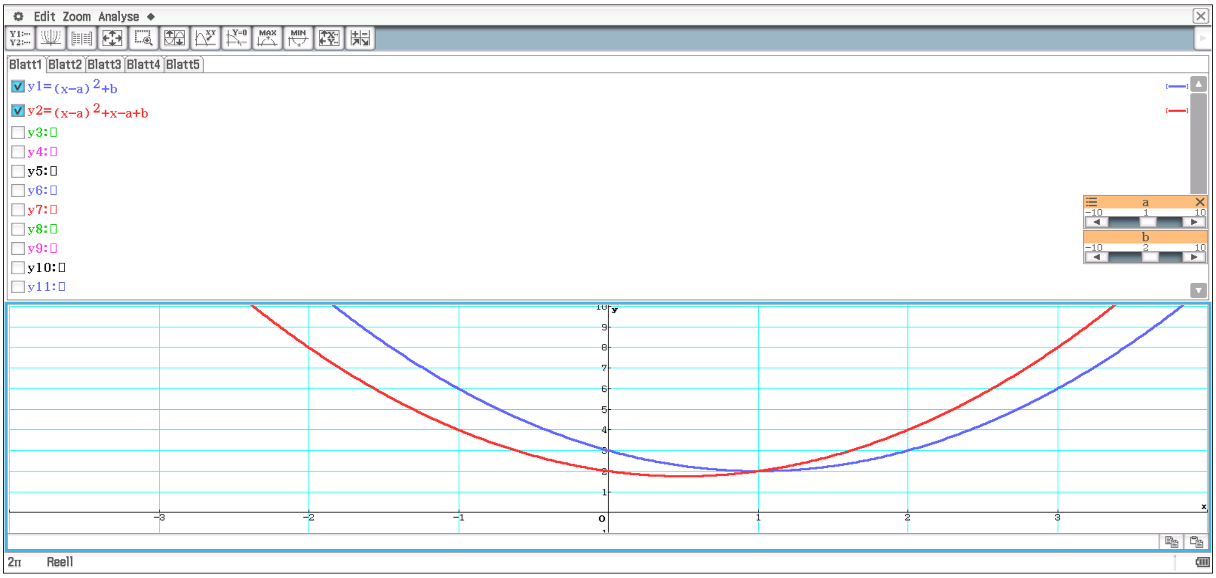


Abbildung 67: Unterscheidung der Scheitelpunktsform von der Koordinatentransformation

Des Weiteren lässt sich der Unterschied zwischen einer Koordinatentransformation und der entsprechenden Scheitelpunktsform deutlich machen. Bei der Scheitelpunktsform bezieht man sich ja immer auf den Graph der Funktion $f(x) = x^2$. Für den Unterricht sollte man die beiden Graphen der obigen Funktionen getrennt betrachten, bevor man sie zusammenführt.

Entsprechende Betrachtungen lassen sich auch unter Zuhilfenahme der Tabellenkalkulation durchführen.

13. Der Heron Algorithmus

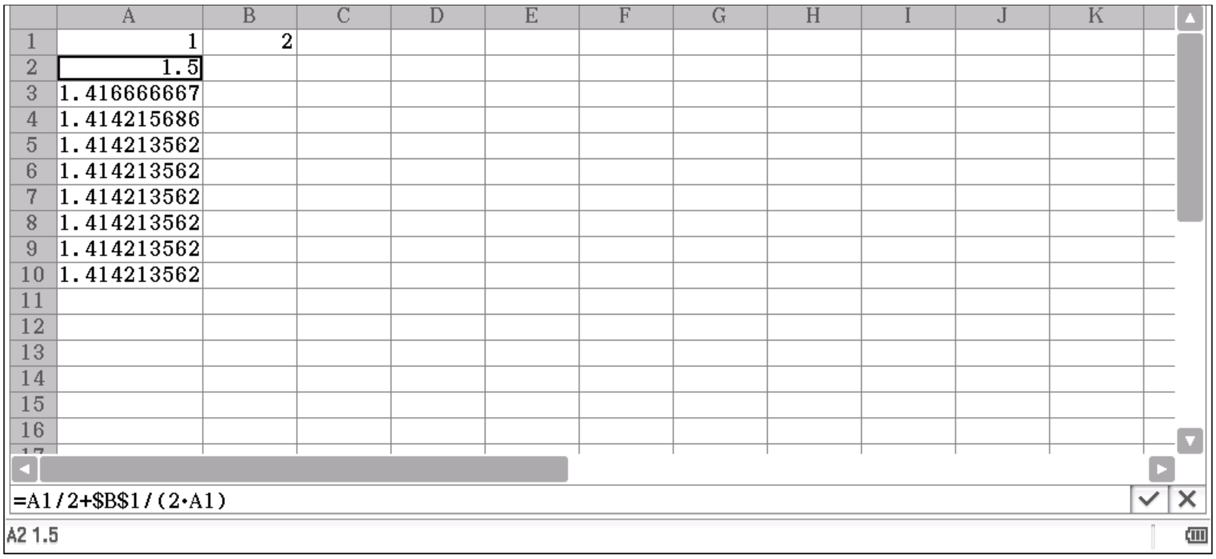


Abbildung 68: Heron Algorithmus

Die Dezimalzahlentwicklung von Quadratwurzeln lässt sich mit Hilfe des Heron Algorithmus bewerkstelligen. Dies gelingt am einfachsten mit Hilfe der Tabellenkalkulation (s. Abb. 68). Der Algorithmus ist durch die Rechenvorschrift für die Zelle A2 aus der Abbildung direkt ablesbar. Der funktionale Charakter wird wieder dadurch deutlich, dass wir uns auf die Zelle B2 (s. Abb. 68) beziehen und so die Dezimalzahlentwicklung von beliebigen Quadratwurzeln erhalten.

14. Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen lassen sich nach dem gleichen Konzept wie lineare lösen. Aus der Abbildung 69 erkennt man, dass die x-Werte der jeweiligen Schnittpunkte sich durch die Äquivalenzumformungen nicht verändern. Schülerinnen und Schüler können sich wieder auf die Art der notwendigen Umformungen konzentrieren und die erforderlichen Rechnungen dem ClassPad überlassen. Der Übersicht halber wurden zunächst nur die ersten beiden Schritte dargestellt.

Während der Umformungen (s. Abb. 71) kann es zu einer für die Schülerinnen und Schüler ungewöhnlichen Darstellung (3. Zeile in Abb. 71) kommen. Diese lässt sich mit Hilfe des Befehls *expand* in die „übliche" Darstellung umformen.

Auch hier ist auf geometrischer Ebene zu klären, warum sich die x-Werte der Schnittpunkte durch die Äquivalenzumformungen nicht verändern. Zu einem tieferen Verständnis für Terme führt hier vor allem der letzte Schritt. Wenn x_1 und x_2 die Nullstellen der quadratischen Funktion sind, dann gilt:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad \text{(x)}$$

Für konkrete Gleichungen erhält man die Zerlegung natürlich auch direkt, wenn die Nullstellen rational sind (s. Abb. 70)

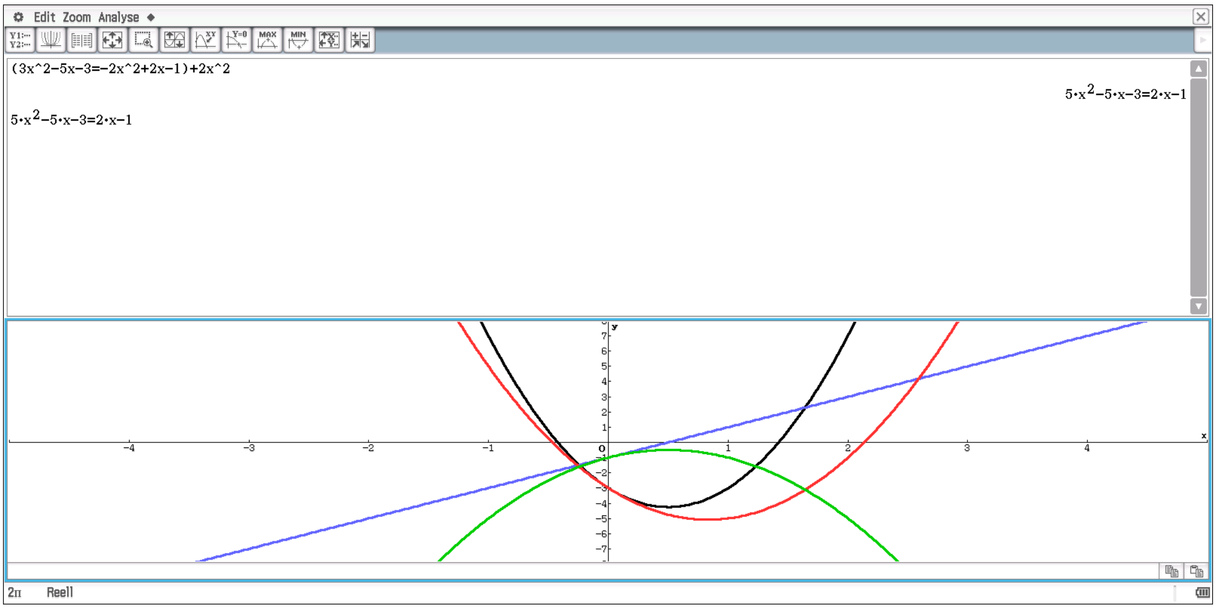


Abbildung 69: Die ersten zwei Schritte der Umformung mit den entsprechenden Grafen

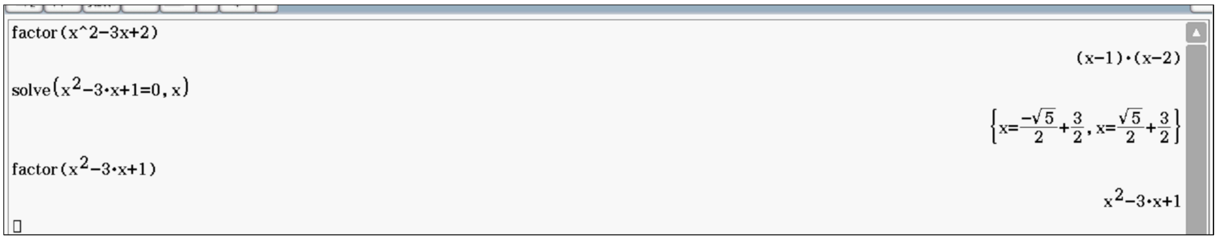


Abbildung 70: Zerlegung quadratischer Terme

Aus der obigen Gleichung (x) ist erkennbar, dass eine Multiplikation bzw. Division mit einer bzw. durch eine Konstante die Nullstellen der Funktion nicht verändert.

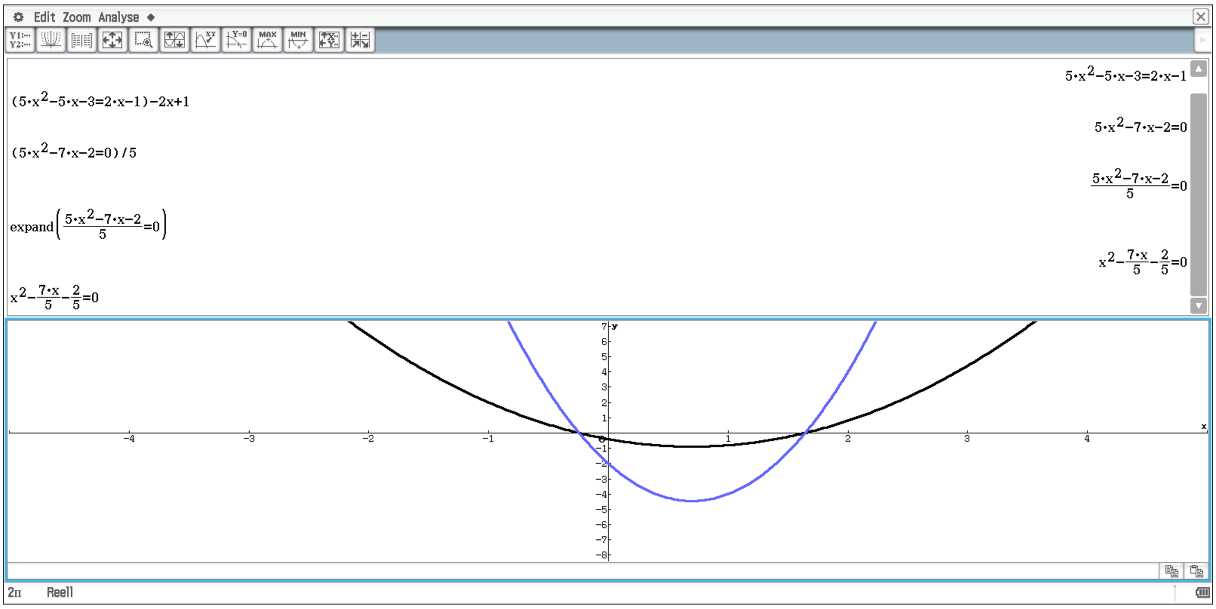


Abbildung 71: Umformungen bis zur Standardform

Für die übliche Herleitung der p-q-Formel lässt sich die quadratische Ergänzung umgehen, wenn die Schülerinnen und Schüler erkannt haben, dass der x-Wert des

Scheitelpunktes für die Normalparabel (a = 1) grundsätzlich den Wert $x_s = -\frac{b}{2}$ hat. Das heißt, jede Gleichung einer quadratischen Funktion lässt sich durch $f(x) = (x+\frac{b}{2})^2 + f(x_s)$ darstellen. Der Rest ergibt sich dann durch einfache Umformungen. Insbesondere wird durch den Term $f(x_s)$ das funktionale Verständnis gestärkt.

Quadratische Gleichungen lassen sich natürlich auch direkt mit Hilfe der *solve*-Funktion des ClassPad lösen. Schülerinnen und Schüler ohne Rechnerunterstützung lösen quadratische Gleichungen mit Hilfe der p-q- bzw. a-b-c-Formel. Auch diese Formeln findet man im CAS, wenn entsprechende Gleichungen eingegeben werden (s. Abb. 72). Das heißt, ein CAS lässt sich auch als elektronische Formelsammlung benutzen.

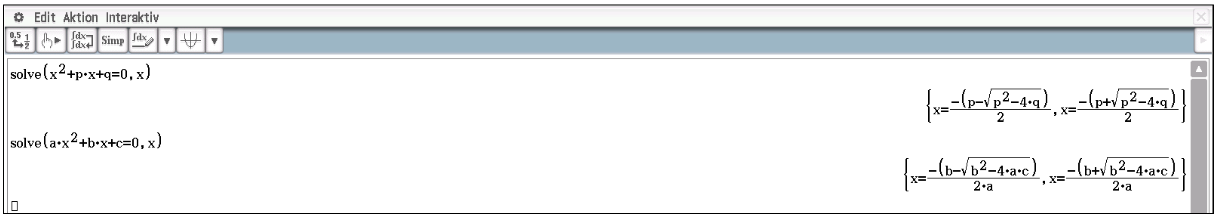


Abbildung 72: Lösungsformeln für quadratische Gleichungen

15. Die Satzgruppe des Pyhagoras

Wir beginnen mit dem Höhensatz, da er sich an die Diskussion ähnlicher Dreiecke anschließt. Mit der Hilfe durch den Katheten-Satz lässt sich dann der Satz des Pythagoras herleiten bzw. beweisen. Ein weiteres Argument für den Beweis des Satzes von Pythagoras über den Katheten-Satz ist, dass der Satz des Pythagoras in der Regel als Flächensatz bewiesen wird, in den Anwendungen dann aber kaum noch dazu verwendet wird, Flächeninhalte zu berechnen, sondern fehlende Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck. Das heißt, für den Satz des Pythagoras muss der Höhensatz nicht diskutiert werden. Wir geben ihn der Vollständigkeit halber an.

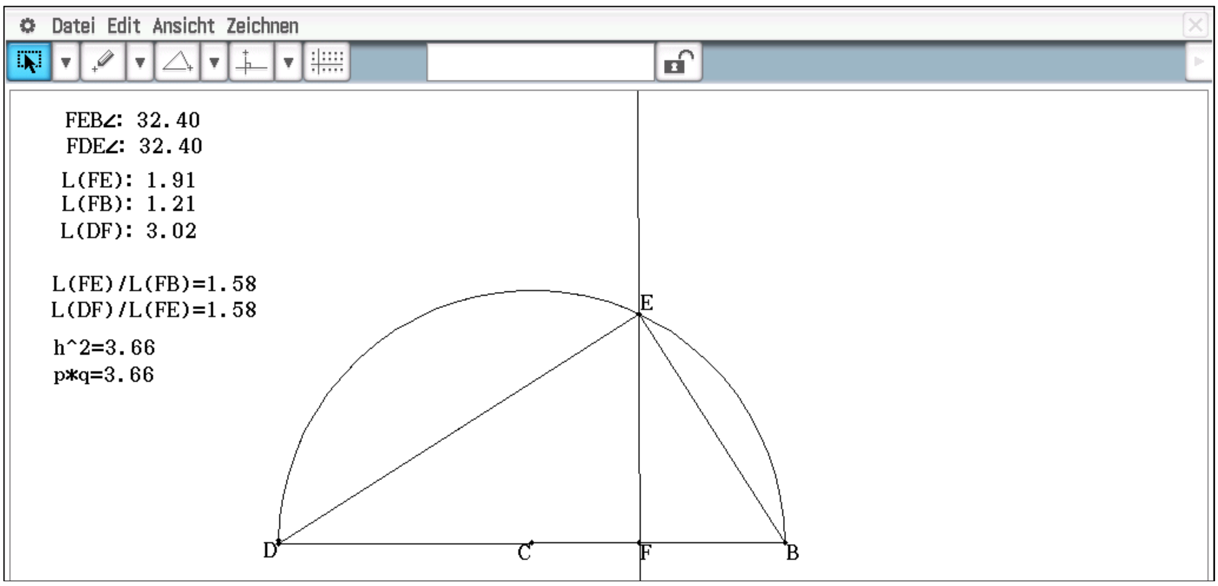


Abbildung 73: Der Höhensatz

Zunächst wurde die Strecke DE mit dem Halbkreis gezeichnet (s. Abb. 73). Der Punkt E liegt immer auf diesem Halbkreis, so dass sich bei E ein rechter Winkel ergibt. Von E wurde das Lot auf die Strecke DB gefällt, so dass der Punkt F die Hypotenuse in die beiden Abschnitte p und q teilt. Auf Grund der gleichen Winkelgrößen sind die Dreiecke FBE und DFE ähnlich; dies lässt sich natürlich begründen und wird durch die Messungen der Winkel bestätigt. Aus der Ähnlichkeit ergeben sich die identischen Seitenverhältnisse, die ebenfalls durch Messungen bestätigt werden. Durch das Beseitigen der Nenner, folgt aus der Verhältnisgleichung direkt der Höhensatz.

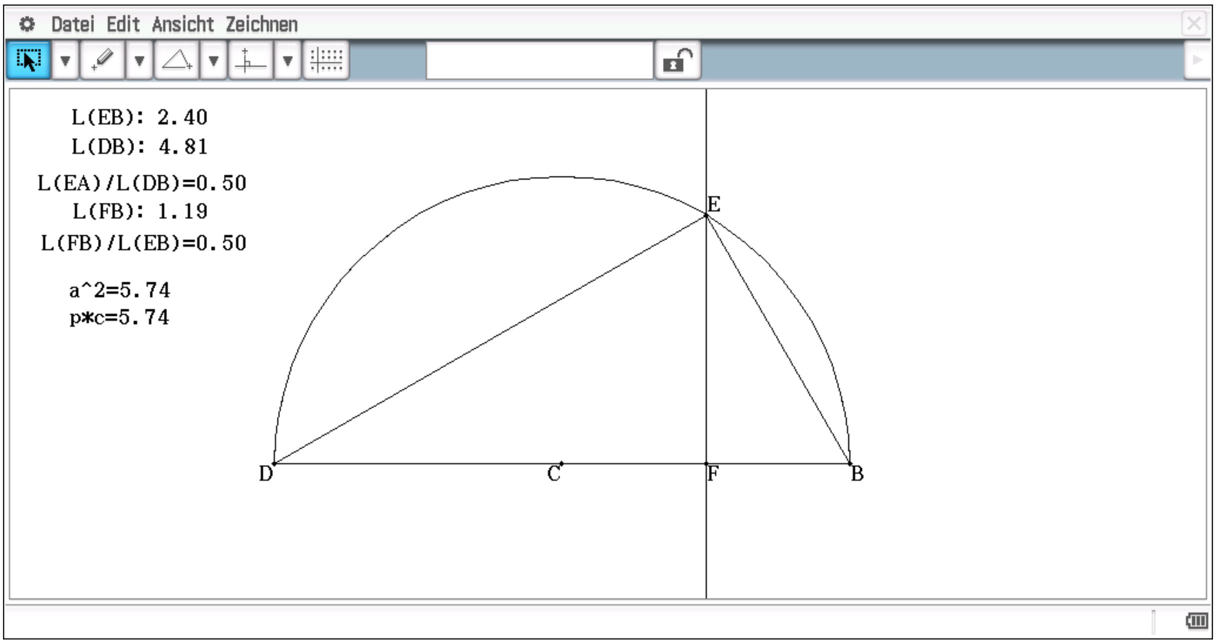


Abbildung 74: Der Kathetensatz

Im Folgenden wird der Kathetensatz hergeleitet. Die Begründung für die ähnlichen Dreiecke und die sich daraus ergebenden Seitenverhältnisse ergeben sich genauso wie oben. Die Daten wurden nur für die eine Kathete ermittelt, da sie sich für die andere entsprechend ergeben. Insbesondere zeigt sich durch diesen Zugang, dass es eine Äquivalenz zwischen Flächen- und Verhältnissätzen gibt.

Der Satz des Pythagoras folgt direkt aus dem Kathetensatz, indem man die beiden Gleichungen addiert.

$$a^2 = p \cdot c \quad und \quad b^2 = q \cdot c \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p+q) \cdot c$$

Für die Schülerinnen und Schüler könnte es jetzt eine Aufgabe sein, diesen Satz durch eine entsprechende Konstruktion mit Messungen zu bestätigen.

16. Graphen inverser Funktionen

Im Gegensatz zu der Angabe der Gleichung einer inversen Funktion ist das Zeichnen des Graphen mit einem Funktionenplotter denkbar einfach. Man wählt im Menüpunkt *Grafik und Tabelle* unter *Typ* den *Parametertyp* aus (s. Abb. 75). Den Schülerinnen und Schülern wird es so verständlich, dass das Bilden der inversen Funktion geometrisch eine Vertauschung der x- und y-Werte bedeutet. Zu beachten ist, dass die Fenstereinstellungen sich jetzt nicht nur auf die x- und y-Werte, sondern auch auf den Parameter t beziehen. Da für den Parameter t > 0 gilt, liegen die Punkte der Graphen nur im ersten Quadranten. Man kann diesen Bereich natürlich vergrößern. Dies würde zur Folge haben, dass die Graphen auch im 2. und 4. Quadranten gezeichnet werden. Mit Hilfe der Einstellung *Parametertyp* lassen sich natürlich vielfältige Kurven zeichnen und diskutieren. Da die Curricula der Länder dieses aber nicht vorsehen, verzichten wir hier auf weitere Beispiele, kommen aber im Rahmen der Diskussion weiterer inverser und der trigonometrischen Funktionen wieder auf diese Möglichkeit der Darstellung zurück.

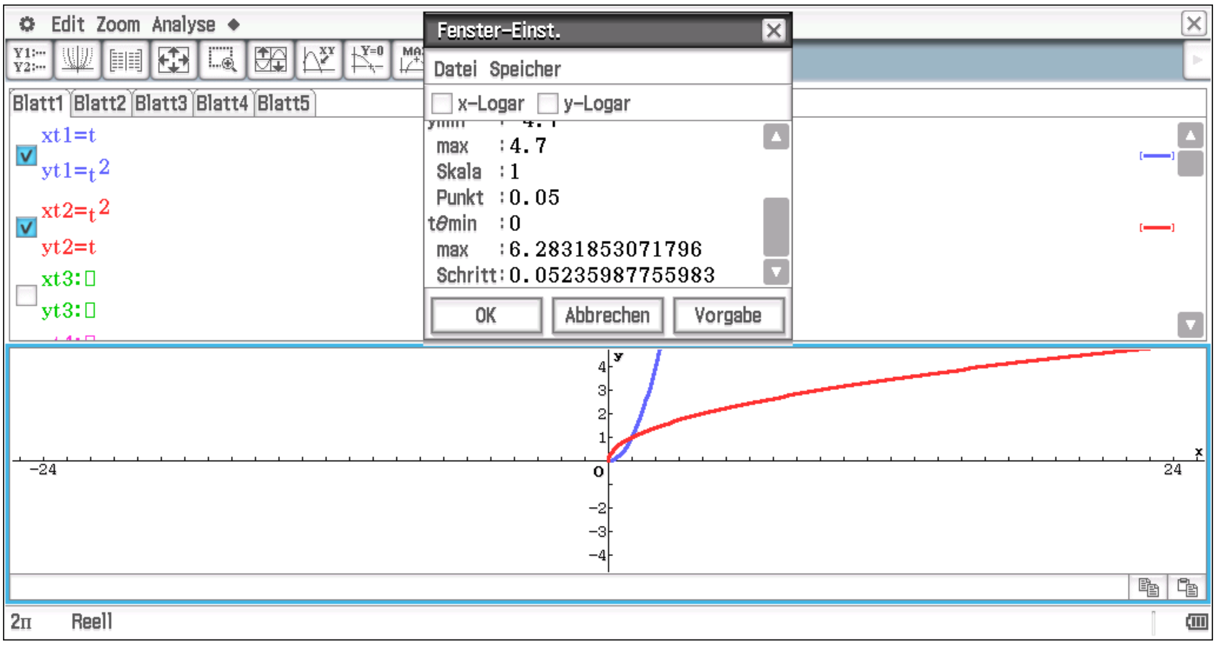


Abbildung 75: Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ *und* $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

17. Exponentielles Wachstum

Zur Einführung des exponentiellen Wachstums kann man zum Beispiel von 50 Würfeln ausgehen. Mit diesen wird gewürfelt, und die Anzahl der gewürfelten „6“ festgestellt. Waren zum Beispiel 8 x „6“ dabei, so wird die Anzahl der Würfel um diese 8 erhöht; das heißt, man würfelt das nächste Mal mit 58 Würfeln usw. . Dieser Vorgang lässt sich natürlich auch mit Hilfe eines entsprechenden Programms simulieren.

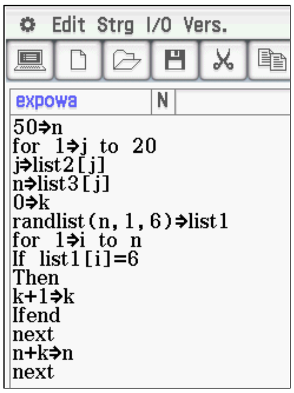
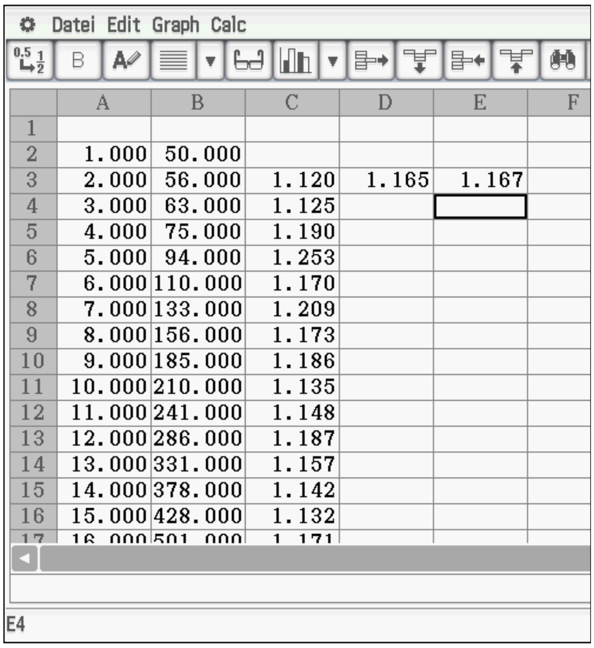


Abbildung 76: Programm für die Simulation des exponentiellen Wachstums

Die Abbildung 76 zeigt das Programm. Der Vorgang des Würfeln findet 20 mal statt (2. Zeile) Zur Weiterverarbeitung werden die Daten in Listen gespeichert (Zeile 3 u. 4) Der Vorgang des Würfelns wird durch den Befehl *randlist(n,1,6)* realisiert. Dabei steht das „n" für die Anzahl der Würfe, die „1" und die „6" geben an, dass Zufallszahlen zwischen 1 und 6 erzeugt werden. Mit Hilfe der *„if*"-Schleife wird die Anzahl der „6" festgestellt und die Zahl wird in der Variablen „k" gespeichert. Der Befehl *next* markiert das Ende der *„for*"-Schleife. Die so gewonnenen Daten stehen jetzt in den Listen *list2* und *list3*. Sie stehen im Statistik-Modul direkt zur Weiterverarbeitung bereit. Hier ist es aber von Vorteil für die Weiterverarbeitung die Tabellenkalkulation zu benutzen. Über die Importfunktion im Untermenü *Datei* lassen sich die Daten direkt in die Tabellenkalkulation übertragen.



	A	B	C	D	E	F
1						
2	1.000	50.000				
3	2.000	56.000	1.120	1.165	1.167	
4	3.000	63.000	1.125			
5	4.000	75.000	1.190			
6	5.000	94.000	1.253			
7	6.000	110.000	1.170			
8	7.000	133.000	1.209			
9	8.000	156.000	1.173			
10	9.000	185.000	1.186			
11	10.000	210.000	1.135			
12	11.000	241.000	1.148			
13	12.000	286.000	1.187			
14	13.000	331.000	1.157			
15	14.000	378.000	1.142			
16	15.000	428.000	1.132			
17	16.000	501.000	1.171			

Abbildung 77: Ergebnisse des Würfelns

In der Spalte C sind die Quotienten zweier aufeinander folgender Anzahlen berechnet (s. Abb. 76). Man erkennt, dass diese näherungsweise konstant sind und sich in etwa der Wert 7/6 ergibt, was ja auch nicht anders zu erwarten war. Der durchschnittliche Quotient steht in D3 und die Näherung von 7/6 in E3.

Wenn man diese Simulation mit einem Handheld durchführt, werden ca. 25 Minuten benötigt. Die Computerversion schafft dies in 2-3 Minuten.

Durch eine kleine Abänderung im Programm lässt sich natürlich auch der exponentielle Zerfall simulieren. Dafür ist die Ausgangszahl zu erhöhen und in der vorletzten Zeile das „+“ durch ein „-„ zu ersetzen.

17.1 Beschränktes Wachstum

Das „Beschränkte Wachstum“ ist zwar genauso wie das „Logistische Wachstum“ in der Regel nicht mehr Bestandteil des Curriculums. Wir halten die Diskussion der beiden Wachstumsarten trotzdem über diesen Zugang für sehr sinnvoll, da so die Abgrenzungen und Unterschiede deutlich werden. Des Weiteren sind diese beiden Wachstumsarten in Bezug auf Realitätsbezüge bedeutsam.

Für das beschränkte Wachstum gibt es eine Grenze, wie der Name schon sagt. Der jeweilige Zuwachs ist dann proportional zur Differenz zwischen dieser Grenze und der gegenwärtigen Anzahl. Für die Simulation setzen wir als willkürliche Grenze 500 und beginnen mit 50. Wir führen die Simulation wieder 20 mal durch. Die Abbildung 77 zeigt das entsprechend veränderte Programm. Man erkennt, dass nur „n“ durch „500-n“ ersetzt worden ist. Die Ausführung des Programms ist natürlich ähnlich zeitaufwendig wie für das exponentielle Wachstum. Die Abbildung 78 zeigt den für das beschränkte Wachstum typischen Graphen.

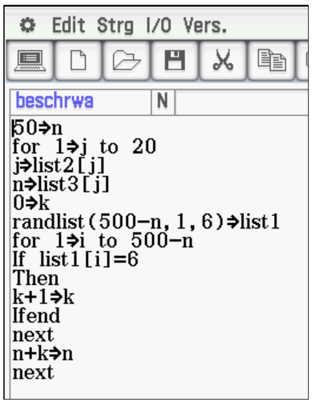


Abbildung 78: Simulation für das beschränkte Wachstum

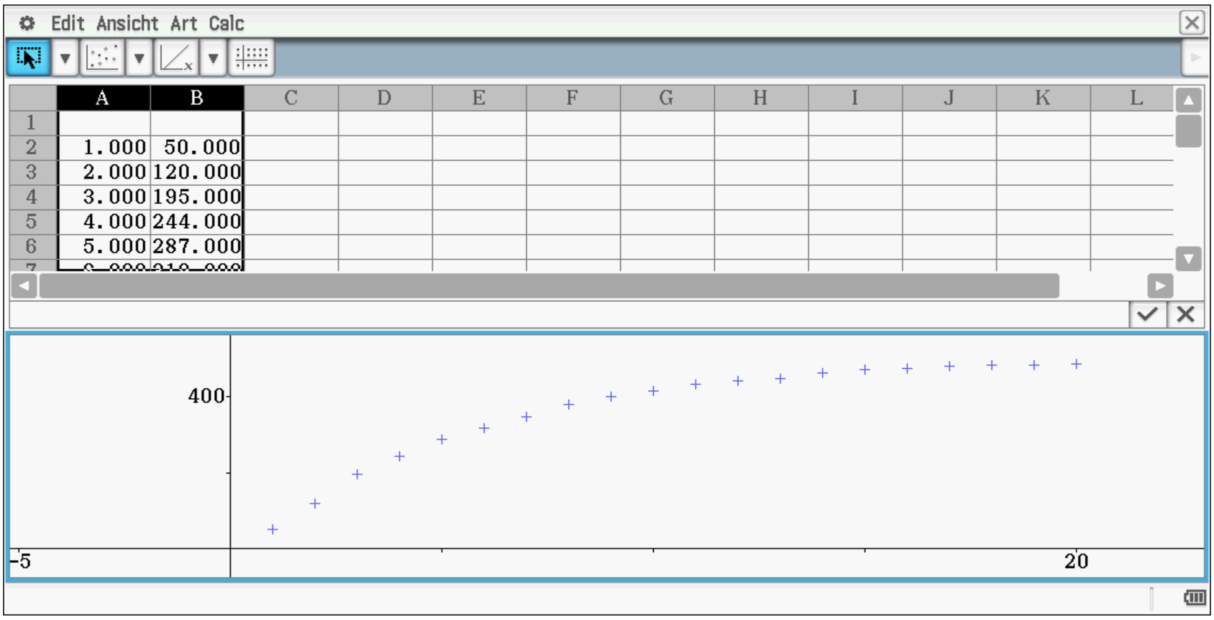


Abbildung 79: Veranschaulichung der Daten des beschränkten Wachstums

17.2 Das logistische Wachstum

Hier sind die Verhältnisse komplizierter, was daran liegt, dass der Zuwachs sowohl zum Bestand, als auch zur Differenz zwischen Bestand und Beschränkung proportional ist. Es ist leicht nachzuvollziehen, dass man nicht einfach die Werte des exponentiellen und beschränkten Wachstums addieren kann. Das Programm (s. Abb. 80) berechnet beide Werte und bildet danach das geometrische Mittel.

```
50⇒n
for 1⇒m to 20
m⇒list3[m]
n⇒list4[m]
0⇒k
0⇒j
randlist(n,1,6)⇒list1
for 1⇒i to n
If list1[i]=6
Then
j+1⇒j
Ifend
```

```
next
randlist(500−n,1,6)⇒list2
for 1⇒i to 500−n
If list2[i]=6
Then
k+1⇒k
Ifend
next
n+int(√(k*j))⇒n
if n>499
then
499⇒n
ifend: next
```

Abbildung 80: Programm für das logistische Wachstum

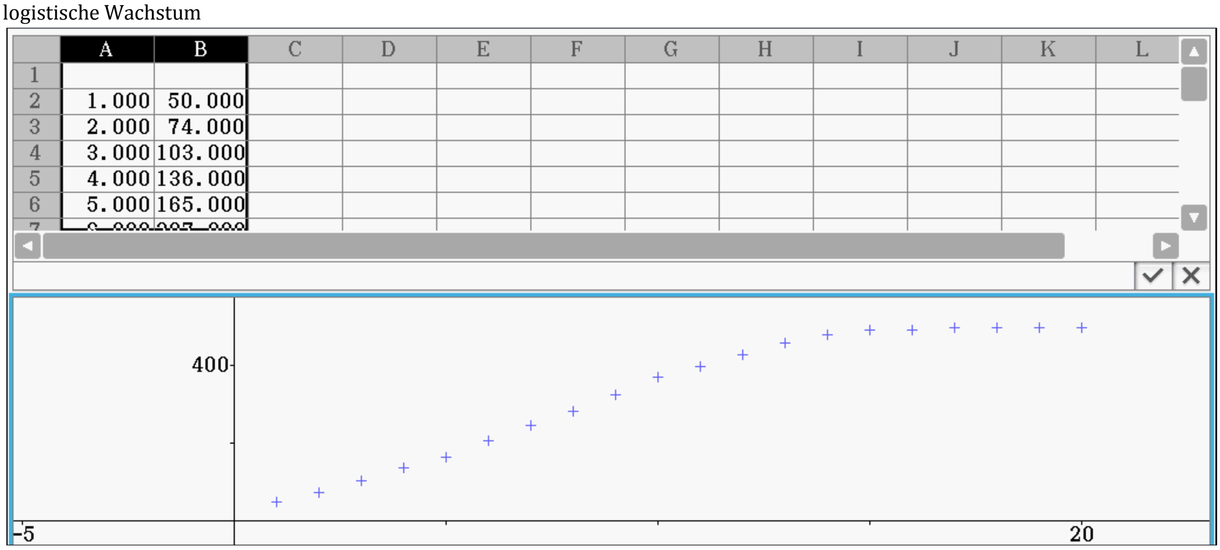


Abbildung 81: Grafische Darstellung der Ergebnisse einer Simulation für das logistische Wachstum

Die Begrenzung „*n>499*“ (vorletzte Zeile links) musste eingeführt werden, da man ansonsten mit dem Befehl *randlist(500-n,1,6)* Probleme bekommt. Die Ergebnisse sind in der Abbildung 81 dargestellt.

18. Trigonometrische Funktionen

Zur Einführung der trigonometrischen Funktionen sollten Schülerinnen und Schüler erkennen, dass in rechtwinkligen Dreiecken, die Seitenverhältnisse nur von einem weiteren gegebenen Winkel abhängen. Dies schließt somit unmittelbar an die Einheit über ähnliche Dreiecke an. Dazu wird zunächst gezeigt, dass bei einem weiteren festen Winkel die Seitverhältnisse konstant bleiben (s. Abb. 82). Dazu wird der Punkt D (s. Abb. 82) auf einer Strecke fixiert und mittels einer Animation des Punktes D auf dieser Strecke werden ähnliche rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Seitenverhältnissen erzeugt (s. Abb. 82)

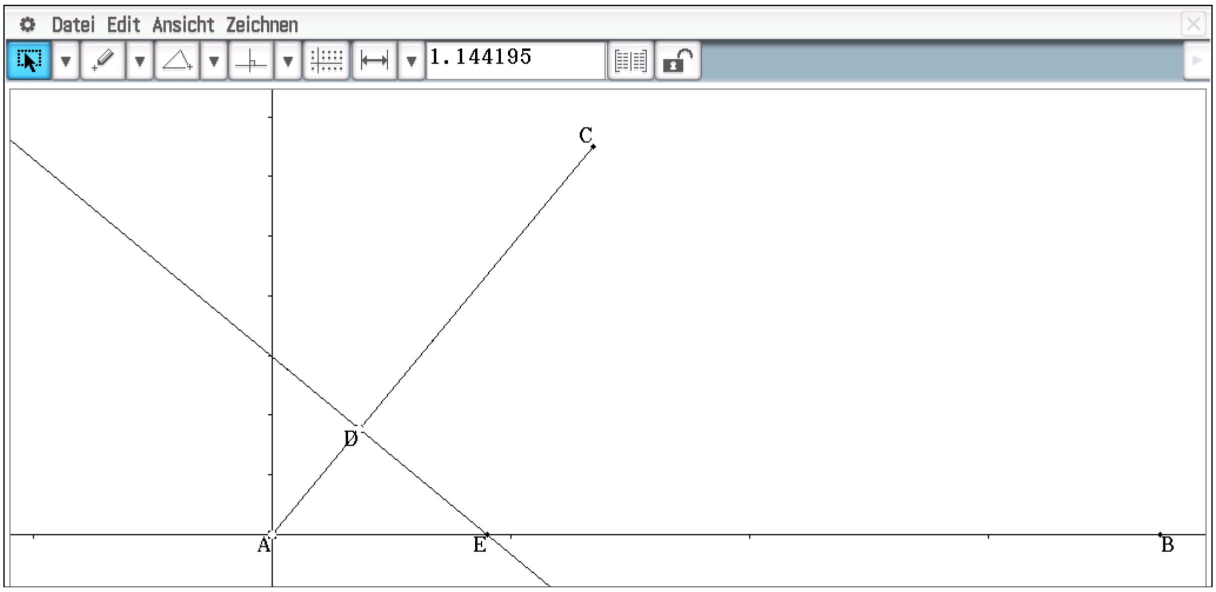
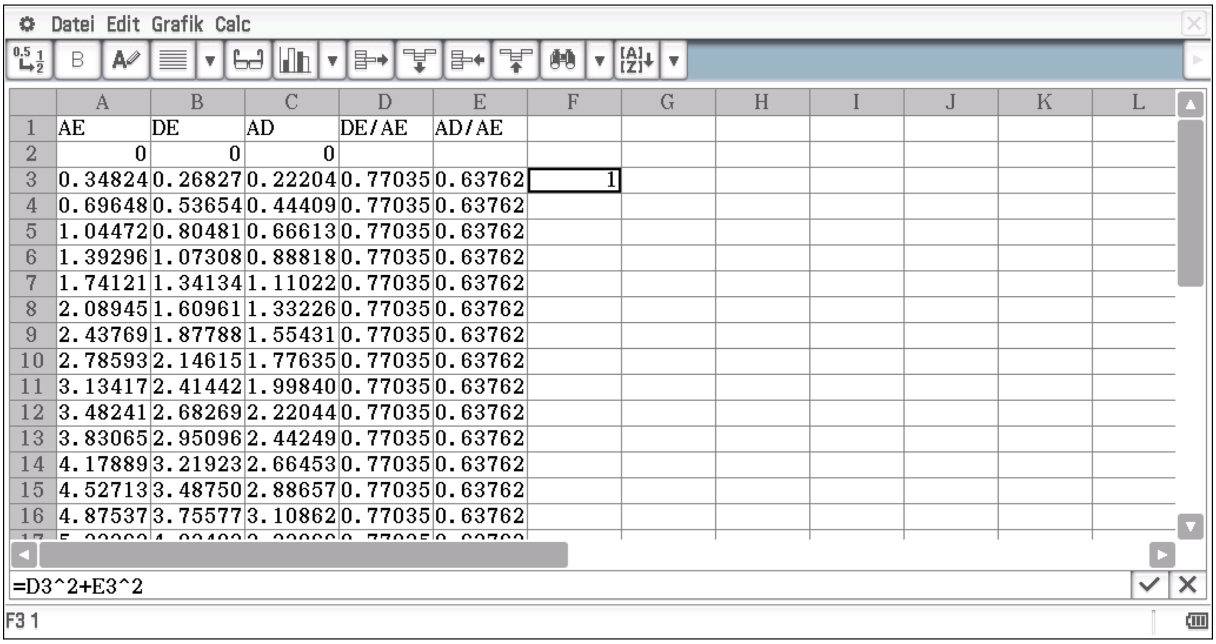


Abbildung 82: Ähnliche Dreiecke mit rechtem Winkel



	A	B	C	D	E	F
1	AE	DE	AD	DE/AE	AD/AE	
2	0	0	0			
3	0.34824	0.26827	0.22204	0.77035	0.63762	1
4	0.69648	0.53654	0.44409	0.77035	0.63762	
5	1.04472	0.80481	0.66613	0.77035	0.63762	
6	1.39296	1.07308	0.88818	0.77035	0.63762	
7	1.74121	1.34134	1.11022	0.77035	0.63762	
8	2.08945	1.60961	1.33226	0.77035	0.63762	
9	2.43769	1.87788	1.55431	0.77035	0.63762	
10	2.78593	2.14615	1.77635	0.77035	0.63762	
11	3.13417	2.41442	1.99840	0.77035	0.63762	
12	3.48241	2.68269	2.22044	0.77035	0.63762	
13	3.83065	2.95096	2.44249	0.77035	0.63762	
14	4.17889	3.21923	2.66453	0.77035	0.63762	
15	4.52713	3.48750	2.88657	0.77035	0.63762	
16	4.87537	3.75577	3.10862	0.77035	0.63762	

Abbildung 83: Auswertung der Animation für sin und cos

Die sich aus der Animation ergebenden Seitenverhältnisse können über die Tabellenfunktion im Messfenster in die Tabellenkalkulation übertragen werden. In der Spalte D stehen die sin- und in Spalte E die cos- Werte des Winkels am Eckpunkt A. Als Ergänzung wurde noch das Quadrat der beiden Werte gebildet und diese summiert (s. Abb. 83: Zelle F3)

Daraus wird verständlich, dass das Verhältnis der entsprechenden Seiten ein Maß für den entsprechenden Winkel ist. Das heißt, die Winkelfunktionen sin, cos und tan lassen sich für Winkel zwischen 0° und 90° definieren.

Werte für die trigonometrischen Funktionen erhält man durch Animationen, indem man den Winkel variiert. Man legt dazu den Eckpunkt mit dem rechten Winkel auf einen Halbkreis, lässt diesen durch eine Animation auf diesem wandern und misst die erforderlichen Seitenverhältnisse.

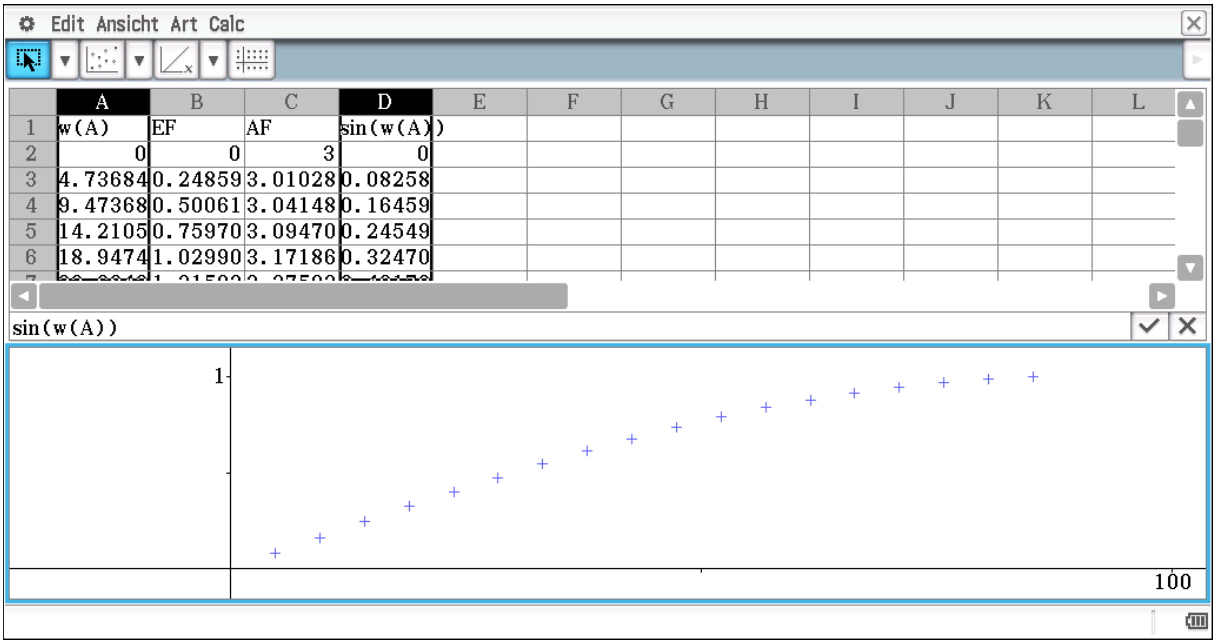


Abbildung 84: Berechnung von sin-Werten und ihre grafische Darstellung

Die Werte werden dann wieder in die Tabellenkalkulation hinein übertragen, so dass die entsprechenden Verhältnisse berechnet werden können (s. Abb. 84). Durch Markierung der Spalte mit den Winkeln und mit den sin-Werten lassen sich die Funktionswerte grafisch darstellen. Für das richtige Verhältnis der beiden Achsen sind die Winkelgrößen noch in Bogenmaß umzurechnen. Da aber die Module der Tabellenkalkulation den Maßstab automatisch anpassen, ist auch dies keine wirkliche Lösung.

Eine bessere grafische Darstellung erhält man, wenn man die Werte mit Hilfe der *Export*-Funktion der Tabellenkalkulation in das Statistik-Modul überträgt. Es lässt sich dann sogar eine sin-Regression durchführen. Auch hier sind die Einheiten auf den Achsen unterschiedlich lang; aber zumindest die Werte sind exakt ablesbar (s. Abb. 85).

Für eine Erweiterung des Definitionsbereiches erweitert man den Viertel-Kreis zu einem Vollkreis. Des Weiteren wählt man einen Einheitskreis. Eine direkte Darstellung der Funktionswerte ist nicht einfach möglich, da es keine Zugriffsmöglichkeit wie zum Beispiel bei Geogebra auf x- bzw. y-Werte von Punkten gibt. Dies lässt sich mit einem Programm bewerkstelligen; der Aufwand erscheint aber in diesem Zusammenhang zu groß. Der Zusammenhang zum Graphen lässt sich trotzdem verdeutlichen, wenn man den Graphen direkt zeichnen lässt (s. Abb. 86). Wenn die Animation mehrfach abläuft, wandert der Punkt E immer weiter in den negativen Bereich. Warum dies geschieht ist unklar.

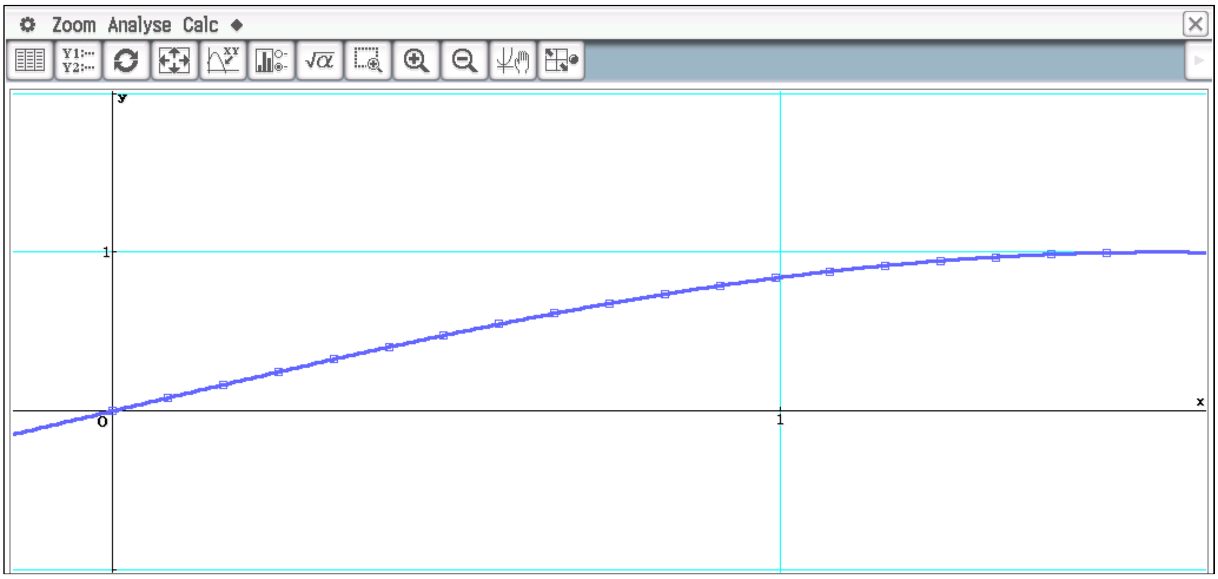


Abbildung 85: sin-Werte im Statistik-Modul und sin-Regression

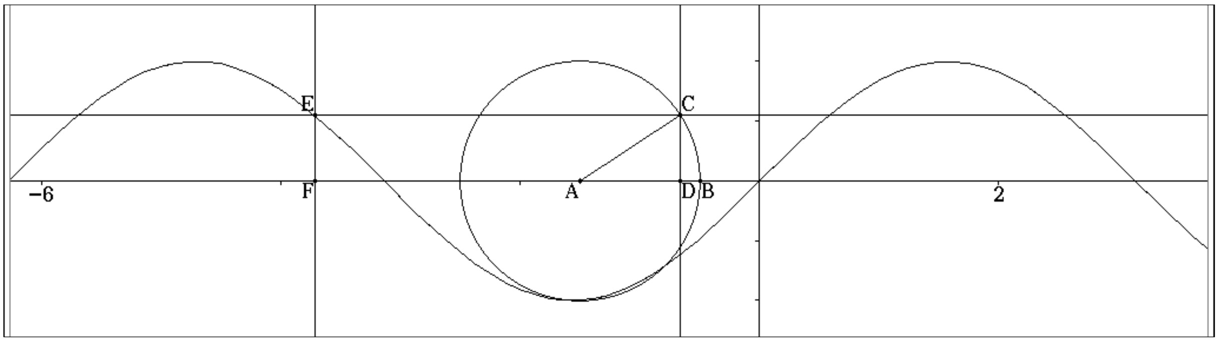


Abbildung 86: Grafische Darstellung der sin-Funktion

Eine weitere Möglichkeit der Darstellung des Grafen zumindest der ersten Halbperiode der sin-Funktion zeigt die Abbildung 87. Im Grafik-Modus ist die Winkelangabe auf Bogenmaß einzustellen. Die Animation richtet man genau wie oben ein. Über die Tabellenfunktion hat man Zugriff auf die Winkelgröße und den Abstand des Punktes C von der x-Achse. Beide Tabellen werden markiert und in das Zeichenfeld gezogen.

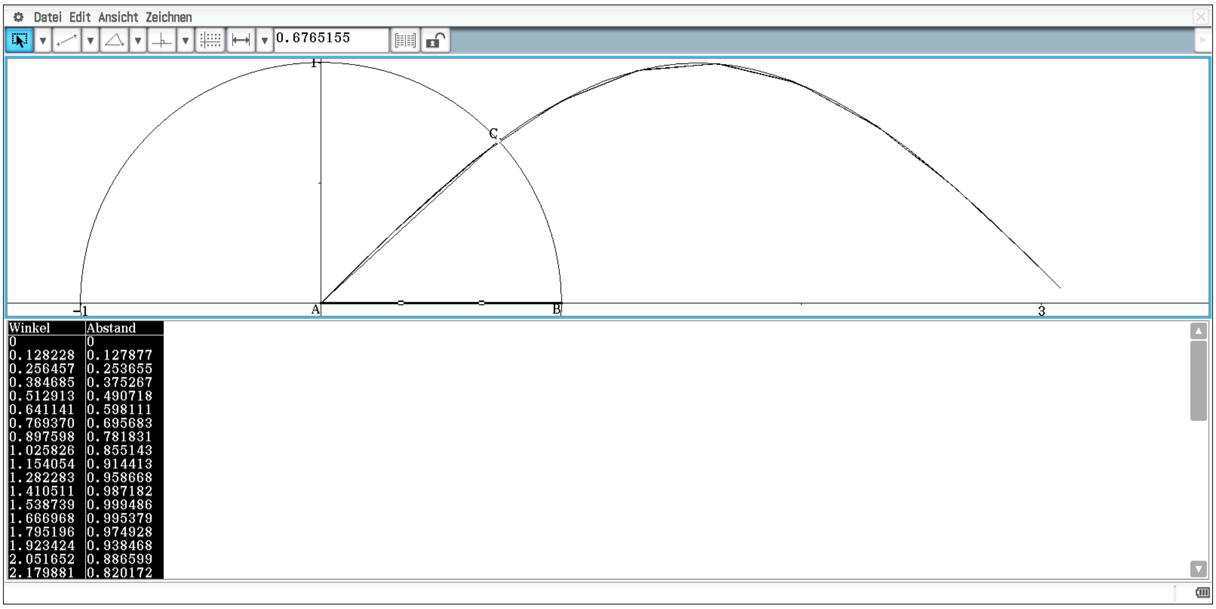


Abbildung 87: Graf der ersten Halbperiode der sin-Funktion

Die volle Periode ist nicht darstellbar, da Winkel nur zwischen 0 und π und Streckenlängen nur positiv angegeben werden.

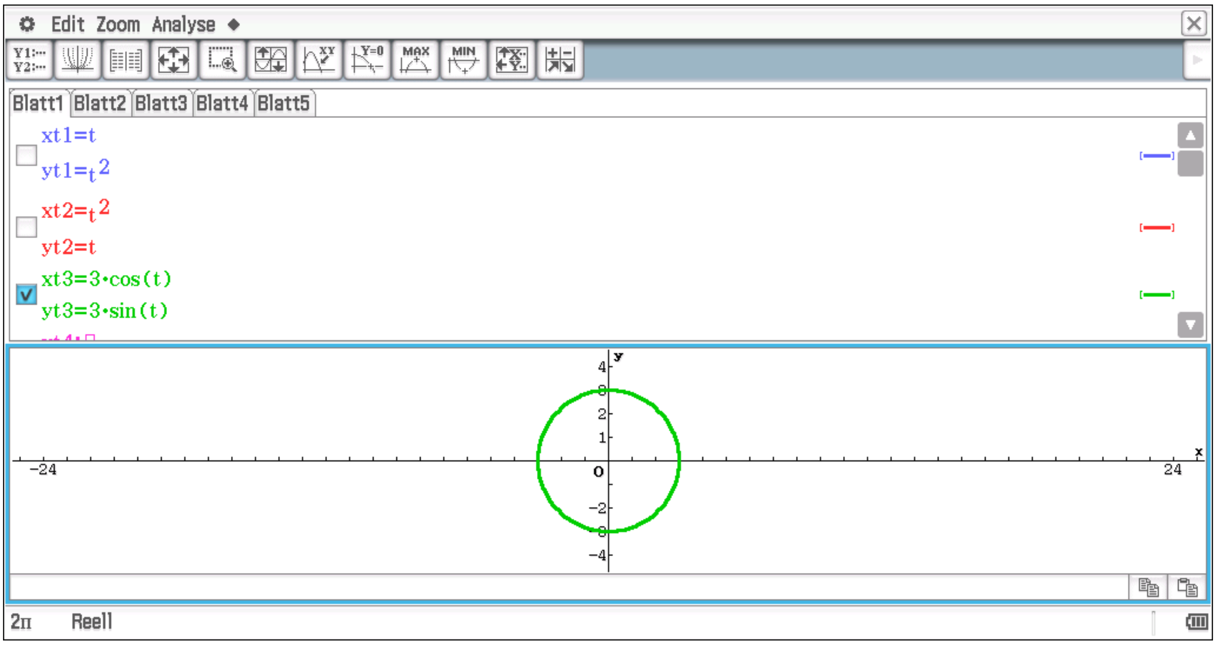


Abbildung 88: Zusammenhang zwischen Kreis und trigonometrischen Figuren

Der in Abbildung 83 dargestellte Zusammenhang zwischen sin- und cos-Funktion kann dahingehend erweitert werden, dass man Polarkoordinaten wählt und $x = \cos(t)$ *und* $y = \sin(t)$ wählt. (s. Abb. 88)

Die vollständigen Graphen der trigonometrischen Funktionen können natürlich direkt dargestellt werden. Dies lässt sich natürlich mit dem Schieberegler in der allgemeinen Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x - c)$ machen (s. Abb. 89). Schülerinnen und Schüler haben dann wieder die Möglichkeit, selbst Erkundigungen über die Bedeutung der 3 Variablen anzustellen. Insbesondere können sie den Zusammenhang zwischen der sin- und cos-Funktion herausfinden, indem sie die Variable c entsprechend wählen. Dazu muss aber noch der Faktor π bzw. π/2 eingefügt werden, da mit dem Schieberegler nur ganzzahlige Werte dargestellt werden können (s. Abb. 90). Es ist daran zu denken, dass der Rechner auf Bogenmaß eingestellt ist.

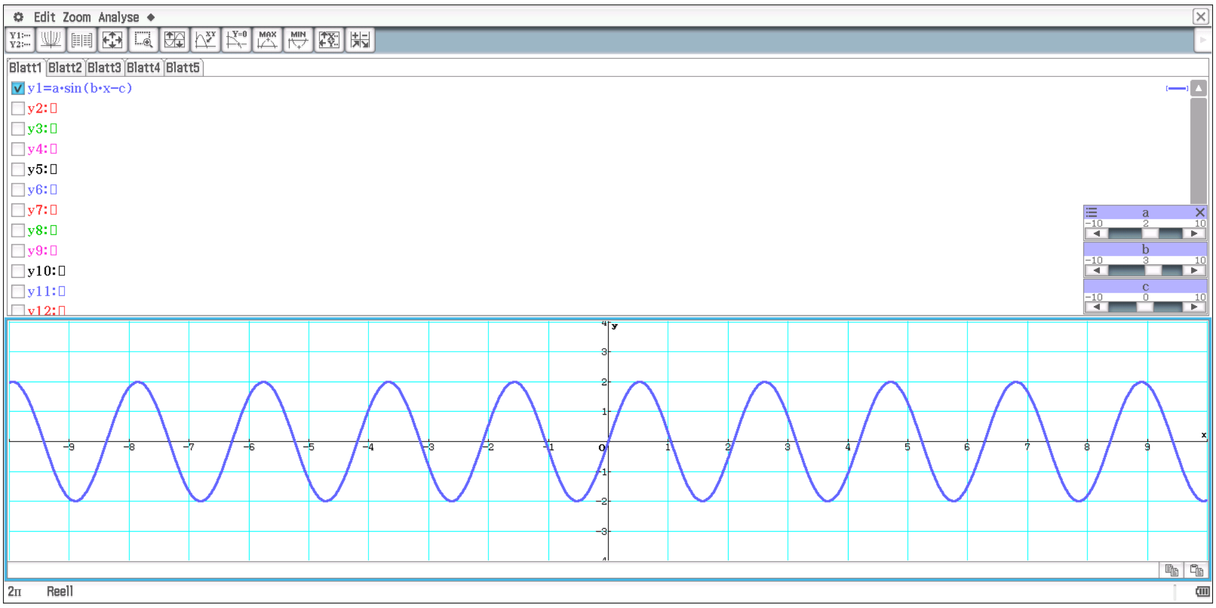


Abbildung 89: Darstellung der Funktionen f(x)=a·sin (b·x-c)

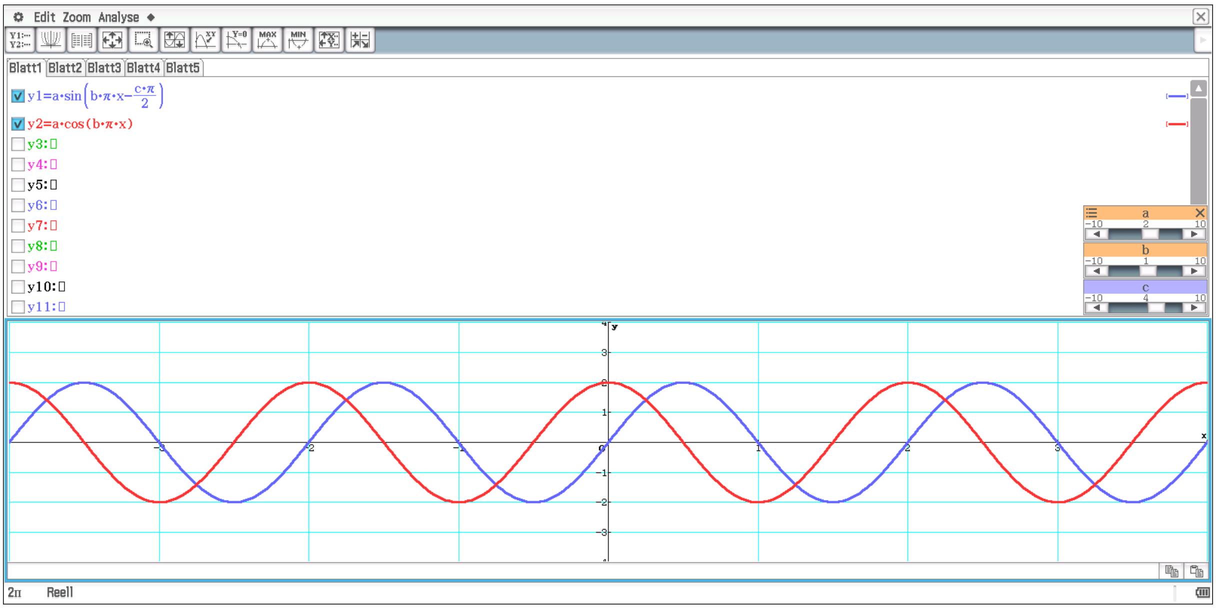


Abbildung 90: Der Zusammenhang zwischen sin- und cos-Funktion

In Abbildung 90 sind die beiden Funktionen

$f(x) = a \cdot \sin\left(b \cdot \pi \cdot x - \frac{c \cdot \pi}{2}\right)$ *und* $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot \pi \cdot x)$ dargestellt. Für c = 3 erhält man eine Übereinstimmung der beiden Graphen.

19. Logarithmisches Rechnen

Durch die Entwicklung der neuen Medien hat das logarithmische Rechnen an Bedeutung verloren. Selbst Exponentialgleichungen können mit Hilfe der *solve*-Funktion per Knopfdruck gelöst werden. Das heißt natürlich nicht, dass der händische Lösungsweg im Unterricht nicht mehr zu behandeln ist. Die Erfahrungen zeigen aber, dass Schülerinnen und Schüler diesen händischen Weg in Klausuren kaum anwenden, sondern oftmals entsprechende Probleme durch Probieren lösen. Für die Datenanalyse ist das logarithmische Rechnen aber oftmals hilfreich. Wir zeigen das an folgendem Beispiel (s. Abb. 91). In der Spalte A sind die Zahlen von 1 bis 10 und in B die dazu gehörenden Quadratzahlen aufgeführt. Wenn die Logarithmen gebildet werden (Spalten C und D) führt das zu einer Linearisierung, wie es durch die grafische Darstellung der Werte bzw. durch die konstanten Quotienten in Spalte E gezeigt ist. Entsprechendes lässt sich natürlich für beliebige Quotienten durchführen, wobei dies vor allem für gebrochene nötig ist, da man ansonsten kaum eine Möglichkeit hat, für experimentell gewonnene Daten, den Exponenten zu ermitteln.

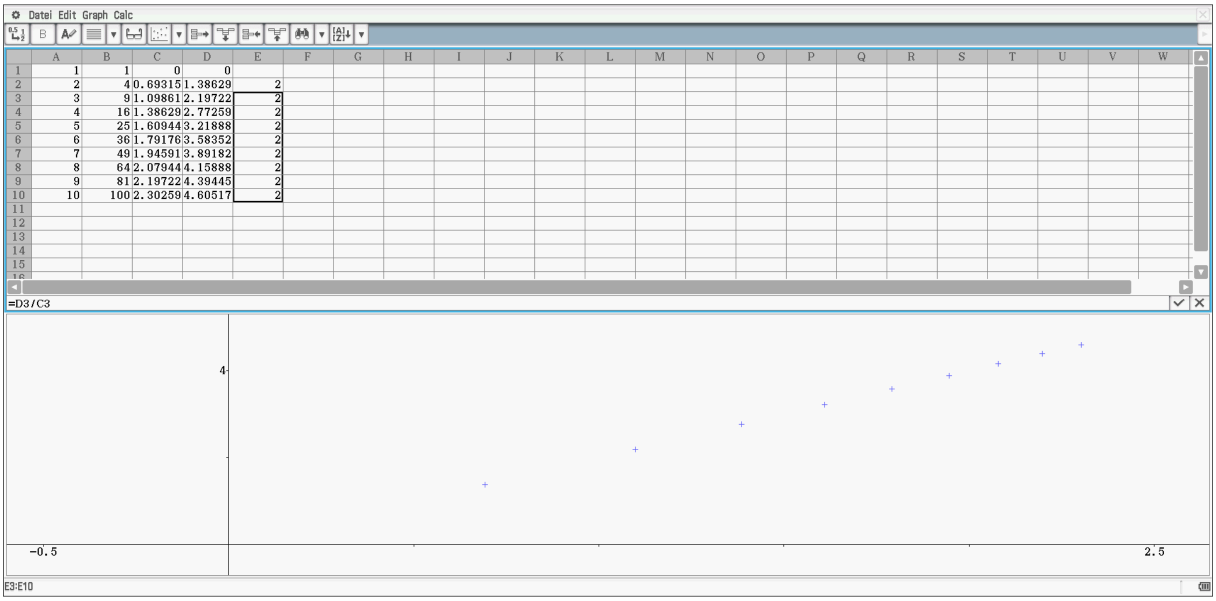


Abbildung 91: Linearisierung der quadratischen Abhängigkeit durch Logarithmisierung

Es ist auch möglich, wenn man im Modul *Grafik und Tabelle* die Einstellung *Parametertyp* wählt, die „logarithmierten" Graphen direkt zu veranschaulichen (s. Abb. 91). Die Schwierigkeit für Schülerinnen und Schüler besteht jetzt darin, die verketteten Funktionen zu verstehen. Des Weiteren ist zu beachten, dass eine Einstellung für die Variable t zu erfolgen hat. Da der *Parametertyp* in der Regel für trigonometrische Funktionen vorgesehen ist, gilt für die Voreinstellung: $0 \leq t \leq 2\pi$

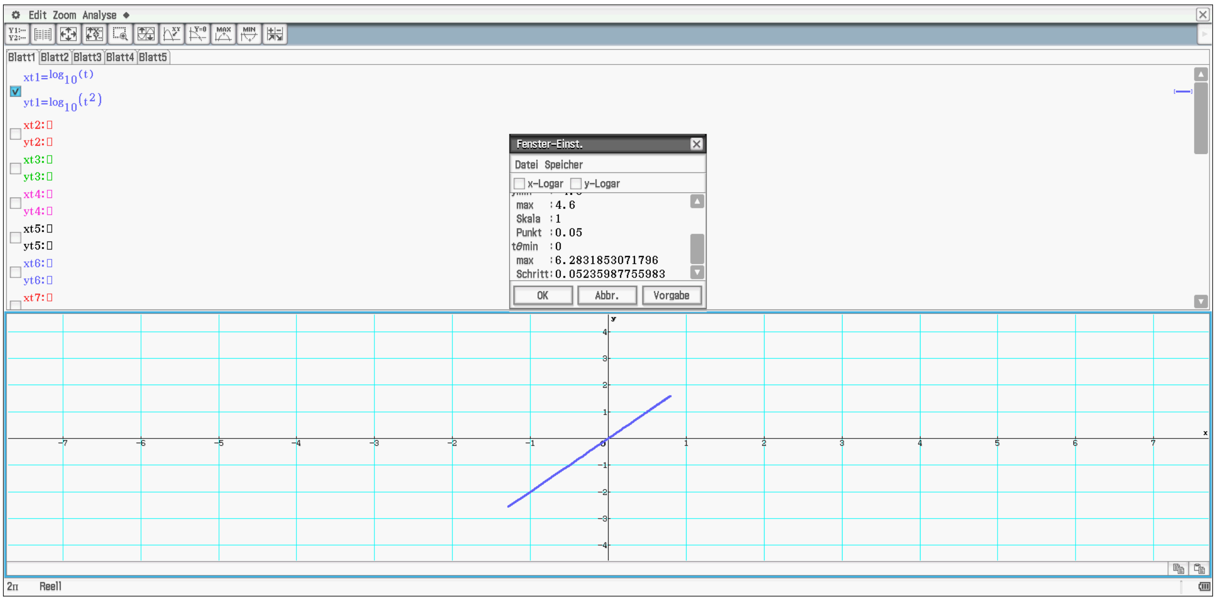
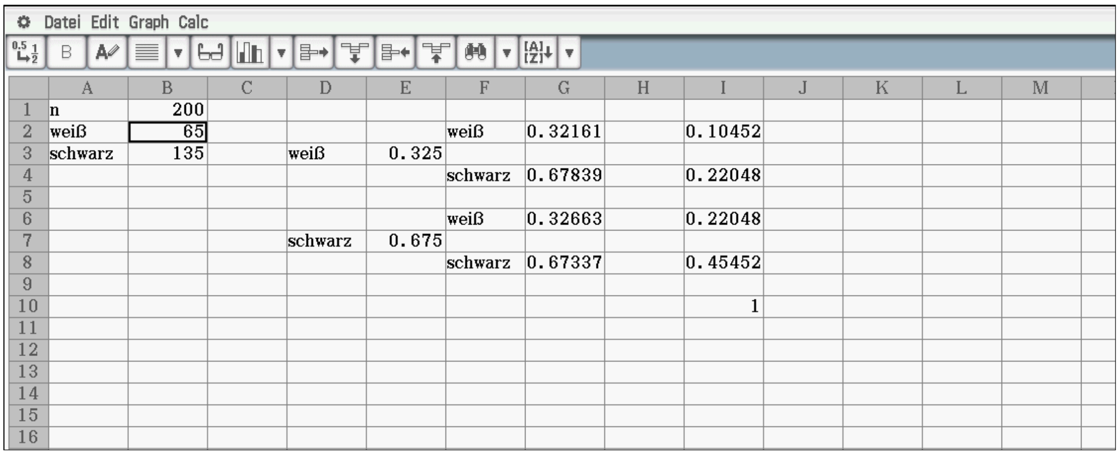


Abbildung 92: Linearisierung der quadratischen Abhängigkeit durch Logarithmisierung

20. Wahrscheinlichkeitsberechnung

Wie im Vorwort erwähnt, findet man viele Beispiele zur Simulation in „Ludwicki, Weitendorf". Die Abbildung 93 zeigt einen mit Hilfe der Tabellenkalkulation generierten Baum. Es geht um das zweimalige Ziehen aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln. Die entsprechenden Anzahlen findet man in Spalte B. Vorgegeben sind die gesamte Anzahl und die Anzahl der weißen Kugeln. Das heißt, der gesamte Baum ist abhängig von diesen beiden Werten, so dass auch hier der funktionale Zusammenhang diskutiert werden kann.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	n	200											
2	weiß	65				weiß	0.32161		0.10452				
3	schwarz	135		weiß	0.325								
4						schwarz	0.67839		0.22048				
5													
6						weiß	0.32663		0.22048				
7				schwarz	0.675								
8						schwarz	0.67337		0.45452				
9													
10									1				
11													
12													
13													
14													
15													
16													

Abbildung 93: Wahrscheinlichkeitsbaum

Arbeitsblatt 1: Proportionale Zuordnungen

Wir benutzen dazu die Tabellenkalkulation. Du kommst in diesen Bereich, indem du im Hauptmenü 

wählst. Das Arbeitsfeld besteht aus Spalten (A, B, C usw.) und Zeilen (1, 2, 3 usw.). Eine Zelle ist gekennzeichnet durch die Angabe einer Spalte und einer Zeile (z.B. C2).

Du kennst schon proportionale Zuordnungen aus der Grundschule. Das 1x1 bietet verschiedene proportionale Zuordnungen. Als Beispiel wählen wir das 1x7. Dazu benötigst du zunächst die Zahlen 1, 2, 3, …, 10. Diese könntest du nach und nach in die Spalte A eingeben. Einfacher geht es, wenn wir die Eigenschaften der Tabellenkalkulation nutzen. Dazu gibst du in A1 die „1“ ein. In die Zelle A2 geben wir „=A1+1“ ein. Wenn du dies getan und Exe gedrückt hast, erscheint die „2“. Danach markieren wir die Zelle A2 mit dem Stift und wählen *Edit* –> *Kopieren*. Danach markieren wir die Zellen A3 bis A10 und wählen *Edit* -> *Einfügen*.

In die Zelle D1 schreiben wir die „7“ für das 1x7. Zur Erzeugung des 1x7 müssen die Zahlen aus der Spalte A mit der Zahl aus der Zelle D1 multipliziert werden. Man könnte das auch direkt machen; wir haben aber so den Vorteil, dass wir jedes beliebige 1x1 erzeugen können, indem wir einfach die Zahl in der Zelle D1 verändern.

Bei der Erzeugung der Spalte A wurde immer auf den Vorgänger zugegriffen. Jetzt wollen wir uns aber immer auf D1 beziehen. Das erreichen wir dadurch, dass wir in die Zelle B1 „=A1*D1“ eingeben und danach genauso wie oben mit *Kopieren* und *Einfügen* die Spalte füllen.

Die Ergebnisse lassen sich grafisch darstellen. Dazu müssen die beiden Spalten A und B markiert werden und für die Grafik  muss  gewählt werden.

Aufgaben:

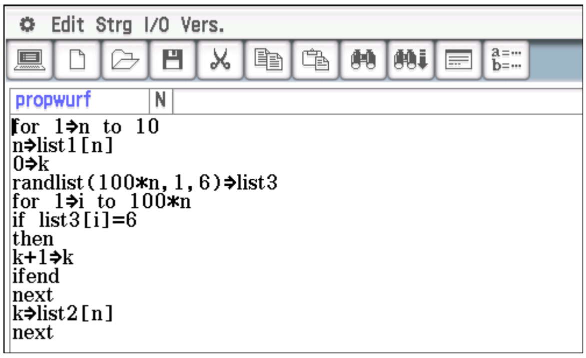
1) Beschreibe die Lage der Punkte
2) Probiere andere Zahlen als die „7“ aus. Gib an, wie sich die Lage der Punkte verändert. Begründe die neue Lage.
3) Bilde die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Werte aus der Spalte B. Setze dazu in die Zelle C1: *=B2-B1*, markiere diese und fülle die Spalte mit *Kopieren* und *Einfügen*. Begründe das Ergebnis.
4) Wiederhole den Vorgang aus 3), indem du statt der Differenz den Quotienten bildest.
5) Stelle eine antiproportionale Zuordnung mit Hilfe der Tabellenkalkulation grafisch dar. Beschreibe die Lage der Punkte.

Arbeitsblatt 2: Proportionale Zuordnungen und Zufall

Wir wollen jetzt mit dem ClassPad würfeln. Mit dem Befehl *rand(1,6)* wird eine Zufallszahl zwischen 1 und 6, also wie beim Würfeln erzeugt. Mit dem Befehl *randlist(20,1,6*) lassen sich 20 solcher Zahlen erzeugen. Wir wollen als nächstes untersuchen, wie sich die Anzahl der geworfenen „6“ verändert, wenn wir die Anzahl der Würfe um eine feste Zahl (zum Beispiel 100) jeweils erhöhen. Dieses könnte man im *Main* Bereich durchführen, was allerdings den Nachteil hätte, dass die „6“ händisch zu zählen wären. Wenn der ClassPad das Zählen übernehmen soll, muss ein kleines Programm geschrieben werden. Dazu muss der Menüpunkt 

gewählt werden. Um ein neues Programm zu erstellen, gibt man diesem zunächst einen Namen (z.B. Würfel) (*Edit – Neue Datei*)

Nachdem obiges geschehen ist, wechselt der ClassPad automatisch in den Editor; dort kannst du das entsprechende Programm eingeben.



Programm zur Erzeugung von Würfelserien

Für die Simulation des Würfelns sind viele Wiederholungen erforderlich; dies geschieht beim Programmieren durch Schleifen. Die Hauptschleife beginnt mit dem ersten *for* und endet beim letzten *next*. Die Variable n dient als Zähler. Das Programm erzeugt 10 Würfelserien. Um eine Zuordnung zu erhalten, wird der jeweilige Durchgang in der Liste *list1* gespeichert (2. Zeile). In der Variablen k wird die jeweilige Anzahl der geworfenen „6“ gespeichert. Zu Beginn muss sie den Wert 0 erhalten (Zeile 3). In Zeile 4 wird eine Serie von 100, 200, 300 usw. Würfen erzeugt, die in der Liste *list3* gespeichert werden. Die nächste Schleife dient dazu die Anzahl der geworfenen „6“ zu zählen. Dazu wird die Liste list3 Zahl für Zahl untersucht, ob dort eine „6“ steht; wenn dies der Fall ist (Zeile 6), dann wird zur Variablen k eins dazu addiert (Zeile 8). Am Ende des Durchlaufs wird die Anzahl der „6“ in der Liste *list2* abgespeichert (Zeile 11).

Wenn das Programm vollständig eingeben ist, wähle die Taste: Falls Fehler im Programm sind, wirst du darauf hingewiesen und must diese berichtigen. Für das laufenlassen, wähle: 

Die Laufzeit wird relativ lang sein (ca. 20 Minuten). Du kannst die Ausführung mit der *clear*-Taste jederzeit unterbrechen. Die Laufzeit kannst du verkürzen, wenn du in der 4. Zeile eine kleinere Zahl als 100 z.B. 10 wählst.

Die vom Programm erzeugten Daten findest du im Statistik-Modul. Für die weitere Verarbeitung sind sie in die Tabellenkalkulation zu übertragen. Wähle dazu in der Tabellenkalkulation *Datei* -> *Import* und übertrage dann *list1* in die Spalte A und *list2* in die Spalte B.

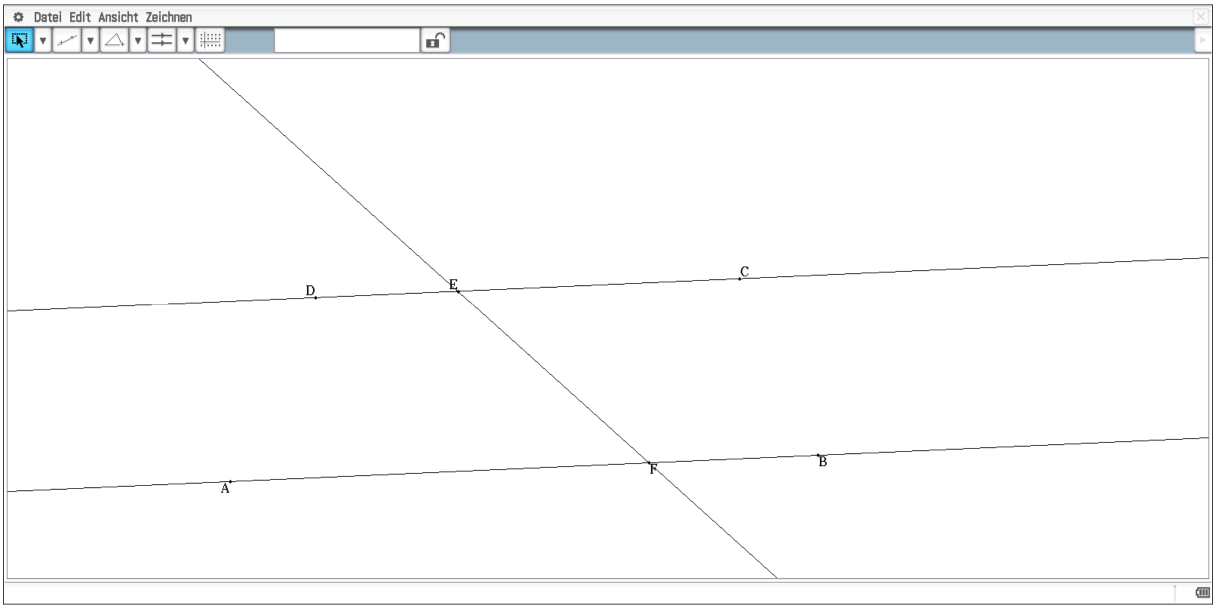
1) Stelle die Werte grafisch dar
2) Untersuche, ob es sich um eine proportionale Zuordnung handelt

Arbeitsblatt 3: Prozentrechnung

1) Arbeite mit der Tabellenkalkulation und erstelle eine Tabelle für die Grundwerte 0, 25, 50, … , 250 und den Prozentsatz 3%. Schreibe den Prozentsatz in eine eigene Zelle, so dass du diesen ohne viel Aufwand verändern kannst.
2) Stelle den Prozentwert in Abhängigkeit des Grundwertes grafisch dar. Beschreibe und begründe die Lage der Punkte.
3) Bilde in einer weiteren Spalte den Quotienten aus Prozentwert und Grundwert. Was fällt auf?
4) Erzeuge eine neue Tabelle. Beginne mit 100 Euro. Die Bank zahlt Jahr für Jahr 3% Zinsen. Das heißt, nach einem Jahr hat man 100 * 1,03 = 103, nach zwei Jahren 103 * 1,03 = … usw. Wie lange dauert es, bis sich das Kapital verdoppelt? Probiere es auch mit anderen Prozentsätzen aus. Begründe, warum man nach 20 Jahren bei einem Zinssatz von 6% mehr als doppelt so viel hat als bei einem Zinssatz von 3%.
5) Stelle die Werte grafisch dar. Beschreibe die Lage der Punkte und vergleiche mit 2).
6) Ein Betrag wird zunächst um 10% erhöht und danach um 10% erniedrigt. Führe dies mehrmals aus und vergleiche mit dem Fall, dass man erst um 10% erniedrigt und dann um 10% erhöht. Begründe, dass in beiden Fällen der Betrag kleiner wird.

Arbeitsblatt 4: Winkelsätze

Wähle den Arbeitsbereich Geometrie. Lege durch zwei Punkte eine Gerade und konstruiere dazu eine parallele Gerade. Für die parallele Gerade legst du einen Punkt auf das Zeichenblatt und markierst diesen Punkt und die Gerade. Die Parallele ergibt sich durch *Zeichnen* – *Konstruiere* – *Parallele*. Dann legst du auf beide Geraden je einen Punkt und zeichnest durch diese beiden Punkte eine weitere Gerade. Das Bild sollte in etwa folgendermaßen aussehen:



Im Messfenster kannst du Winkel messen. Dazu sind die jeweiligen Geraden zu markieren. Um in den Messbereich zu gelangen, musst du zunächst die Pfeiltaste (oben rechts) betätigen. Um die Veränderung eines Winkels zu erkennen, ist der Wert aus dem Messfenster auf den Zeichenbereich zu ziehen. Für die Orientierung solltest du den Winkeln sinnvolle Namen geben. Dies geschieht mit dem Symbol: . Den Namen änderst du im Messfenster.

Aufgaben:

1) Vergleiche die verschiedenen Winkelgrößen.
2) Verändere die Punkte E oder F.
3) Notiere deine Beobachtungen.

Wenn du die Punkte A und E verbindest, erhältst du ein Dreieck.

4) Miss die Größen der drei Innenwinkel des Dreiecks.
5) Verändere die Lage des Punktes E und beschreibe, wie sich dadurch die Größen der Winkel verändern.
6) Dir ist vielleicht aufgefallen, dass die Summe der drei Winkelgrößen immer gleich bleibt. Begründe dies, indem du deine Beobachtungen von 3) benutzt.

Arbeitsblatt 5: Flächeninhalt von Parallelogramm und Dreieck

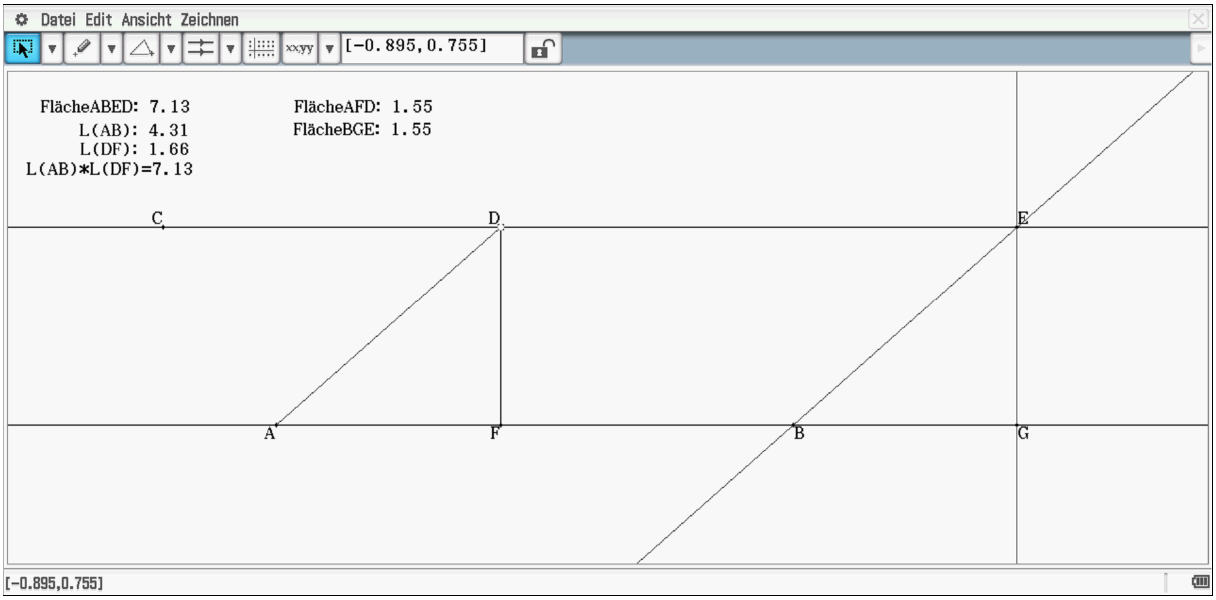
Zeichne die Strecke AB, lege auf diese eine Gerade und konstruiere zu dieser eine Parallele, die durch den vorher willkürlich gesetzten Punkt C verläuft.

Auf diese Parallele lege den Punkt D, der dadurch an diese gebunden ist. Um eine Dynamik zu bekommen, wird die restliche Konstruktion bezogen auf diesen Punkt D durchgeführt.

Der Punkt E wird konstruiert, indem zunächst eine Parallele zu AD durch B konstruiert wird. Der Punkt E ergibt sich als Schnittpunkt der Parallelen zu AD und der Geraden durch C ergibt.

Fälle das Lot vom Punkt D und vom Punkt E auf die Gerade AB und markiere die beiden Schnittpunkte mit der Geraden durch A und B.

Dein Bild sollte in etwa so aussehen:



Um Flächen zu messen, müssen die Eckpunkte der zu messenden Fläche markiert werden. Die Größen lassen sich dann wieder in die Zeichenfläche ziehen.

Aufgaben:

1) Variiere den Punkt D und beschreibe, wie sich die Größen der einzelnen Flächen verändern.
2) Gib eine Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms an und begründe diese.
3) Gib eine Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks an und begründe diese.

Arbeitsblatt 6: Geometrische Konstruktionen am Dreieck 1

Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruiere die Mittelsenkrechte zur Seite AB. Markiere dazu die Punkte A und B und wähle *Zeichnen – Konstruiere – Mittelsenkrechte*.

Lege auf diese Mittelsenkrechte den Punkt D.

Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt D, so dass der Punkt A auf dem Kreisbogen liegt.

Begründe, dass der Punkt B ebenfalls auf diesem Kreisbogen liegt.

Verschiebe den Punkt D auf der Mittelsenkrechten so, dass der dritte Punkt C des Dreiecks ebenfalls auf diesem Kreisbogen liegt (s. Abbildung Bild 1).

Begründe, dass sich der Mittelpunkt des Umkreises als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten ergibt.

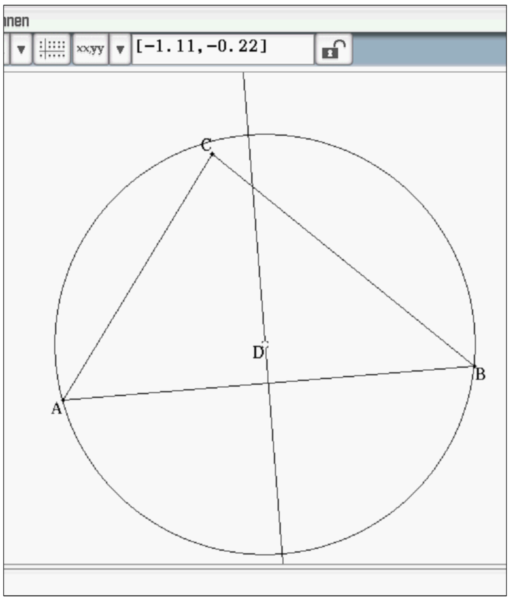


Bild 1

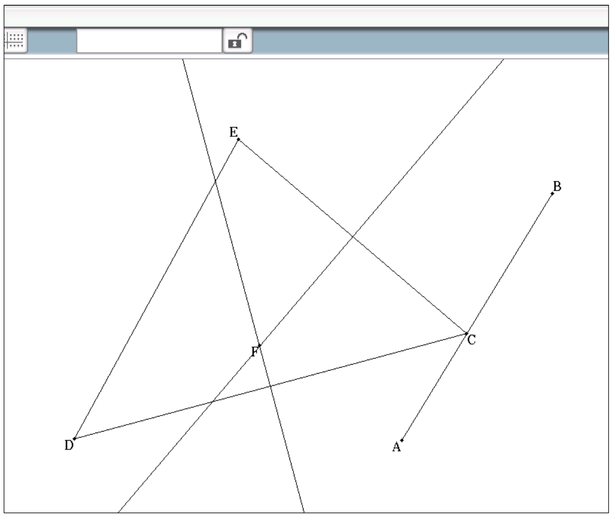


Bild 2

Verändere die Zeichnung jetzt so, dass der Eckpunkt B auf einer vorher gegebenen Strecke liegt. Das heißt, die Strecke muss als erstes gezeichnet und danach der Eckpunkt auf diese Strecke gelegt werden.

Konstruiere den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und markiere diesen.

Variiere den Eckpunkt auf der gegebenen Strecke und beobachte, wie sich der Schnittpunkt verändert. (s. Bild 2)

Die Variation kann auch den ClassPad ausgeführt werden. Markiere dazu den Eckpunkt und die Strecke.

Wähle *Edit* – *Animieren* – *Animation hinzufügen*.

Wähle Edit – *Animieren* – *Animation* – *Ablaufen (einmal*).

Der Weg, den der Schnittpunkt dabei zurücklegt, lässt sich verfolgen.

Markiere den Schnittpunkt und wähle Edit – *Animieren* – *Animation* – *Verfolgen*.

Begründe, dass sich eine Strecke ergeben muss.

Was hast du im Prinzip konstruiert?

Arbeitsblatt 7: Geometrische Konstruktionen am Dreieck 2

Wir wollen als nächstes die Bedeutung der Winkelhalbierenden untersuchen. Dazu gehen wir ähnlich wie bei den Mittelsenkrechten vor.

Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruiere die Winkelhalbierende zum Winkel α.

Lege auf diese den Punkt D, fälle vom Punkt D das Lot auf die Seite AB und setze einen Punkt E auf den Schnittpunkt.

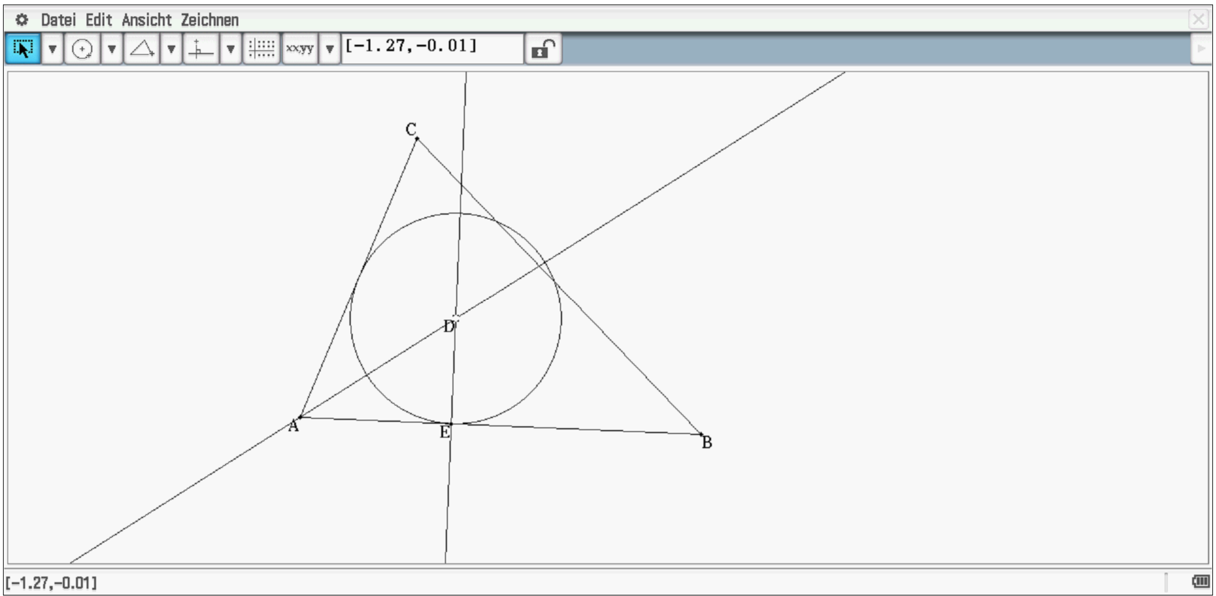
Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt D, so dass der Schnittpunkt E auf dem Kreisbogen liegt.

Der Kreis berührt die Seiten AB und AC (s. Bild unten). Begründe dies.

Verschiebe den Punkt D nun so, dass der Kreis auch die Seite BC berührt.

Gib die Eigenschaften des so verschobenen Punktes D an.

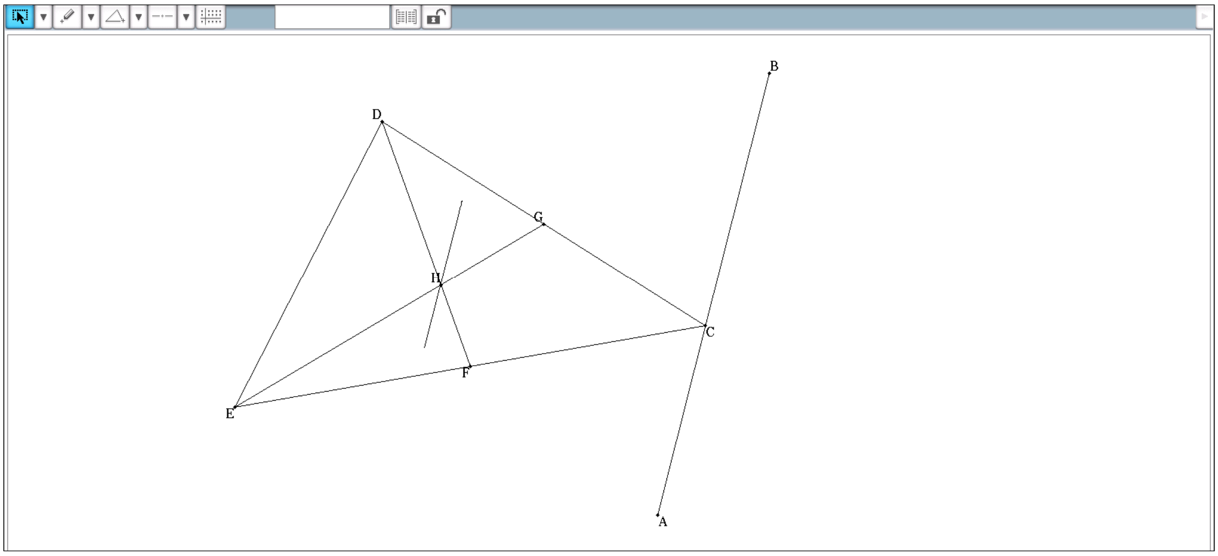
Begründe, dass der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC ist.



Arbeitsblatt 8: Geometrische Konstruktionen am Dreieck 3

Im Folgenden wollen wir den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden animieren.

Fertige dazu ein Bild, das der Abbildung unten entspricht an. Der rechte Eckpunkt des Dreiecks wird wieder auf eine Strecke gelegt und eine Animation wie im Arbeitsblatt 1 durchgeführt.



Die Strecke, die der animierte Schnittpunkt der Seitenhalbierenden zurücklegt, scheint parallel zur vorgegebenen Strecke für den Eckpunkt zu sein. Dies soll genauer untersucht werden.

Die Koordinaten der beiden bewegten Punkte können abgerufen und in die Tabellenkalkulation übertragen werden.

Dazu musst du folgendermaßen vorgehen:

Markiere den Eckpunkt C und wähle das Tabellensymbol  neben dem Messfenster.

Markiere die x-Werte und übertrage diese in die Tabellenkalkulation (*Edit* – *Kopieren* => Tabellenkalkulation: *Edit* – *Einfügen*)

Verfahre entsprechend mit den y-Werten und den Werten des Schnittpunktes H.

Parallele Geraden haben die gleiche Steigung. Untersuche, ob dies für die beiden Strecken zutrifft.

Hinweis: Steigungen lassen sich durch $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ berechnen, wobei die beiden Punkte P und Q der Geraden durch $P(x_1, y_1)\ und\ Q(x_2, y_2)$ gegeben sind.

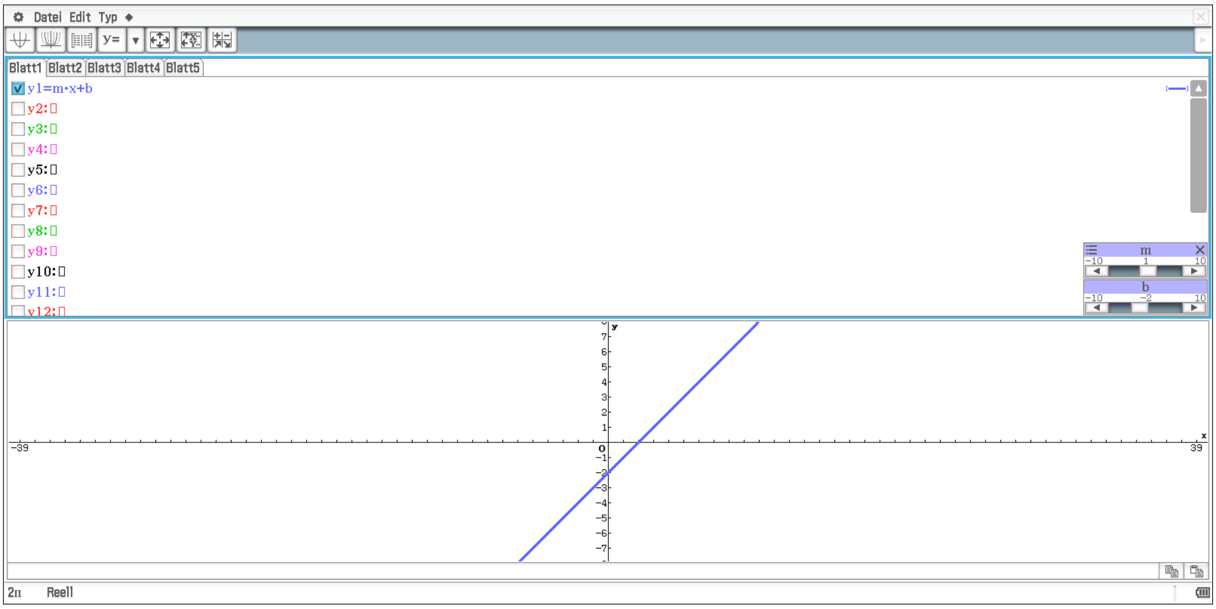
Hinweis: Begründungen für obiges liefern Betrachtungen über ähnliche Dreiecke. Dazu kann man den Mittelpunkt der Seite DE mit den Endpunkten A und B der Strecke AB verbinden.

Arbeitsblatt 9: Lineare Funktionen 1

Wähle den Bereich Grafik & Tabelle

Gib als Funktion $y_1 = m * x + b$ ein und wähle dann .

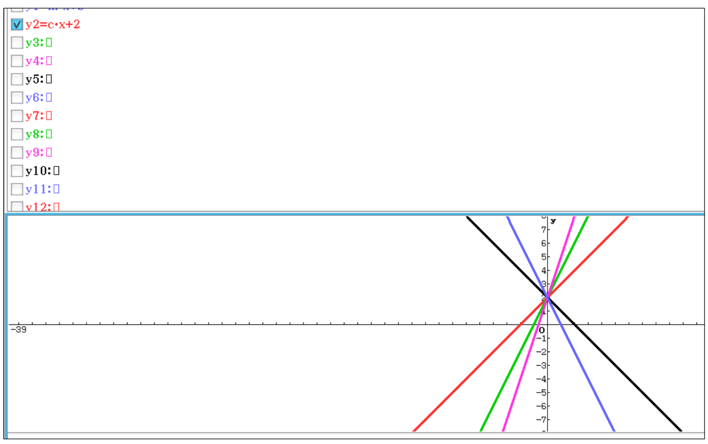
Es erscheint das Bild unten. Mit dem Schieberegler lassen sich die Variablen m und b verändern.



Aufgaben:

1) Beschreibe, wie sich der Graf ändert, wenn man die Variable m verändert.
2) Beschreibe, wie sich der Graf ändert, wenn man die Variable b verändert.
3) Die Variable m beschreibt die Steigung, die Variable b den y-Achsenabschnitt. Begründe, dass die Wahl der Begriffe sinnvoll ist.

Wenn du mehrere Geraden gleichzeitig auf dem Bildschirm haben möchtest, kannst du für y_1, y_2 usw. verschiedene Geraden angeben. Einfacher ist es, wenn man vorher im Bereich *main* eine Liste anlegt. Dies geschieht, indem du z.B. {1,2,3,-1,-2}=>m eingibst. Du musst dann noch die Variable b z.B. durch 2 ersetzt. Deine Aufgabe ist es, die Geraden richtig zuzuordnen.



Arbeitsblatt 10: Lineare Funktionen 2

Um die Steigung einer Geraden besser zu verstehen, wählen wir das Geometrie-Modul.

Da wir Geraden im Koordinatensystem betrachten wollen, betätigen wir die Taste so lange, bis ein Koordinatensystem mit Einheiten auf dem Bildschirm zu sehen ist. Bei einer weiteren Betätigung erscheinen blaue Punkte bzw. ein blaues Gitter. Dies hat zur Folge, dass gesetzte Punkte nur noch ganzzahlige Koordinaten haben können.

Lege einen Punkt auf (0,1). Falls du nicht genau triffst, kannst du durch Markieren des Punktes diesen im Messfenster nachkorrigieren, oder du wählst kurzzeitig das Koordinatensystem mit Gitterpunkten.

Wähle einen zweiten Punkt und verbinde die beiden durch eine Gerade.

Markiere die Gerade. Im Messfenster kannst du die Steigung durch Wahl ablesen.

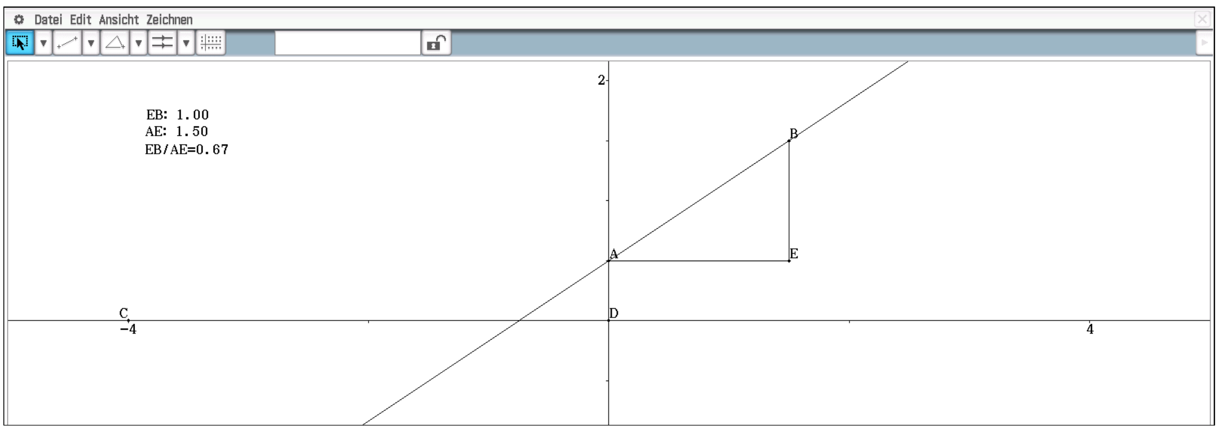
Markiere den Wert der Steigung und ziehe den Wert auf den Bildschirm.

Variiere jetzt den Punkt B so, dass du als Steigung die folgenden Werte erhältst und trage die Koordinaten für den Punkt B ein.

Steigung	1	3	0,5	-1	-1,5	0
x-Wert						
y-Wert						

Gib eine Regel an, mit deren Hilfe du den y-Wert vom Punkt B bestimmen kannst, wenn die Steigung und der X-Wert gegeben sind.

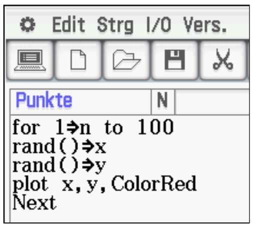
Konstruiere zu deiner Geraden ein Steigungsdreieck (s. Bild unten).



Hinweis: Den Quotienten EB/AE erhältst durch *Zeichnen – Formelterm* und die Eingabe @1/@2. Die Streckenlängen EB und AE müssen dazu vorher auf das Zeichenfenster gezogen sein. Mit Hilfe von @ kann man auf die verschiedenen Terme zugreifen.

Arbeitsblatt 11: Zum Term Verständnis

Mit Hilfe des folgenden Programms werden Zufallspunkte erzeugt, die als Eckpunkte von Rechtecken interpretiert werden. Als weiterer Eckpunkt dient der Koordinatenursprung (0,0).



Die *for*-Schleife sorgt dafür, dass 100 Punkte erzeugt werden. Der Befehl *rand()* erzeugt Zufallszahlen z, für die gilt: $0 < z < 1$.
Der *plot*-Befehl setzt die Punkte in rot in das Zeichenfenster.

Aufgaben:

1) Gib das obige Programm ein.
2) Füge nach der 3. Zeile *x*y=>f* als neue Zeile und vor die letzte Zeile *plot x,f,ColorBlue* ebenfalls als neue Zeile ein.
3) Beschreibe und begründe die Lage der „blauen“ Punkte. Was wird durch diese Punkte visualisiert?
4) Ändere das Programm so ab, dass die Umfänge der gedachten Rechtecke in Abhängigkeit der x-Koordinate dargestellt werden. Denke daran, dass du für die Punkte und Umfänge verschiedene Farben wählst.
5) Beschreibe und begründe die Lage der Punkte, die den Umfang beschreiben.
6) Stelle den Flächeninhalt in Abhängigkeit des Umfangs dar. Gib Terme für die Graphen an, die die Ränder beschreiben. (Hinweis: Für die obige Randfunktion musst du dich mit Parabeln auskennen.
7) Ersetze die beiden *rand()*-Befehle durch *2*rand()* bzw. *3*rand()* usw. . Beschreibe und begründe die sich ergebenen Änderungen.

Arbeitsblatt 12: Zum Lösen von linearen Gleichungen
Löse die Gleichung: 2x + 3 = 0,5x – 2

Gehe dazu folgendermaßen vor:

Gib die Gleichung in den *main*-Bereich ein und setze sie in runde Klammern (Beachte: Ersetze das Komma durch den Punkt.).

Schreibe die Umformung, die du vornehmen willst (z.B. –0,5x), dahinter und betätige die *exe*-Taste.

Kopiere das Ergebnis in den Aktionsbereich (Markieren und mit dem Stift herüberziehen).

Führe die weiteren Umformungen durch, bis auf der linken Seite der Gleichung das „x“ alleine steht.

Auf jeder Seite der Gleichung steht immer ein Term, der sich grafisch darstellen lässt; das wollen wir als nächstes angehen.

Wähle dazu  , markiere jeweils eine Seite der Gleichung mit der Ausgangsgleichung beginnend und ziehe sie in das Grafikfenster.

Vergleiche die jeweiligen Schnittpunkte mit der Lösung der Gleichung.

Erläutere, in wie fern deine Umformungen der Gleichungen die Lage der Geraden im Grafikfenster verändern.

Hinweis: Eventuell ist es erforderlich, den Bereich des Grafikfensters zu verändern. Dies geschieht durch Wahl der Taste: 

Löse die folgenden Gleichungen wie oben:

1) 1,7x – 2 = 2,1x + 1
2) 1,3x + 1,2 = 7,5x + 6
3) 1,3x + 1,2 = 7,5x + 5

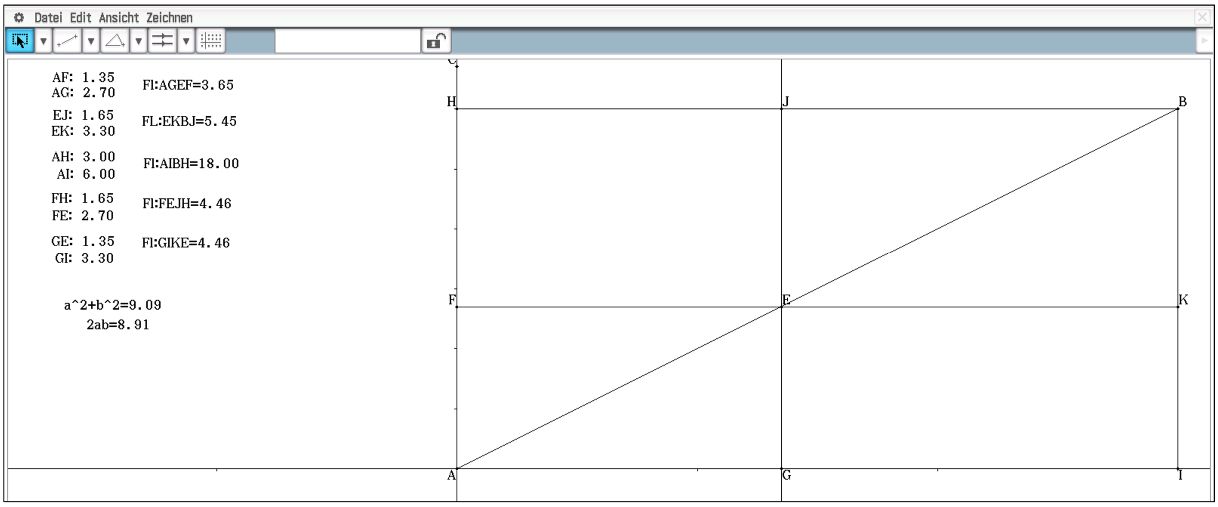
Arbeitsblatt 13: Binomische Formeln

Gib die ausmultiplizierten Terme für $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ usw. an.

Hinweis: Wenn ein Term ausmultipliziert werden soll, benutze den Befehl *Umformungen - Expand*. Für das Zusammenfassen in Faktoren, benutze den Befehl Umformungen - faktoris – factor.

Beschreibe die Struktur der sich ergebenden Terme.

Die folgende Abbildung visualisiert die erste binomische Formel



Stelle eine entsprechende Figur her und erkläre den Zusammenhang zur ersten binomischen Formel.

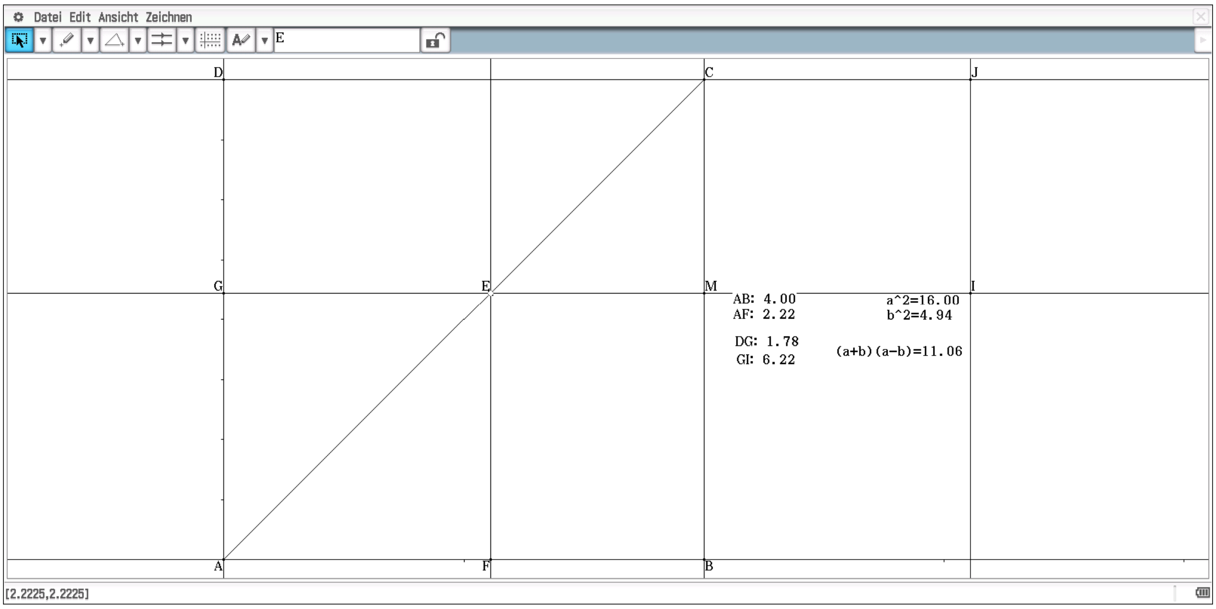
Gib die ausmultiplizierten Terme für $(a-b)^2$, $(a-b)^3$, $(a-b)^4$ usw. an.

Beschreibe die Struktur der sich ergebenden Terme.

Ändere die obige Abbildung so ab, dass du sie auch zur Visualisierung der zweiten binomischen Formel nutzen kannst.

Arbeitsblatt 14: Binomische Formeln: Die dritte binomische Formel

Für die Visualisierung der dritten binomischen Formel ist die Konstruktion zu verändern (s. Abb. unten)



Stelle eine entsprechende Figur her.

Das Quadrat ABCD visualisiert a^2 und das Quadrat AFEG steht für b^2.

Begründe, dass die Länge der Strecke DG den Wert für $a–b$ angibt.

Die Visualisierung von $a+b$ ist noch zu konstruieren. Dazu wird der Punkt M als Schnittpunkt der Geraden GE und BC festgelegt. Der Punkt M ist Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius der Streckenlänge von MB, was dem Wert der Variablen b entspricht. Erläutere diesen Sachverhalt. Begründe, dass die Länge der Strecke GI den Term $a+b$ repräsentiert.

Variiere den Punkt E und erläutere den Zusammenhang zur dritten binomischen Formel.

Arbeitsblatt 15: Der Satz des Thales

Zeichne einen Kreis.

Lege zwei Punkte auf den Kreisbogen und verbinde diese.

Finde einen dritten Punkt, so dass sich ein rechtwinkliges Dreieck ergibt.

Beschreibe die Lage der Hypotenuse.

Verändere die beiden ersten Punkte. Lässt sich eine allgemeine Aussage über die Lage der Hypotenuse treffen? Mache eine Aussage in der Form: Wenn … , dann … .

Als nächstes soll untersucht werden, ob sich die von dir gemachte Aussage auch umkehren lässt. Das bedeutet, dass du deine Folgerung als Voraussetzung wählst und untersuchst, ob sich dann deine obige Voraussetzung folgern lässt.

Für die Untersuchung mache folgende Konstruktion.

Zeichne einen Kreis.

Lege in diesen Kreis eine Sekante, lege zwei Punkte auf die Schnitte der Sekante mit dem Kreisbogen und auf den Kreisbogen einen Punkt, so dass die drei Punkte ein Dreieck bilden.

Miss den Winkel an dem Punkt und ziehe den Wert in das Zeichenfenster, so dass du Veränderungen der Winkelgröße beobachten kannst.

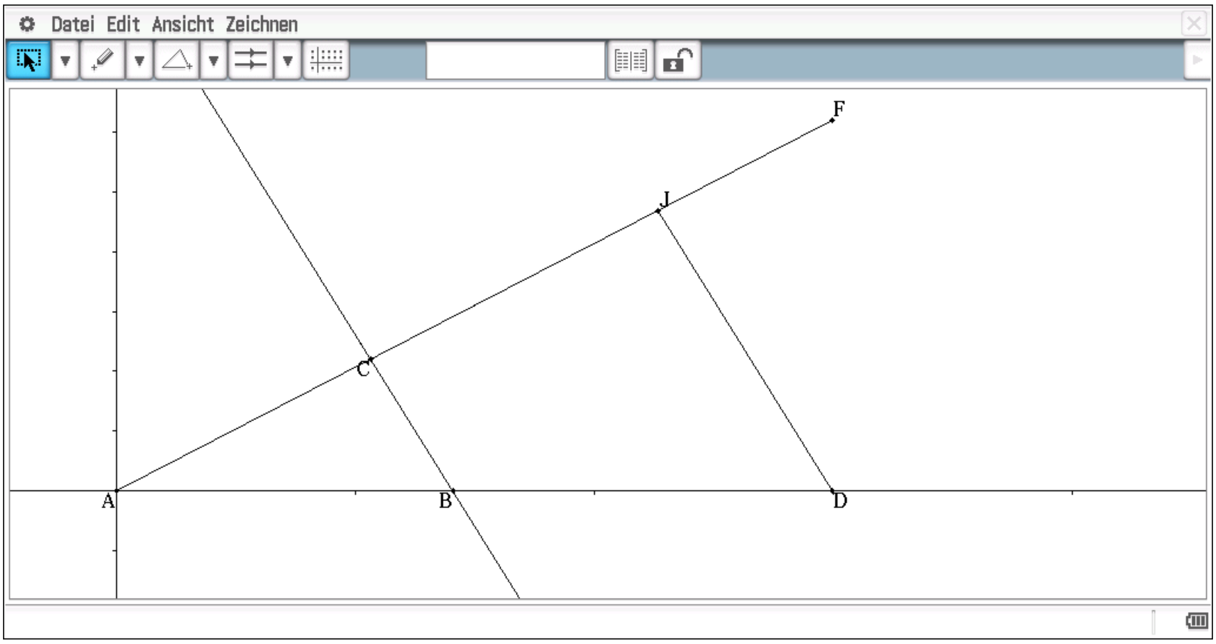
Verändere die Lage der Sekante, indem du z.B. an einem der Punkte ziehst.

Vergleiche Winkelgrößen, wenn der Mittelpunkt mal oberhalb bzw. unterhalb der Sekante liegt.

Mache eine Aussage in der Form: Wenn … , dann … .

Bestätige die Kurzform des Satzes des Thales: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

Arbeitsblatt 16: ähnliche Dreiecke
Übertrage das Bild auf deinen Rechner



Es ist wichtig, dass die Strecken BC und DJ als Parallele konstruiert worden sind.

Ziehe an den Punkten B, C, D oder J.

Miss Winkel und Streckenlängen.

Notiere möglichst viele Beobachtungen.

Man nennt die Dreiecke ABC und ADJ ähnlich. Notiere eine Definition für ähnliche Dreiecke.

Arbeitsblatt 17: Näherung für π

Zeichne zwei Punkte A und B und verbinde sie mit einer Strecke.

Setze auf diese Strecke den Punkt C.

Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt A, so dass der Punkt C auf dem Kreisbogen liegt.

Mit Hilfe einer Animation sollen die jeweiligen Kreisflächen mit den Radien verglichen werden.

Dazu markiere den Punkt C und die Strecke AB.

Wähle dann *Edit* – *Animieren* – *Animation* hinzufügen und *Edit* – *Animieren* – *Ablaufen (einmal)*

Mit Hilfe der Tabellenfunktion im Messfenster können die jeweiligen Werte für den Radius und den Flächeninhalt des Kreises in die Tabellenkalkulation zur weiteren Bearbeitung übertragen werden.

Die Radien erhältst du, indem du die beiden Punkte A und B markierst, die Abstandsmessung wählst und im Messfenster die Tabelle angibst. Für den Flächeninhalt des Kreises ist der Kreis zu markieren und für das Messfenster ist die Flächenfunktion zu wählen.

Mit Hilfe von Kopieren und Einfügen lassen sich die Daten in die Tabellenkalkulation übertragen.

Fülle eine dritte Spalte, indem du die Werte der zweiten Spalte durch das Quadrat der Werte der ersten Spalte teilst.

Beschreibe, wie man den Flächeninhalt eines Kreises bestimmen kann.

Arbeitsblatt 18: Quadratische Funktionen und deren Grafen

Gib im Modul Grafik & Tabelle den Term: a*x^2+b*x+c ein und wähle .

Mit Hilfe der Schiebregler kannst du die Koeffizienten a, b und c verändern.

Beginne mit der Variablen c und beschreibe die Veränderungen.

Verfahre entsprechend mit den Variablen b und a.

Achte bei der Veränderung von b insbesondere darauf, wie sich der Scheitelpunkt verändert.

Arbeitsblatt 19: Geometrische Konstruktion einer Parabel

Eine Parabel beschreibt diejenigen Punkte, die von einer gegeben Geraden und einen gegebenen Punkt den gleichen Abstand haben. Mit dem ClassPad lässt sich eine solche Parabel direkt „konstruieren“. Man benutze dazu  in der zweiten Menüspalte des Geometriemoduls.

Konstruiere eine Parabel mit Hilfe des obigen Befehls und probiere für einzelne Punkte der Parabel aus, ob sie eine Gleichung der Art $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ erfüllen. (Tipp: Versuche die Parabel so zulegen, dass der Ursprung auf der y-Achse liegt, dann vereinfacht sich die Gleichung)

Als nächstes soll eine weitere Möglichkeit, eine Parabel zu konstruieren ausprobiert werden.

Lege einen Punkt A in den Koordinatenursprung und einen zweiten Punkt B in (0,2).

Konstruiere einen Kreis mit dem Mittelpunkt C(0,1), so dass die beiden Punkte A und B auf dem Kreis liegen.

Lege eine Strecke, die durch die Punkte D und E begrenzt ist, auf die x-Achse.

Lege auf diese Strecke den Punkt F und verbinde diesen mit dem Punkt B.

Diese Strecke schneidet den Kreis; setze auf den Schnitt den Punkt G.

Lege durch den Punkt F eine Senkrechte zur x-Achse bzw. zur Strecke DE. (Hinweis: Die Koordinatenachsen kann man nicht direkt zur Konstruktion benutzen.)

Zeichne eine Gerade durch den Koordinatenursprung (Punkt A) und den Schnittpunkt G zwischen dem Kreis und der Strecke BF (Punkt G).

Diese Gerade schneidet die Senkrechte durch den Punkt F. Setze auf den Schnittpunkt den Punkt H.

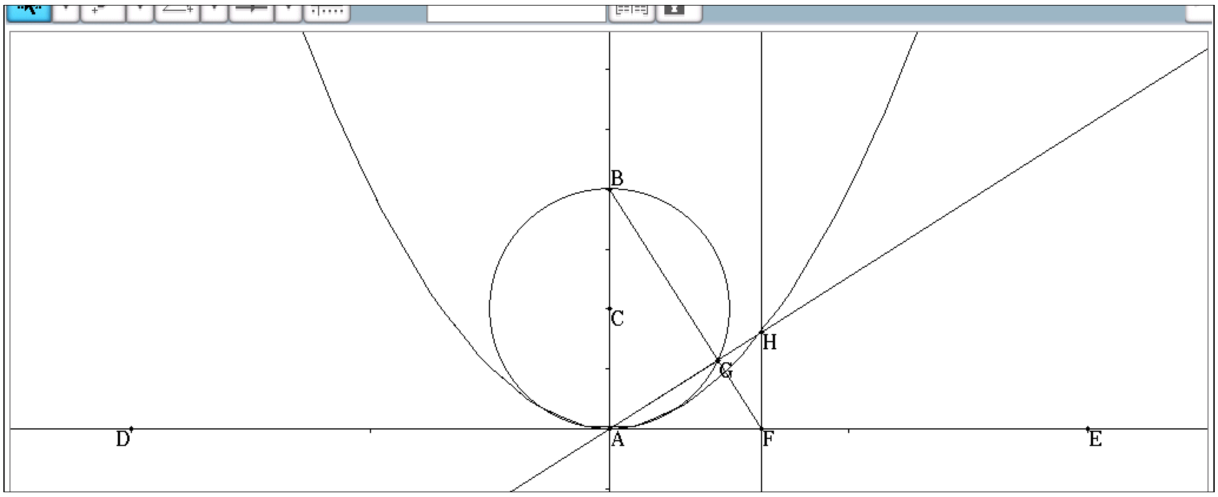
Deine Konstruktion sollte in etwa dem Bild unten entsprechen.

Die Parabel erhältst du durch eine Animation des Punktes F und der Verfolgung des Punktes H.

Markiere dazu den Punkt F und die Strecke DE. Wähle: *Edit* – *Animieren* – *Animation hinzufügen*

Und *Edit* – *Animieren* – *Ablaufen (einmal)*.

Markiere den Punkt H und wähle *Edit* – *Animieren* – *Verfolgen* und lass die Animation nochmals ablaufen.



Mit Hilfe der Tabelle im Messfenster kannst du die Koordinaten der Punkte H erhalten.

Übertrage diese in das Modul Tabellenkalkulation und überprüfe, ob die Koordinaten die Bedingung einer quadratischen Funktion erfüllen. (Tipp: Begründe, dass die Gerade AGH durch $y = \frac{z}{2r} \cdot x$ bestimmt ist, wenn F(z,0) und benutze den Satz des Thales.)

Arbeitsblatt 20: Quadratische Gleichungen

Im Arbeitsblatt 18 hast du erfahren, dass für eine Parabel, die durch $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ (*) gegeben ist, der x-Wert des Scheitelpunktes durch $-\frac{b}{2}$ bestimmt ist.

Erläutere, dass für den y-Wert des Scheitelpunktes $y_s = f(-\frac{b}{2})$ gilt.

Begründe, dass sich jede quadratische Funktion (*) auch in der Form $f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$ schreiben lässt.

Forme die folgenden Gleichungen entsprechend um

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$
b) $f(x) = x^2 + 8x + 20$
c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
d) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Wir wollen im Folgenden Gleichungen der Art f(x) = 0 lösen.

Beschreibe die geometrische Bedeutung dieser Aussage.

Diskutiere die möglichen Lösungen der Gleichungen f(x) = 0 für die Funktionen a) – d).

Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Lage des Scheitelpunktes und der Anzahl der Lösungen.

Begründe, dass man Lösungen durch $x_{1/2} = x_s \pm \sqrt{y_s}$ erhält.

Löse die Gleichungen f(x) = 0 für die Funktionen a) – d) und überprüfe diese an Hand des Grafen.

Kompliziertere quadratische Gleichungen lassen sich immer auf die Form $x^2 + b \cdot x + c = 0$ bringen.

Falls du Probleme mit Term Umformungen hast, kannst du dich vom ClassPad unterstützen lassen. Dies funktioniert genauso wie bei den linearen Funktionen (s. Arbeitsblatt 12).

Löse die folgenden Gleichungen:

a) $3x^2 - 4x - 4 = 0$
b) $2z^2 + 9z + 7 = 0$
c) $12x^2 + 2x = 9x^2 + 9x - 2$
d) $5x - 3 - 2x(3x - 4) = 4$
e) $x(3x - 7) = (x + 2)^2 + x - 4$

Tipp: Klammern lassen sich mit Hilfe von *interaktiv – Umformungen - expand* ausmultiplizieren. Das Gegenteil bewirkt *interaktiv – Umformungen – faktoris – factor* .

Führe die für die Terme a) – d) durch und vergleiche mit den Lösungen der Gleichungen f(x) = 0. Begründe den Zusammenhang.

Arbeitsblatt 21: Satzgruppe des Pythagoras
Der Höhensatz

Zeichne eine Strecke AB, konstruiere den Mittelpunkt und zeichne einen Halbkreis über diese Strecke. Benutze für den Halbkreis: 

Lege auf diesen Halbkreis einen Punkt C, so dass sich ein Dreieck ergibt.

Begründe, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Fälle vom Punkt C das Lot auf die Seite AB und setze den Schnittpunkt des Lotes mit der Seite AB.

Das Lot teilt das Dreieck in zwei Dreiecke. Begründe, dass die entstehenden Dreiecke ähnlich sind.

Überprüfe die Ähnlichkeit, indem du entsprechende Winkelgrößen misst und Seitenverhältnisse berechnen lässt.

Die beiden entstandenen Teildreiecke sind ebenfalls rechtwinklig. Betrachte die Verhältnisse der beiden Katheten und begründe, dass $h_c^2 = p \cdot q$ gilt, wobei p und q die beiden Hypotenusen Abschnitte und h_c die Höhe auf die Hypotenuse des ursprünglichen Dreiecks sind.

Ziehe am Punkt C und beobachte, in wie fern sich die Seitenverhältnisse verändern.

Dieses Ergebnis nennt man den Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke.

Der Kathetensatz

Wähle die gleiche Konstruktion wie für den Höhensatz.

Begründe, dass das ursprüngliche Dreieck und eines der Teildreiecke ähnlich sind.

So ist die Seite a in dem großen Dreieck Kathete und in dem kleinen Dreieck Hypotenuse.

Begründe, dass $\frac{a}{c} = \frac{q}{a}$ bzw. $\frac{b}{c} = \frac{p}{b}$, wobei p und q die entsprechenden Hypotenusen Abschnitte sind.

Ziehe am Punkt C und beobachte, in wie fern sich die Seitenverhältnisse verändern.

Begründe, dass dann $a^2 = c \cdot q$ bzw. $b^2 = c \cdot p$ gelten muss. Dieses nennt man den Kathetensatz für rechtwinklige Dreiecke

Der Satz des Pythagoras

Begründe, dass aus dem Kathetensatz direkt $a^2 + b^2 = c^2$ folgt, wobei a und b die Katheten und c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Arbeitsblatt 22: Exponentielles Wachstum

Die folgende Simulation soll mit dem ClassPad durchgeführt werden. Wir würfeln mit 50 Würfeln, zählen, wie oft die „6“ gefallen ist. Diese Anzahl fügen wir den 50 Würfeln hinzu und wiederholen den Vorgang 20-mal. Dies kann man im *Main* Bereich mit sehr viel Zählerei tun. Wenn Technologie benutzt wird, sollte man das Zählen aber natürlich der Technologie überlassen. Deswegen schreiben wir ein Programm, das im Folgenden erklärt wird.

Programm	Beschreibung
50=>n	Die Ausgangszahl 50 Würfel wird der Variablen n zugeordnet.
for 1=>j to 20	Die Simulation soll 20-mal durchgeführt werden.
j=>list2[j]	In die Liste list2 wird gespeichert, um die wievielte Simulation
n=>list3[j]	es sich handelt.
0=>k	Die Anzahl der Würfel wird in die Liste list3 gespeichert.
Randlist(n,1,6)=>list1	k ist die Zählvariable für die Anzahl der „6“.
for 1=>I to n	Es wird eine Liste von n Zufallszahlen 1, 2, … ,6 erzeugt.
if list1[i]=6	Mit der for-Schleife wird geprüft, ob eine „6“ gewürfelt wurde.
then	Wenn dies der Fall ist, wird der Zähler k um 1 erhöht.
k+1=>k	
ifend	
next	Ende der einzelnen Überprüfung
n+k=>n	Ende der Schleife für die Überprüfungen
next	n wird um die Anzahl der gefundenen „6“ vergrößert.
	Ende der Hauptschleife; wenn die Variable j die Zahl 20 noch nicht erreicht hat, wird j um 1 vergrößert und eine weitere Simulation wird gestartet.

Wähle das Modul Programm, gib deinem Programm einen Namen und gib das Programm in den Editor ein.

Wähle und lass es laufen, wenn keine Fehler aufgetreten sind; ansonsten überprüfe dein Programm. Die Ausführung des Programms dauert ca. 25 Minuten.

Die simulierten Werte sollen in die Tabellenkalkulation übertragen werden. Wähle dazu: *Datei – Import*.

Bilde die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Werte der Anzahlen der „6“.

Formuliere deine Beobachtung

Bilde den Mittelwert der Quotienten und vergleiche ihn mit $1\frac{1}{6}$. Begründe, warum dieser Vergleich sinnvoll ist.

Stelle die ersten beiden Spalten grafisch dar (Markiere dazu die beiden Spalten und wähle .) und beschreibe den Graphen.

Man nennt das oben simulierte Wachstum exponentiell.

Gib Eigenschaften des exponentiellen Wachstums an.

Arbeitsblatt 23: der Logarithmus

Hinweis: Mit Hilfe des Parametertyps lassen sich leicht die Graphen von Umkehrfunktionen darstellen.

Wähle z.B. : $x_t = t \; und \; y_t = \; t^2 \quad und \;\; x_t = t^2 \; und \; y_t = \; t$

Gib die Funktion an, deren Graphen für den zweiten Fall gezeichnet wurde.

Wähle: $x_t = t \, und \; y_t = \; 2^t \quad und \; x_t = \; 2^t \, und \; y_t = t$

Beschreibe jeweils die Graphen und Begründe, dass die Gerade y=x die Spiegelachse ist.

Wähle die Tabellenkalkulation

Gib in die Spalte A die Zahlen 1, 2, 3, … , 10 ein und in die Spalte B deren Quadratzahlen.

Gib in Spalte C die Logarithmen (Die Basis ist egal; du kannst z.B. 2 als Basis wählen.) der Werte aus Spalte A und in Spalte D die Logarithmen der Werte der Spalte B ein.

Markiere die Spalten C und D und erstelle einen Graphen.

Probiere das mit einer anderen Potenz aus.

Begründe, dass die Punkte immer auf einer Geraden liegen.

Arbeitsblatt 24: Trigonometrische Funktionen
Zeichne eine Strecke, deren einer Endpunkt der Koordinatenursprung (Punkt A) ist. Der zweite Endpunkt sei D.

Lege auf diese Strecke den Punkt C und trage im Punkt C eine zur Strecke senkrechte Gerade an.

Lege auf die x-Achse eine weitere Strecke.

Setze den Punkt den Punkt B auf den Schnittpunkt der Geraden durch C und der Strecke auf der x-Achse.

Die Punkte ABC bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

Miss den Winkel bei A und die Strecken AB und BC.

Bilde den Quotienten der Länge von BC und der Länge von AB.

Bilde den Quotienten der Länge von AC und der Länge von AB.

Variiere den Punkt C.

Variiere den Punkt D.

Beschreibe deine Beobachtungen.

Da ein Zusammenhang zwischen dem Winkel und den Quotienten besteht, sind die Quotienten ein Maß für den Winkel; daher definiert man: $sin(\propto) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$ $und \cos(\propto) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$

Bestimme: sin(ß) und cos(ß)

Fertige eine neue Konstruktion an.

Lege eine Gerade auf die x-Achse und konstruiere einen Viertelkreis mit dem Koordinatenursprung A als Mittelpunkt, der im ersten Quadranten liegt.

Setze auf den Viertelkreis einen Punkt C.

Fälle vom Punkt C das Lot auf die x-Achse und setze einen Punkt B auf den Schnittpunkt des Lotes mit der x-Achse bzw. der Geraden, die auf der x-Achse liegt.

Erstelle eine Animation, indem du den Punkt C und den Viertelkreis markierst.

Miss den Winkel bei A und wähle die Tabellenfunktion im Messfenster.

Miss die Strecke BC und wähle die Tabellenfunktion im Messfenster.

Übertrage die Werte für den Winkel und die Strecke in das Modul Tabellenkalkulation.

Zeichne den Graphen Streckenlänge in Abhängigkeit des Winkels.

Begründe, dass du den Graphen von sin(α) gezeichnet hast.

Verfahre entsprechend mit der Seite AB.

Begründe, dass du den Graphen von cos(α) gezeichnet hast.

Stelle Vermutungen an, wie die Graphen der sin- und cos-Funktion für $90° < \alpha < 180°$ weiter verlaufen könnten.

Neben dem Gradmaß für Winkel gibt es noch das Bogenmaß. Den ClassPad kann man entsprechend einstellen. Im Bereich *main* findest du ganz unten rechts die Einstellung *360° / 400 / 2π*.

360°: Winkelmaß in Grad

400: Winkelmaß in Neugrad, wobei 90° 100 Neugrad entspricht. (Bei uns überhaupt nicht gebräuchlich.)

2π: Winkel in Bogenmaß, wobei 360° 2π entspricht. (Das Bogenmaß gibt die zu einem Winkel gehörende Länge eines Bogens bezogen auf den Einheitskreis ($r = 1$) an.)

Arbeitsblatt 25: Trigonometrische Funktionen Erweiterung des Definitionsbereiches

Stelle Vermutungen an, wie die Graphen der sin- und cos-Funktion für 90° < α < 180° weiter verlaufen könnten.

Neben dem Gradmaß für Winkel gibt es noch das Bogenmaß. Den ClassPad kann man entsprechend einstellen. Im Bereich *main* findest du ganz unten rechts die Einstellung *360° / 400 / 2π*.

360°: Winkelmaß in Grad

400: Winkelmaß in Neugrad, wobei 90° 100 Neugrad entspricht. (Bei uns überhaupt nicht gebräuchlich.)

2π: Winkel in Bogenmaß, wobei 360° 2π entspricht. (Das Bogenmaß gibt die zu einem Winkel gehörende Länge eines Bogens bezogen auf den Einheitskreis (r = 1) an.)

Im Folgenden sollen die Winkelgrößen im Bogenmaß angegeben werden. Für den Geometriebereich muss das im Geometrieformat nochmal extra eingestellt werden.

(→  → *Geometrieformat* → *Winkelanzeige* → *Bogenmaß*)

Konstruiere einen Einheitskreis mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

Lege auf den Kreis einen Punkt C.

Verbinde den Punkt C mit dem Koordinatenursprung und lege eine Strecke auf die x-Achse.

Markiere den Punkt C und den Kreis und füge eine Animation hinzu, die einmal ablaufen soll.

Miss den Winkel zwischen den beiden Strecken und wähle im Messfenster die Tabellenfunktion.

Markiere die Strecke auf der x-Achse und den Punkt C, miss den Abstand zwischen dem Punkt und der Strecke und wähle im Messfenster die Tabellenfunktion.

Markiere beide Spalten der Tabelle und ziehe sie mit dem Stift in das Zeichenfenster. Eventuell musst du den Maßstab verändern (Befehle dafür findet man unter *Ansicht*.).

Vergleiche den Graphen mit deiner Vermutung für die sin-Funktion.

Führe entsprechendes für die cos-Funktion durch.

Hinweis: Im Bereich Geometrie gibt der ClassPad nur Winkelgrößen $0° \leq \alpha \leq 180°\ bzw.\ 0 \leq \alpha \leq \pi$ an.

Arbeitsblatt 26: Trigonometrische Funktionen Erweiterung des Definitionsbereiches über π hinaus.

Gehe in das Modul Grafik & Tabelle.

Gib die Funktion a·sin(b·x-c) ein und wähle .

Variiere die Variablen a, b und c und beschreibe deine Beobachtungen.

Verfahre entsprechend mit der Funktion a·cos(b·x-c)

Finde einen Zusammenhang zwischen der sin- und der cos-Funktion.

Ändere den Typ auf Parametertyp und gib ein: $x_t = \cos(t)\ und\ y_t = \sin(t)$

Begründe, dass sich als Kurve ein Kreis ergibt.

21. Literatur

Haftendorn, D. (2016): Mathematik sehen und verstehen, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg

Ludwicki, W., Weitendorf, J. (2014): Programmieren mit dem ClassPad II, Casio

Ruppert, M, Wörler, J. (2013): Technologien im Mathematikunterricht, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg

Weigand, H.-G., Weth, T. (2002): Computer im Mathematikunterricht, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg Berlin