Der `ClassPad` im Mathematik- und Physikunterricht

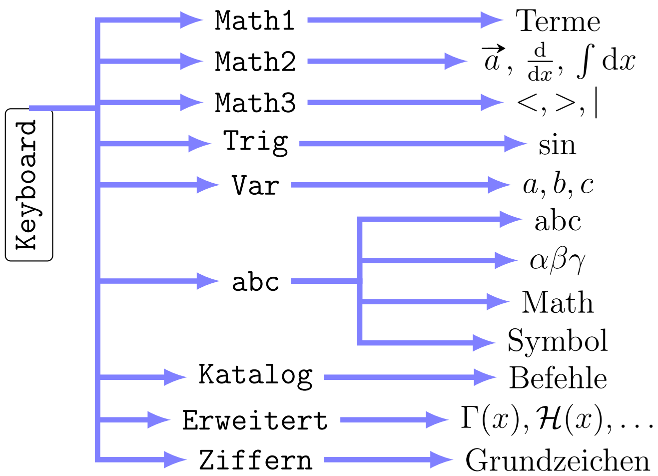
A. K. Mieth

21. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Bedienung

Die Bedienung des `ClassPad` erfolgt im wesentlichen über den berührungsempfindlichen Bildschirm (touchscreen). Die Benutzerführung entspricht der menügeführter Programme am PC (Menüleiste, Iconleiste, Arbeitsbereich mit Seitenlaufleiste, Statuszeile). Um auf die Vielzahl an Funktionen, Befehlen, Systemvariablen etc. halbwegs übersichtlich zugreifen zu können, steht neben der festen Tastatur und den programmspezifischen Menüs und Icons eine Bildschirmtastatur (`Keyboard`) mit mehreren Registern zur Verfügung.

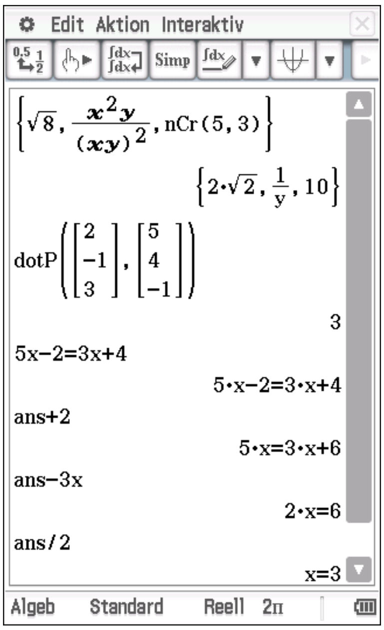


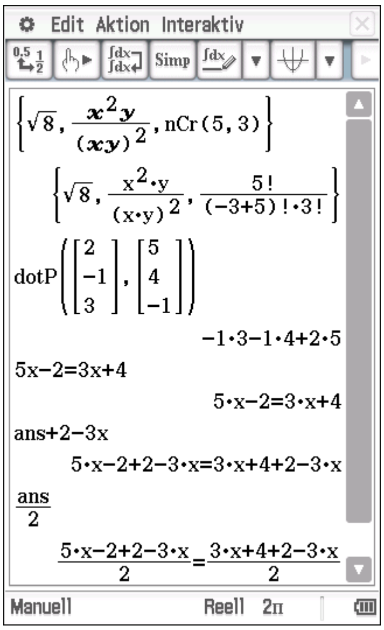
1.1 Keyboard

Kennt man die Syntax eines Befehls, z.B. `solve` $(x^3 + 2 \cdot x^2 = x + 2)$, kann man ihn Zeichen für Zeichen (`keyboard` $\rightarrow$ `abc`) eingeben oder Befehle aus den Menüs oder dem `Katalog` benutzen. Für die Eingabe von Termen ist die `Math1(2/3)`-Tatstatur zu empfehlen; das erhöht die Übersichtlichkeit und beugt Eingabefehlern vor.

1.2 Tipps & Tricks

- Die wichtigsten aktuellen Einstellungen sind in der Statusleiste  am unteren Rand des Bildschirms zu sehen und können dort auch (per Antippen) verändert werden:





`Algeb (Manuell)` Einfache Berechnungen und Umformungen nimmt das CAS ohne Befehl vor. `Manuell` unterdrückt diesen Automatismus. Das hat m.E. didaktischen Wert: Rechenwege werden kleinschrittiger und man kann (zumindest teilweise) „hinter die Kulissen“ des CAS sehen. Setzt man den `ClassPad` als Rechenknecht ein, ist `Algeb` die sinnvolle Einstellung.

`Standard (Dezimal)` Diese Einstellung bezieht sich auf das Ausgabeformat, in dem entweder exakte Terme (z.B. $\sqrt{2}$ oder $\sin(10)$) angezeigt werden oder Dezimalzahlen. Ähnliches gilt für Terme und Gleichungen. Bei innermathematischen Fragestellungen wird man deshalb `Standard` bevorzugen, in Anwendungen eher `Dezimal`.

`Reell (Kplx)` Die verwendete(n) Variable(n) werden dem entsprechenden Zahlenbereich ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) zugeordnet. Entsprechendes gilt für Lösungen von Gleichungen, Integrale etc. In der Schule wird deshalb fast immer `Reell` verwendet.

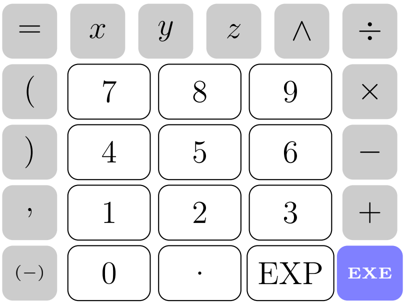
360° (400) (2π) Da die Einheit Neugrad in der Schule keine Rolle spielt, entscheidet man sich hier situationsabhängig zwischen der Winkelein- und ausgabe in Grad (Geometrie, Optik) bzw. Radiant (trigonometrische Funktionen). Gibt man Winkel (mithilfe ° bzw. r) im „anderen“ Winkelmaß ein, dann wandelt der `ClassPad` diese ohne Befehl entsprechend um.

- Sämtliche Anwendungen des `ClassPad` lassen sich vom `Main` (temporär) oder einer `eActivity` (permanent) aus aufrufen. Durch den geteilten Bildschirm kann man Daten per drag & drop austauschen.

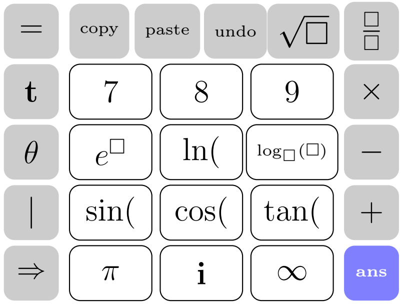
- Zum **Zoom**en in den grafischen Darstellungen (Funktionsgraph, Geometrie, Tabellenkalkulation, Statistik) kann man die (Hardware) Tasten $\boxed{+}$ und $\boxed{-}$ benutzen.

- Zur schnelleren Eingabe von Termen gibt es eine Zweitbelegung der Tastatur. Diese erreicht man über die `Shift`-Taste (wie beim Ausschalten). Ob man die Taste bereits gedrückt hat, erkennt man in der Statuszeile neben dem Batteriesymbol. In den Systemeinstellungen kann man die Zweitbelegung „nachlesen“ und ändern bzw. neue hinzufügen.

Erstbelegung

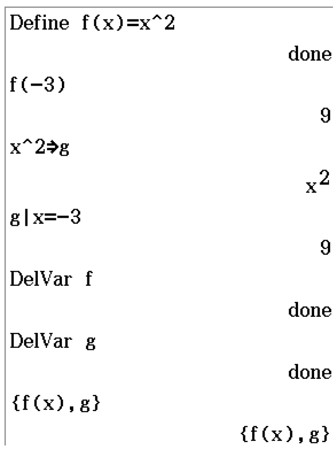


originale Zweitbelegung



Taste	Vorschlag
=	`solve`(ans,x)
7	
8	
9	nCr(
×	!
+	$\int_\square^\square \square \, d\square$
−	$\frac{d}{d\square}(\square)$

- Das Abspeichern von Daten (Zahlen, Terme, Listen Vektoren, ...) durch die Zuweisung → oder `Define` sollte mit Bedacht erfolgen. Die Ergebnisse des CAS verändern sich (oder es erscheinen Fehlermeldungen), wenn die eigentlich freien Variablen belegt sind. In diesem Fall hilft der Blick in den `Variablenmanager` und ggf. das Löschen der betreffenden Variable(n). Eine Alternative zum Speichern eines Terms (nicht zur Definition einer Funktion) ist $g := x^2$.



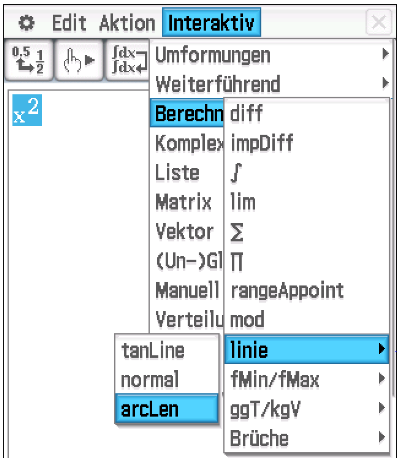
- Bestimmte Variablen (z.B. `xmax` als rechte Intervallgrenze im Funktionsplotter oder `list1` als die entsprechende Liste in `Statistik`) werden vom System benutzt. Diese sind folglich nicht frei. Allerdings sind das mehrstellige „Wörter“, die man normalerweise nicht als Variablen oder Funktionsnamen benutzt. Im Zweifelsfall kann man im `keyboard` → `Katalog` den Wunschnamen nachschlagen.

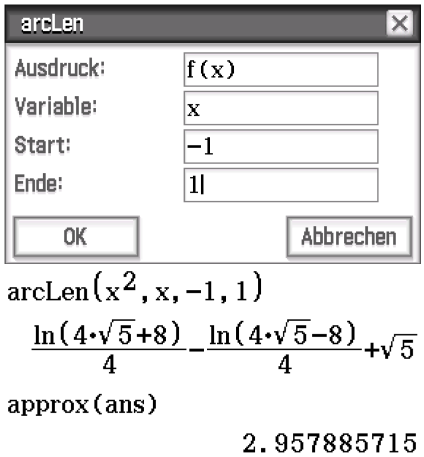
  A. K. Mieth

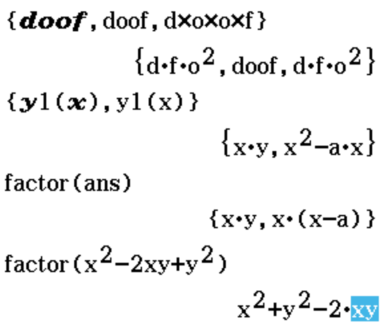
2 Hauptanwendung Main

2.1 Grundlegendes

Neben „normalen“ Berechnungen kann man (durch das **C**omputer-**A**lgebra-**S**ystem - **CAS**) auch Terme manipulieren (umformen, ableiten, verknüpfen, ...) und Gleichungen lösen (lassen). Letzteres erledigt der `solve`-Befehl (mittlerweile auch für Vektorgleichungen) bzw. der Gleichungssystem-Löser. Auf das Ergebnis der vorherigen Rechnung kann man mit dem Antwortspeicher `ans` zugreifen. Wählt man zur Befehlseingabe `Interaktiv` (ggf. nach Markierung der Eingabe) werden die Variablen abgefragt und kurz erläutert. Insbesondere bei Befehlen mit mehreren Parametern hilft der Eingabedialog, den man beim Aufruf über `Interaktiv` erhält, diese in der richtigen Anzahl und Reihenfolge einzugeben.





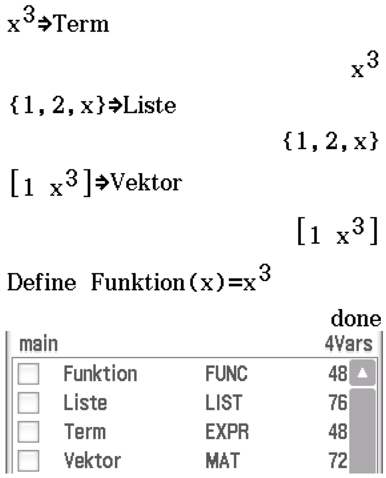


Bei der Eingabe von Termen mit mehreren Variablen kann es zu Verwechslungen zwischen z.B. $a \cdot b$ und ab kommen. Benutzt man die `abc`-Tastatur, dann werden hintereinander geschriebene Buchstaben (und ggf. Zahlen) als ein Bezeichner („Wort“) interpretiert. Bei der Verwendung der `Var`-Tastatur hingegen gilt auch ohne $\times$ (bzw. $\cdot$) jeder Buchstabe als eine Variable und das „Wort“ als Produkt. Wenn man z.B. auf die Funktion `y1` der `Grafik & Tabelle`-Anwendung zugreifen möchte, dann **muss** man dies mit der `abc`-Tastatur eingeben, ansonsten interpretiert das CAS die Eingabe als $y \cdot 1 \cdot (x)$. Will man hingegen das Produkt zweier (oder mehrerer) Variablen eingeben, dann sollte man die Tasten $\boxed{x}$, $\boxed{y}$, $\boxed{z}$ bzw. die `Var`-Tastatur benutztenoder entsprechend Multiplikationszeichen setzen.

2.2 Datentypen

Auch wenn der Datentyp zunächst keine große Rolle im Mathematikunterricht spielen muss, ist es (zumindest für den Lehrer) hilfreich, über die verschiedenen Möglichkeiten Bescheid zu wissen. Manche elegante Möglichkeit ergibt sich bei komplizierten Berechnungen und viele Fehler lassen sich vermeiden bzw. leicht beheben.

Einfache Daten sind Zahlen, Variablen und Terme. Sie können in **Listen** (geschweifte Klammern, eindimensionales Feld) und **Matrizen** (eckige Klammern, zweidimensionales Feld) als Element verwendet werden. **Vektoren** sind im `ClassPad` eigentlich Matrizen (wegen der rechnerischen Verknüpfung) mit nur einer Spalte bzw. Zeile.



Funktionen können am `ClassPad` beliebige Datentypen zu einem Ergebnis (Zahl, Term, Vektor, ...) verknüpfen. Die „klassische“ Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist meistens ein Term, allerdings mit der „eingebauten“ Möglichkeit der Termwertberechnung wie $f(2) = f(x)|_{x=2}$

2.3 Terme

Die Eingabe von Termen ist bei Verwendung des `Keyboard` wegen der unproblematisch. Für die **Termwertberechnung** bietet der `ClassPad` mehrere Möglichkeiten:

Substitution Mit dem $\boxed{|}$-Operator kann man in einem Term T die Variable v durch eine Zahl z ersetzen lassen: $T|\,v = z$. Statt der Zahl kann man bei Bedarf die Variable auch durch eine andere Variable oder einen Term ersetzen. Diese Herangehensweise ist am Anfang des CAS-Einsatzes sehr zu empfehlen, da sie effizient und fehlerunanfällig ist.

Funktionswert Definiert man den Term als Funktionsterm $f(x)$, dann kann man zur Termwertberechnung auf die Syntax $f(z)$ zurückgreifen.

Folge Der `seq`-Befehl verwendet den Term T und ersetzt in ihm die Variable v durch Werte von a bis $\leq b$ in h-Schritten: `seq`(T, v, a, b, h)

Speichern Eine weitere (aber unelegante und ggf. gefährliche) Möglichkeit bietet das **Speichern** eines Wertes auf einer Variablen. Überschreibt man zuerst die Variable mit einem Wert, dann erhält man bei der Eingabe des Terms sofort den Termwert. Danach sollte man aber baldmöglichst die Variable wieder freigeben („löschen“), denn diese Überschreibung bleibt bestehen, auch wenn z.B. die Anzeige gelöscht wurde. Solche Überschreibungen können auch versteckt auftreten, z.B. wenn Programme ausgeführt werden die mit nicht-lokal definierten Variablen arbeiten. Abhilfe schafft im Zweifelsfall der Blick in den `Variablenmanager`.

$(2x+3)^2-3x^2\,|\,x=-5$

$$-26$$

Define $f(x)=(2x+3)^2-3x^2$

done

$f(-5)$

$$-26$$

seq$\left((2\cdot x+3)^2-3\cdot x^2, x, -5, 0, 1\right)$

$$\{-26,-23,-18,-11,-2,9\}$$

$-5\Rightarrow x$

$$-5$$

$(2x+3)^2-3x^2$

$$-26$$

DelVar x

done

$AO=\pi\times r\times(r+h)\,|\,\{r=2, h=5\}$

$$AO=14\cdot\pi$$

solve$\left(5=\pi\times r^2\times h, h\right)$

$$\left\{h=\frac{5}{r^2\cdot\pi}\right\}$$

$\pi\times r\times(r+h)\,|\,$ans

$$r\cdot\left(r+\frac{5}{r^2\cdot\pi}\right)\cdot\pi$$

Define liFu$(x)=m\cdot x+n$

done

$\begin{cases}5=\text{liFu}(2)\\-1=\text{liFu}(4)\end{cases}\Bigg|\,m, n$

$$\{m=-3, n=11\}$$

$y=\text{liFu}(x)\,|\,$ans

$$y=-3\cdot x+11$$

Terme mit einfacher Struktur (Summe gleichartiger Terme, reine Produkte, Quotienten aus Produkten) werden vom CAS ohne Befehl zusammengefasst. Ebenfalls automatisch erfolgt die Primfaktorzerlegung von Zahlen in Quotienten, Wurzeln (Potenzen) und Logarithmen sowie die Anwendung entsprechender Gesetze zur Vereinfachung von Termen. Deshalb werden Wurzelausdrücke ggf. partiell radiziert. Möchte man diesen Automatismus unterdrücken, stellt man in der Statuszeile von `Algeb` auf `Manuell` um.

expand$\left((2\times x-3\times y)^2\right)$

$$4\cdot x^2+9\cdot y^2-12\cdot x\cdot y$$

expand$\left(\frac{x^3+4\cdot x^2+1}{x^2-1}, x\right)$

$$x-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}+4$$

propFrac$\left(\frac{x^3+4\cdot x^2+1}{x^2-1}\right)$

$$x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{5}{x^2-1}+4$$

factor(29484000)

$$2^5\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13$$

factor$\left(x^2-\{1,2\}\right)$

$$\{(x+1)\cdot(x-1), x^2-2\}$$

rFactor(x^2-2)

$$(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$$

factorOut$\left(4\cdot x^2-2\cdot x\cdot y+6, x^2\right)$

$$x^2\cdot\left(\frac{-2\cdot y}{x}+\frac{6}{x^2}+4\right)$$

collect$\left(a\cdot(x+1)^2+a^2\cdot x^2+1, x\right)$

$$\left(a^2+a\right)\cdot x^2+2\cdot a\cdot x+a+1$$

collect$\left(a\cdot(x+1)^2+a^2\cdot x^2+1, a\right)$

$$a^2\cdot x^2+a\cdot\left(x^2+2\cdot x+1\right)+1$$

$\left\{\frac{2}{x}+x, 2\times\log_3(5)+1\right\}$

$$\left\{x+\frac{2}{x}, \frac{2\cdot\ln(5)}{\ln(3)}+1\right\}$$

combine(ans)

$$\left\{\frac{x^2+2}{x}, \frac{\ln(75)}{\ln(3)}\right\}$$

Bei den **Termumformungen** geht es in der 8.Klasse vor allem um die Termstrukturen Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Potenz (insbesondere Quadrat) und deren Umwandlung (wenn möglich) ineinander.

Ziel	Syntax	Besonderheit	Klasse
Summe	`expand`(T)	Sortierung nach Alphabet und Exponent	8
	`expand`(T, x)	Partialbruchzerlegung eines Quotienten T	LK11
	`propFrac`(T)	Polynomdivision	LK11
Produkt	`factor`(T)	Primfaktorzerlegung, Kürzen eines Quotienten	8
	`rFactor`(T)	auch irrationale Koeffizienten	9
	`factorOut`(T_1, T_2)	einer der Faktoren ist $\pm T_2$	(8) 11
Quotient	`combine`(T)	auch Logarithmen	(8) 10
Polynom	`collect`(T, x)	Koeffizientensammeln	11
„einfach“	`simplify`(T)		

Für Exponential- und (hyperbolische) Winkelfunktionen bietet der `ClassPad` spezielle Umformungen. Diese formen jeweils zwischen zwei Standardformen um. Enthält eine Winkelfunktion einen linearen Ausdruck des Winkels, dann entwickelt `tExpand` daraus einen Term, der nur „reine“ Winkelfunktionsausdrücke enthält. Die Befehle `expToTrig` und `trigToExp` wandeln zwischen der Darstellung eines Terms mit der e-Funktion und der mit (hyperbolischen) Winkelfunktionen um. Schließlich gibt es noch die **d**egree-**m**inute-**s**econd-Befehle: Sie sind dazu da, Winkelangaben zwischen der Dezimaldarstellung und der „klassischen“ Schreibweise in (Alt)Grad, (Bogen)Minute und (Bogen)Sekunde umzuwandeln. Interessant ist das auch für die Umwandlung von Zeitangaben aus einem rechnerisch ermittelten Dezimalwert in eine Uhrzeitangabe mit Stunden, Minuten und Sekunden.

```
tExpand(cos(2x))
                (cos(x))^2-(sin(x))^2
tCollect(2×cos(x)×sin(x))
                             sin(2•x)
expToTrig(e^x)
                      cosh(x)+sinh(x)
trigToExp(2×cosh(x))
                            e^x+e^-x
12°15'30"
                          12.25833333
dms(12,15,30)
                          12.25833333
toDMS(2.67)
                              2°40'12"
```

2.4 Gleichungen

Skalare Gleichungen können am `ClassPad` schrittweise gelöst werden. Die dazu nötigen (sowohl Term- als auch Gleichungs-) Umformungen gibt man für die gesamte Gleichung an, der `ClassPad` wendet sie auf jeder Seite an. Das bietet eine Möglichkeit, eigene Gleichungsumformungsschritte zu überprüfen. Auch die Probe der erhaltenen Lösung kann man mit dem $\boxed{|}$-Operator durchführen.

```
5•x-3=2•(x+1)
                    5•x-3=2•(x+1)
expand(ans)
                      5•x-3=2•x+2
ans+3
                        5•x=2•x+5
ans-2x
                            3•x=5
ans/3
                            x=5/3
5•x-3=2•(x+1)|x=5/3
                        16/3=16/3
```

```
x+y=5
                            x+y=5
ans-x
                           y=-x+5
3x-y=2y+3|ans
                4•x-5=-2•(x-5)+3
expand(ans)
                  4•x-5=-2•x+13
ans+5+2x
                           6•x=18
ans/6
                              x=3
y=-x+5|ans
                              y=2
```

Mit dem `solve`-Befehl kann man den Lösungsweg dem `ClassPad` überlassen. Er ist wahrscheinlich der am häufigsten verwendete Befehl des CAS. Tatsächlich verbergen sich hinter diesem mehrere Anwendungsszenarien. Im einfachsten Fall ermittelt er (wenn vorhanden und für das CAS möglich) alle Lösungen einer skalaren Gleichung exakt (z.B. bei quadratischen oder goniometrischen Gleichungen). Falls das nicht exakt möglich ist, weicht der Algorithmus zunächst auf numerische Verfahren aus. Das erkennt man an der Warnung „Weitere Lösungen können existieren“. Wenn der `ClassPad` die Gleichung gar nicht lösen kann, gibt er sie als Antwort zurück. Wohingegen im Falle der (erkannten) Unlösbarkeit die Antwort `no solution` erscheint. Der numerische Lösungsweg lässt sich auch von vornherein erzwingen, in dem man nach der Variablen 1 oder 3 weitere Parameter angibt: Die letzten beiden legen das Intervall fest, innerhalb dessen nach Werten der Variablen gesucht wird, die die Gleichung erfüllen. Der Wert, der der Variablen unmittelbar folgt, ist ein Startwert für den numerischen Algorithmus.

```
solve(a^2=6·a−2,a)
                        {a=−√7+3,a=√7+3}
solve(sin(0.5×x)=1)
                        {x=4·π·constn(1)+π}
solve(cos(x)=x,x)
                        {x=0.7390851332}
solve(sin(α)/sin(45)=1.4,α)
{α=−sin⁻¹(7·√2/10)+360·constn(
solve(sin(α)/sin(45)=1.4,α,0,0,90)
                        {α=81.86989765}
solve(sin(α)/sin(45)=1.5,α)
                        No Solution
```

In den meisten (schulischen) Fällen muss man sich über diesen kaum Gedanken machen und kann die 0 stehen lassen. Das kann nützlich sein, wenn die exakte Lösung zu aufwändig bzw. langwierig ist oder der numerische Wert innerhalb eines Intervalls gesucht ist, z.B. bei Berechnungen am Dreieck oder mit dem Brechungsgesetz.

Letztlich hat man ggf. zwei Vorteile: numerische Lösungen findet der `ClassPad` i.d.R. schneller als mit der exakten Suche und (bei Eingabe von unterer und oberer Intervallgrenze) man erhält nur die „interessanten“ Lösungen.

```
sin(α°)/2=sin(30°)/√2⇒Gl
                        sin(α)/2=√2/4
solve(Gl,α)
        {α=360·constn(1)+45,α=360·constn(2)+135}
rangeAppoint(ans,−270,180)
                        {α=−225,α=45,α=135}
solve(Gl,α)|−270≤α≤180
                        {α=−225,α=45,α=135}
solve(Gl,α,0,−270,180)
                        {α=−225,α=45,α=135}
solve(cos(x)=0.2·x,x,2)
                        {x=1.306440008}
solve(cos(x)=0.2·x,x,0)
 {x=−3.837467106,x=−1.977383029,x=1.306440008}
```

Der `solve`-Befehl kann auch zum Lösen einer Vektorgleichung benutzt werden (auch wenn die Eingabe einer Vektorgleichung ohne `solve`-Befehl vom CAS nicht akzeptiert wird). Möchte man mehrere (skalare) Gleichungen (also ein Gleichungssystem) bzw. Variablen (z.B. bei der Vektorgleichung) nutzen, dann kann man diese in Listen ($\{T_1 = T_2, T_3 = T_4, \ldots\}$ bzw. $\{r, s, \ldots\}$) zusammenfassen. Für die Lösung eines Gleichungssystems kann (und sollte) man den

```
solve(e^x=ln(x),x)
                        {e^x−ln(x)=0}
{t×[[−1],[1]],[[1],[5]]+s×[[2],[1]]}⇒{g1,g2}
                        {[[−t],[t]],[[2·s+1],[s+5]]}
solve(g1=g2,t)
                        {t=3}
solve(g1=g2,{t,s})
                        {t=3,s=−2}
g1[1,1]=g2[1,1]
                        −t=2·s+1
solve({−t=2·s+1,t=s+5},{t,s})
                        {t=3,s=−2}
```

```
{−t=2·s+1
{t=s+5      |t,s
                        {t=3,s=−2}
{y=2x
{y=x^2−3    |x,y
            {{x=−1,y=−2},{x=3,y=6}}
{y=2x+n
{y=x^2−3    |x,y
{{x=−√(n+4)+1,y=n−2·√(n+4)+2
{y=6·x+13
{y=4x^−2    |x,y
◀,{x=−2/3,y=9},{x=1/2,y=16}}
```

Gleichungssystemlöser aus dem `Keyboard` nutzen, weil die Eingabe einfacher und übersichtlicher erfolgt. Die Gleichungen stehen dann untereinander und es müssen keine geschweiften

 A. K. Mieth

Klammern gesetzt werden. Dabei ist es an keiner Stelle erforderlich, die Gleichungen in eine bestimmte Form zu bringen oder Standardvariablen zu benutzen. Tatsächlich kann das CAS auch mit nichtlinearen Gleichung(ssystem)en umgehen, zumindest bis zu einem gewissen Grad. Auch Ungleichungen löst das CAS zuverlässig. Allerdings stellen Parameter i.A. ein Problem dar: deren Vorzeichen und Betrag kann die Lösungsmenge entscheidend verändern, so dass dann die Ungleichung unausgewertet zurückgegeben wird.

```
solve(2·x−1<3,x)
                                {x<2}
solve(|x−1|≥2,x)
                          {x≤−1,3≤x}
solve(x−4≤5/x,x)
                        {x≤−1,0<x≤5}
solve(sin(30·x)>0.5,x)
 {12·constn(1)+1<x<12·constn(1)+5}
```

2.5 spezielle Untersuchungen

Analysiert man den Lehrplan hinsichtlich seiner konkreten mathematischen Inhalte und vergleicht diese mit den Fähigkeiten eines CAS, dann findet man große Überschneidungen. Tatsächlich beherrscht der `ClassPad` vieles davon ohne Zusätze (Programme, eActivities oder Funktionen). Teilweise entspricht die Syntax sogar den Anforderungen an Dokumentation von Lösungswegen, z.B. beim bestimmten Integral. Bei einigen Operationen (z.B. dem Skalarprodukt) bedarf es nur einer 1:1-Übersetzung. Komplexere Befehle hingegen (z.B. `arcLen` oder `binomialCDf`) erfordern eine umfangreichere Übertragung.

Analysis

Um den Term der **Umkehrfunktion** f^{-1} einer Funktion f zu ermitteln, kann man in der Gleichung $y = f(x)$ die Variablen vertauschen (`Interaktiv` → `Manuell` → `invert`) und die so entstandene Gleichung nach y umstellen (lassen), wobei man ggf. mehrere (Teil-)Umkehrfunktionen erhält.

Grenzwerte fasst der `ClassPad` grundsätzlich als Grenzwerte von Funktionen auf. Meist ist dieser Umstand ohne Belang, aber Folgen können konvergieren, obwohl die zugehörige Funktion es nicht tut. Hier kann man erkennen, dass der Rechner nicht versteht, was er tut, sondern nur Algorithmen abarbeitet.

```
y=2^x
                         y=2^x
invert(ans,x,y)
                         x=2^y
solve(ans,y)
                  {y=ln(x)/ln(2)}
Define UKF(Gl,x)=solve(inver▶
                          done
UKF(y=0.2x−3,x)
                    {y=5·x+15}
UKF(y=x^2,x)
                {y=−√x,y=√x}
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left\{\frac{1}{x}, e^{-x}, \tan^{-1}(x)\right\}\right)$$

$$\left\{0, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left\{\frac{1}{x}, e^{-x}, \tan^{-1}(x)\right\}\right)$$

$$\left\{0, \infty, \frac{-\pi}{2}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$e$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sin(\pi\cdot\mathrm{int}(n)))$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sin(\mathrm{int}(n)\cdot\pi))$$

$$\left\{H(0), \lim_{x\to 0}(H(x))\right\}$$

$$\{0.5, \mathrm{Undefined}\}$$

$$\left\{\lim_{x\to 0+}(H(x)), \lim_{x\to 0-}(H(x))\right\}$$

$$\{1, 0\}$$

Define $f(x)=e^{-e^{1/x}}$

done

$$\left\{\lim_{x\to 0+}(f(x)), \lim_{x\to 0-}(f(x))\right\}$$

$$\{0, 1\}$$

$$\lim_{x\to a}(2a\times x-x^2)$$

$$a^2$$

Berechnet man den Grenzwert an einer Stelle, dann kann es u.U. nötig sein, die „Blickrichtung“ vorzugeben. Das erreicht man durch die Angabe eines − („von links“) bzw. + (von rechts) hinter der Stelle. Damit kann z.B. auch ein Vorzeichenwechsel an einer Polstelle untersucht werden.
Der Befehl `fMax` (`fMin`) liefert das globale Maximum (Minimum) einer Funktion (ggf. auf einem Intervall). Befindet sich am Rand des Intervalls eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, sollte man zusätzlich zur Intervallgrenze den Funktionsterm auf das Intervall einschränken. In solchen Fällen nutzt der `ClassPad` zwar Grenzwerte, schränkt diese aber nicht ausreichend ein.
Im Menüunterpunkt `Interaktiv` → `Berechnungen` → `linie` finden sich die Befehle `tanline`, `normal` und `arcLen`. Die ersten beiden liefern den Term der Tangente bzw. Normale an den Graphen einer Funktion an einer (evtl. variablen) Stelle. `arcLen` berechnet die Bogenlänge des Graphen einer Funktion auf einem Intervall. Da die zugrundeliegenden Integrale in den meisten Fällen (außer z.B. bei quadratischen Funktionen, hier ist das Ergebnis exakt) sehr aufwändig ist, weicht der Befehl auf numerische Algorithmen aus.

Define $f(x)=\{x^2, x^{-2}, 2^x\}$

done

combine(f(3+h)−f(3))

$$\left\{h^2+6\cdot h, \frac{-(h^2+6\cdot h)}{9\cdot(h+3)^2}, 2^{h+3}-8\right\}$$

factor(ans/h)

$$\left\{h+6, \frac{-(h+6)}{9\cdot(h+3)^2}, \frac{2^{h+3}-8}{h}\right\}$$

$\lim\limits_{h\to 0}(\text{ans})$

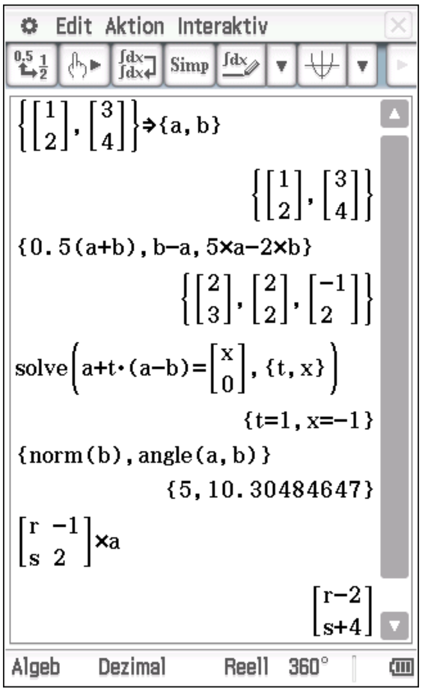
$$\left\{6, -\frac{2}{27}, 8\cdot\ln(2)\right\}$$

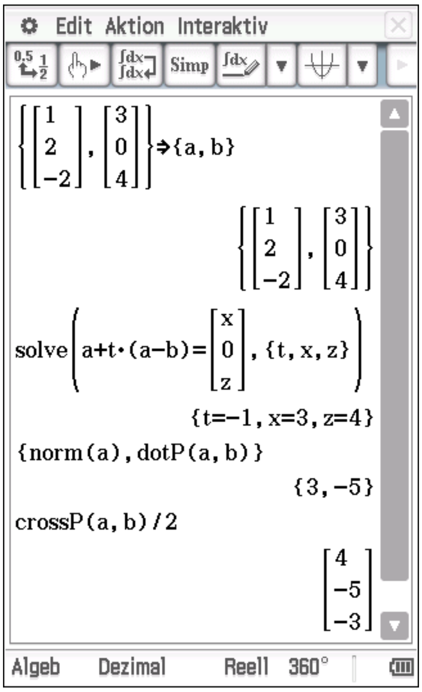
$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

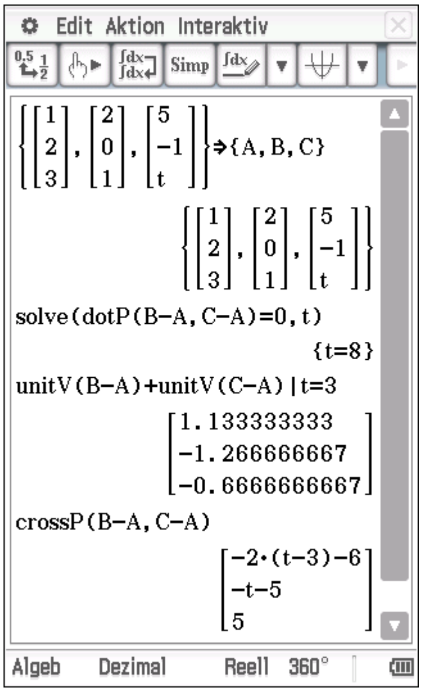
$$\left\{2\cdot x, \frac{-2}{x^3}, 2^x\cdot\ln(2)\right\}$$

$\frac{d}{dx}(f(x))$

$$\left\{2\cdot x, \frac{-2}{x^3}, 2^x\cdot\ln(2)\right\}$$







lineare Algebra & analytische Geometrie

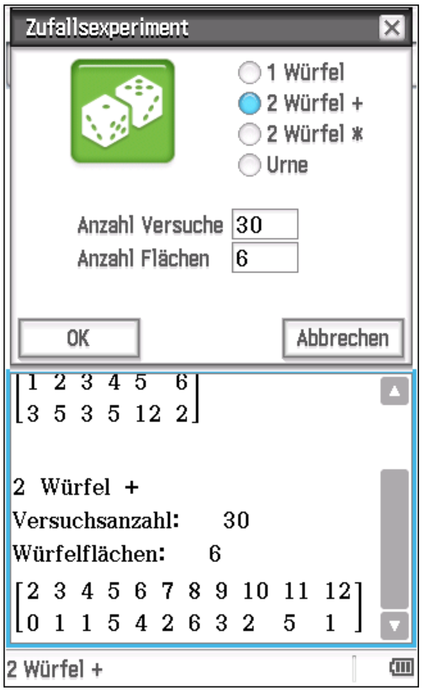
Die Eingabemaske (zunächst zweidimensional) für Vektoren und Matrizen findet man im `Math2`-Register des `keyboard`. Will man die Anzahl der Spalten (bzw. Zeilen) erhöhen, wählt man den Zeilenvektor [■□] (bzw. den Spaltenvektor [■]) erneut an. Durch mehrfaches anwählen der Matrix [▦] erhöht man die Anzahl der Zeilen und Spalten um 1. Datentechnisch handelt es sich bei beiden um einen 2-dimensionales Feld (im Gegensatz zu (eindimensionalen) Listen), weshalb man zum Ansprechen einzelner Einträge zwei Indizes verwenden muss. Im Falle eines Vektors ist der zweite immer „1“.

Linearkombinationen und Matrizenmultiplikation beherrscht der `ClassPad` ohne den Einsatz

  A. K. Mieth

besonderer Befehle. Die aus schulischer Sicht wichtigsten sind `dotP` (Skalarprodukt), `crossP` (Vektorprodukt), `norm` (Länge), `angle` (Winkel zwischen zwei Vektoren) und evtl. `unitV` (Einheitsvektor). Diese findet man unter `Interaktiv` → `Vektor`.

Die Befehle für die Matrizenmanipulation findet man „gleich darüber“: `ref` und `rref` formen eine Matrix in die Dreiecks- bzw. Diagonalform um. Möchte man die schrittweise Umformung nachvollziehen, nutzt man die Befehle aus dem Unterpunkt `Zeilen&Spalten`. Damit stehen für die Untersuchung von Lagebeziehungen das Gleichungssystem, der `solve`-Befehl oder die Matrizenrechnung zur Verfügung. Diese arbeiten auch mit Parametern.



Stochastik/Statistik

Simulation Der `ClassPad` bietet mehrere Möglichkeiten, die Durchführung von Zufallsversuchen nachzustellen und diese Versuchsreihen auszuwerten. Die Wahl der Mittel hängt u.a. von der Komplexität des Versuches, der Anzahl der Durchführungen und dem Ziel der Auswertung ab.
Von der Hauptanwendung `Main` aus lässt sich eine einfache Simulation starten. Dort bekommt man für einfache Versuche (Laplace-, Summe und Produkt zweier Laplace-Versuche und Ziehen aus einer Urne) eine Verteilung (als Matrix) geliefert. Die könnte man zwar in der Tabellenkalkulation weiter bearbeiten, aber dafür gibt es effizientere Möglichkeiten.
Um Zufallszahlen [1]zu erzeugen, kann man auf folgende Befehle zugreifen:

Befehl	liefert	Ergebnis
`rand`()	eine Zufallszahl	$a \in \mathbb{R} \quad 0 \leq a \leq 1$
`rand`(m, n)	eine Zufallszahl	$b \in \mathbb{Z} \quad m \leq b \leq n$
`randList`(l)	eine Liste von l Zufallszahlen	$c_i \in \mathbb{R} \quad 0 \leq c_i \leq 1$
`randList`(l, m, n)	eine Liste von l Zufallszahlen	$d_i \in \mathbb{Z} \quad m \leq d_i \leq n$
`randBin`(n, p)	einen Wert k aus $X \sim B_{n;p}(k)$	$k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$
`randBin`(n, p, l)	eine Liste von l Werten aus $X \sim B_{n;p}(k)$	$l \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$
`randNorm`(σ, μ)	einen Wert y aus $Y \sim N_{\mu;\sigma}(y)$	$y \in \mathbb{R}$
`randNorm`(σ, μ, l)	eine Liste von l Werten aus $Y \sim N_{\mu;\sigma}(y)$	$l \in \mathbb{N}$

Um komplexere Simulationen besser auswerten zu können, sollte man eine Funktion definieren, die die "´günstigen“ Ergebnisse auf 1 und alle anderen auf 0 abbildet. Dabei ist die Verwendung der `Heaviside`-Funktion $\mathcal{H}(x)$ bzw `heaviside`(x) zu empfehlen, da sie (nicht wie abschnittweise definierte Funktionen) auch auf Listen angewendet werden kann. Eine mögliche Definition wäre

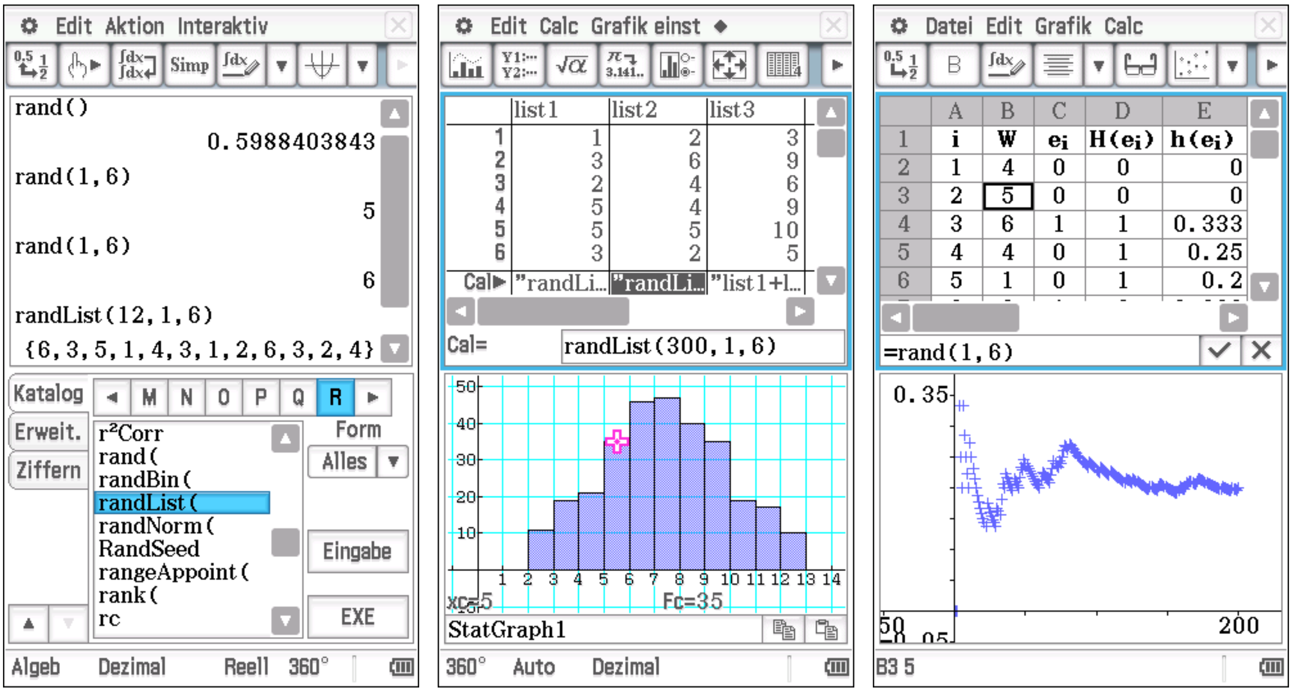
[1]Eigentlich handelt es sich hier um Pseudo-Zufallszahlen, da sie von Algorithmen erzeugt werden. Aber im schulischen Kontext spielt dieser Umstand keine entscheidende Rolle, weshalb hier die sprachlich weniger sperrige Vokabel synonym verwendet wird.

$$B(x) = 2 \times \texttt{heaviside}(-\texttt{abs}(x)) = \mathcal{H}(-|x|)$$

```
Define B(x)=2·H(-|x|)
                                 done
randList(12,1,6)
 {5,6,5,6,4,3,3,6,3,1,3,2}
B(ans-6)
 {0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0}
sum(ans)
                                    3
```

Will man Zufallszahlen auf einen (oder mehrere) Wert(e) k untersuchen, dann verwendet man $B(x-k)$ bzw. $\sum_i B(x-k_i)$. Summiert man daraufhin alle Werte einer Liste (z.B. in `Statistik`) bzw. eines Bereiches (in der `Tabellenkalkulation`), dann erhält man die absolute Häufigkeit des untersuchten Ereignisses.

Um die Häufigkeiten mehrerer (oder aller) Ergebnisse zu ermitteln, bietet sich die Darstellung als Histogramm (mit Klassenbreite 1) an. Mit dem `Verfolgen`-Befehl kann man die absoluten Häufigkeiten ablesen.

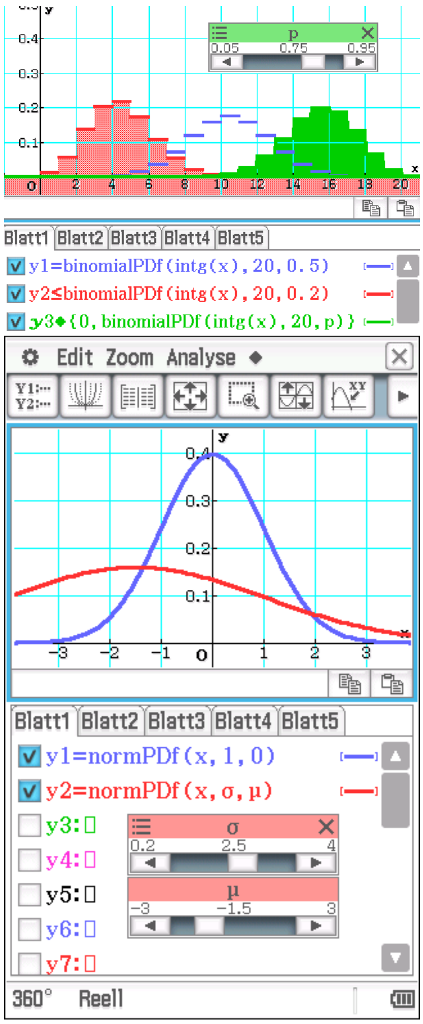


Name	Term	Urnenmodell	ClassPad	Beispiel
kombinatorische Situation		(n verschiedene Kugeln)		
Potenz Variation mit Wiederholung	n^k	k Ziehungen mit Zurücklegen mit Reihenfolge	`n^k`	Anzahl der Passwörter mit k Buchstaben aus n Zeichen
Fakultät Permutation ohne Wiederholung	$n!$	n Ziehungen ohne Zurücklegen mit Reihenfolge	`n!`	Anzahl Sitzpläne für n Schüler und n Stühle
verkürzte Fakultät Variation ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	k Ziehungen ohne Zurücklegen mit Reihenfolge	`nPr(n,k)`	Anzahl Sitzpläne für k Schüler und $n(>k)$ Stühle
Binomialkoeffizient Kombination ohne Wiederholung	$\binom{n}{k}$	k Ziehungen ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge	`nCr(n,k)`	Anzahl Gruppen mit k Schülern aus n Schülern

Kombinatorik Die elementaren Abzählterme sind auf dem `ClassPad` vordefiniert. Sie können sowohl über die `abc`-Tastatur als auch über das `Erweit.`-Register eingegeben werden. Prinzipiell ist auch die Verwendung des allgemeinen Produktes möglich, das geht aber über den schulischen

Rahmen hinaus.

Verteilungen Die auf dem `ClassPad` vordefinierten Verteilungsfunktionen benutzt man am besten über das `Interaktiv`-Menü in der Hauptanwendung `Main`, um einer Vertauschung der 3 bzw. 4 Parameter vorzubeugen. In die Befehle der Binomialverteilung können dabei beliebig große n- und kleine p-Werte eingesetzt werden. Offensichtlich weicht der Algorithmus auf die entsprechende Näherungslösung aus.
Allerdings erschwert das die direkte Verwendung als Term bzw. zur graphischen Darstellung. Hier hilft der Umweg über die Anwendung `Grafik & Tabelle` und die Nutzung einer Funktion, die $x \in \mathbb{R}$ auf die natürlichen Zahlen abbildet, z.B. `intg`(x).
Der Befehl `invBinomialCDf`(P, n, p) liefert das kleinste k, für das `binomialCDf`$(0, k, n, p) \geq P$ gilt. Um den entsprechenden Wert für eine rechtsseitige Untersuchung (z.B. im Signifikanztest) zu erhalten muss man die Schranke α übersetzen in $P = 1 - \alpha$. Wegen der Symmetrie der Normalverteilung gibt es dort drei Varianten für links-, rechts- und beidseitige Untersuchungen.



$\left\{6\times7\times8, \frac{8!}{5!}, \mathrm{nPr}(8,3)\right\}$

$\{336, 336, 336\}$

$\left\{\frac{8!}{5!\times3!}, \mathrm{nCr}(8,3), \prod_{i=0}^{2}\left(\frac{8-i}{i+1}\right)\right\}$

$\{56, 56, 56\}$

```
binomialPDf(3,20,0.2)
                0.205364143
binomialCDf(0,6,20,0.2)
                0.9133074864
invBinomialCDf(0.95,20,0.2)
                7
binomialCDf(80,90,5E9,2E-8)
                0.1538518825
```

```
normPDf(0.5,1,0)
                0.3520653268
normCDf(3,9,4.39,5.3)
                0.5001689376
invNormCDf("L",0.3,1,0)
                -0.5244005127
invNormCDf("R",0.2,1,0)
                0.8416212336
```

$\left\{\begin{array}{l}\frac{3-\mu}{\sigma}=-0.5244005127\\ \frac{9-\mu}{\sigma}=0.8416212336\end{array}\right|_{\sigma,\mu}$

$\{\sigma=4.392316606, \mu=5.30333$ ▶

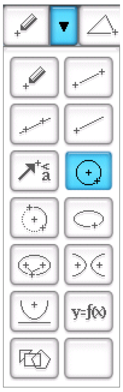
```
invNormCDf("C",0.6827,1,0)
                -1.000021713
```

3 Dynamische Geometrie

In dieser Anwendung lassen sich geometrische Objekte zeichnen, Konstruktionen ausführen und Größen messen. Dabei erlaubt es das DGS, die Konstruktion nachträglich (durch „Ziehen“) zu verändern oder (per „Animation“) verändern zu lassen.

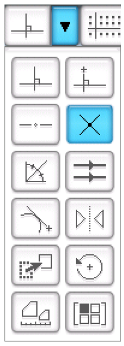
3.1 Zeichnen

Neben den einfachen Objekten (Punkt, Strecke, Gerade, Kreis) lassen sich auch Kegelschnitte, Funktionsgraph und Polygone zeichnen. Für das Erstellen (ggf. mehrerer) Objekte beachte man diese Reihenfolge:



1. Wahl des zu zeichnenden Objekts (Zeichenmodus)
2. Setzen der konstituierenden Punkte
3. Umschalten in den Zugmodus
4. Auswahl eines oder mehrerer Objektteile
5. Ziehen an die gewünschte Position
   oder Festlegen der Eigenschaft („Begrenzung“)
6. evtl. nächstes Objekt

3.2 Konstruieren



Man kann auch im DGS die klassischen Konstruktionsschritte nachvollziehen, in dem man zum Zeichnen der entsprechenden Geraden und Kreise bereits vorhandene Punkte nutzt („Einrasten“). Alternativ kann man auf „fertige“ Grundkonstruktionen (Schnitt- und Mittelpunkt, Lot, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und Parallele) oder Abbildungen (Verschiebung, Geradenspiegelung, Drehung, zentrische Streckung) zurückgreifen. Darüber hinaus finder man noch die Tangente und die „freie“ Abbildung (durch eine Abbildungsmatrix und einen Verschiebungsvektor). Dabei gelten die Reihenfolgen:

Grundkonstruktionen	**Abbildungen** (bei der Tangente entfällt 1.)
Auswahl der beteiligten Objekte	Auswahl der Originale (Objekt(teil)e)
Wahl der Konstruktion	Wahl der Abbildung
	Auswahl des konkreten Abbildungsobjektes

3.3 Hinweise für das Zeichnen und Konstruieren

- Neuzeichnen und -konstruieren ist meist schneller als eine Fehlersuche
- Beim Aufsetzen des Stiftes Statuszeile beobachten, z.B. Punktkoordinaten oder „Einrasten“
- Objekte bei Ungenauigkeiten zu Ende zeichnen, ggf. anschließend verändern
- ggf. ganzzahliges Gitter verwenden
- Schnittpunkt ist kein Automatismus, sondern eine Konstruktion
- Begrenzungen können bei metrische Größen (Koordinaten, Längen, Winkel, . . .) oder Relationen („liegt auf“, gleichschenklig (nicht nur im Dreieck)) festgelegt oder aufgehoben werden

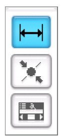
3.4 Messen

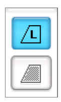
Aus einer Zeichnung bzw. Konstruktion kann man verschiedene Messwerte ermitteln. Dazu wählt man (ausschließlich) die Objekt(teil)e aus und lässt sich die gewünschte Eigenschaft anzeigen.


Punkt


Strecke


2 Strecken


Pkt. & Str.


Figur

3.5 Animation

Bei einer Animation wird ein Punkt P auf einer endlichen Linie bewegt. Dazu wird diese Linie parametrisiert und für jeden Parameterwert die Konstruktion gezeichnet. Lässt man dann die Animation ablaufen, sieht man einen stop-motion-Film.

Animationslinie	**Parameter**	**Startpunkt**	**Umlauf**
Strecke $\overline{AB}$	$0 \le t \le 1$	1. Punkt (A)	von A nach B
Kreis k	$0 \le t \le 1$	östlichster Punkt	mathematisch positiv
Graph von f auf $[a, b]$	$a \le t \le b$	$A(a\|f(a))$	positive x-Richtung

Die entsprechenden Befehle findet man im Menü unter `Edit` → `Animieren`

Erstellen Punkt und Animationslinie wählen → `Animation hinzufügen`

Ansehen Das eigentlich Spannende: → `Ablaufen`

Ortskurve(n) Punkt(e) auswählen → `Verfolgen`

Modifikation → `Animation bearbeiten`

Schritte Hier gibt man die Anzahl der (äquidistanten) Stützstellen für das Parameterintervall an (nicht die Anzahl der Teilintervalle). Möchte man z.B. einen Punkt am Kreis so animieren, dass er sich in 10°-Schritten bewegt, so gibt man hier 37 $\left(\frac{360°}{10°} + 1\right)$ ein. Je höher diese Zahl ist, desto ruckfreier und langsamer bewegt sich der Punkt. Der Maximalwert ist 100.

Animationen Hier findet man alle Punkte, für die bereits eine Animation hinzugefügt wurden. Man kann diese ggf. einzeln entfernen. Vor allem lässt sich das Parameterintervall festlegen. Gibt man bei einem am Kreis animierten Punkt $t_0 = 0.25$ und $t_1 = 0.5$ ein, dann bewegt sich der Punkt auf einem Viertelkreis von Nord nach West, bei $t_0 = 0$ und $t_1 = 3$ läuft der Punkt den Kreis 3mal ab.

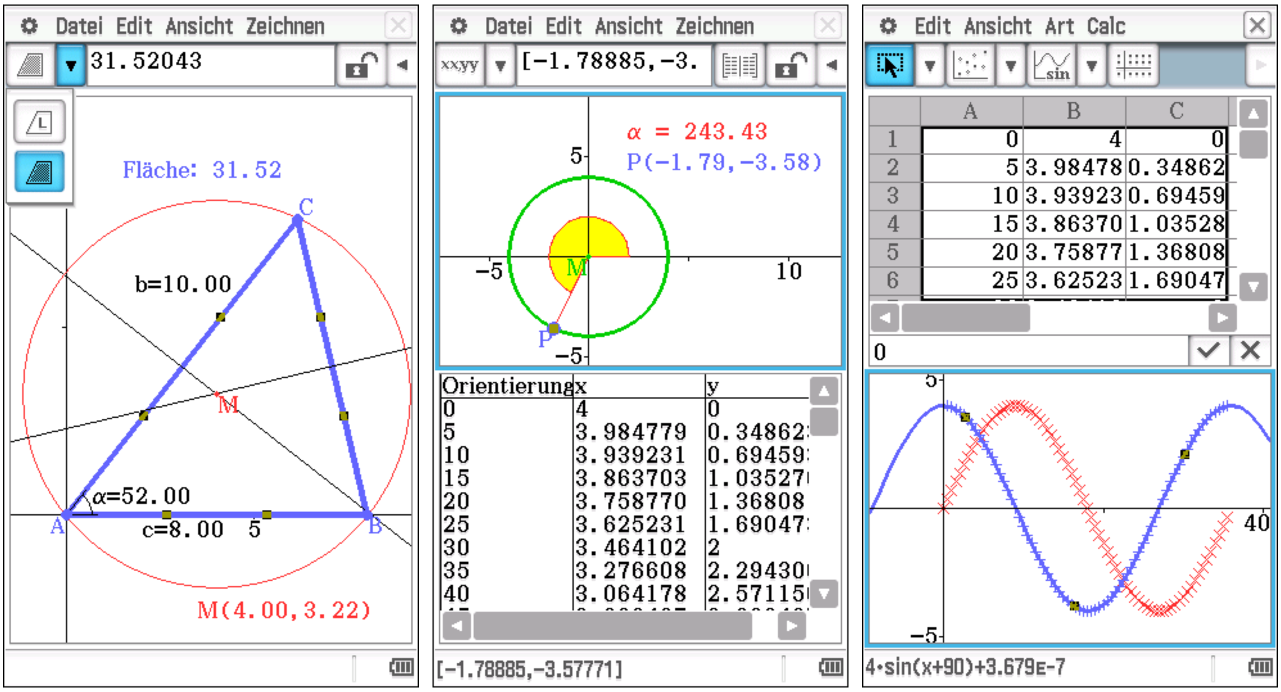
Spuren Hier werden alle Punkte angeführt, deren Ortskurve gezeichnet wird. Bei Bedarf kann diese auch entfernt werden.

Messwerte Man kann sich zwar im Messfeld über der Zeichenfläche beliebige Messwerte anzeigen lassen, aber diese werden während der Animation nicht aktualisiert. Dafür kann man aber jeden Messwert in die Zeichenfläche einblenden lassen, indem man nach Auswahl der Eigenschaft nochmals auf das Icon klickt. Dann erscheint in der Zeichenfläche ein Textfeld (mit dem aktuellen Messwert). Dieses kann noch verschoben werden.

Wenn man mit den Messwerten weiterarbeiten möchte, kann man diese in eine Tabelle auslesen lassen.

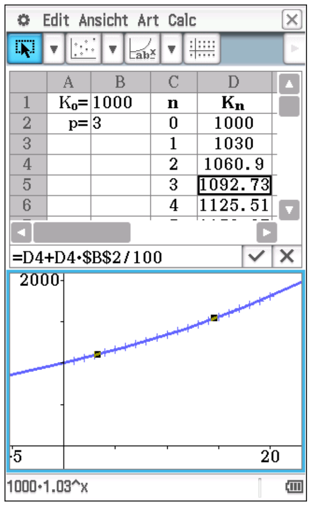
Ortskurve Hat man bereits eine Ortskurve erstellt, dann wählt man sie aus, markiert die Matrix (Koordinaten in eckigen Klammern) und kopiert diese in die Tabellenkalkulation.

Messwerte Man lässt sich jeweils die Eigenschaft anzeigen und klickt auf . Das wiederholt man mit allen interessierenden Eigenschaften. Danach markiert man die zu kopierenden Spalten (welche dann invertiert dargestellt werden) und kopiert diese in die Tabellenkalkulation.



4 Tabellenkalkulation

Die Tabellenkalkulation am `ClassPad` arbeitet im wesentlichen so wie ihre „großen Schwestern“ Calc (Libre Office) oder Excel (MS). Es fehlen zwar umfangreiche Formatierungsmöglichkeiten, aber die Funktionalität ist die gleiche.



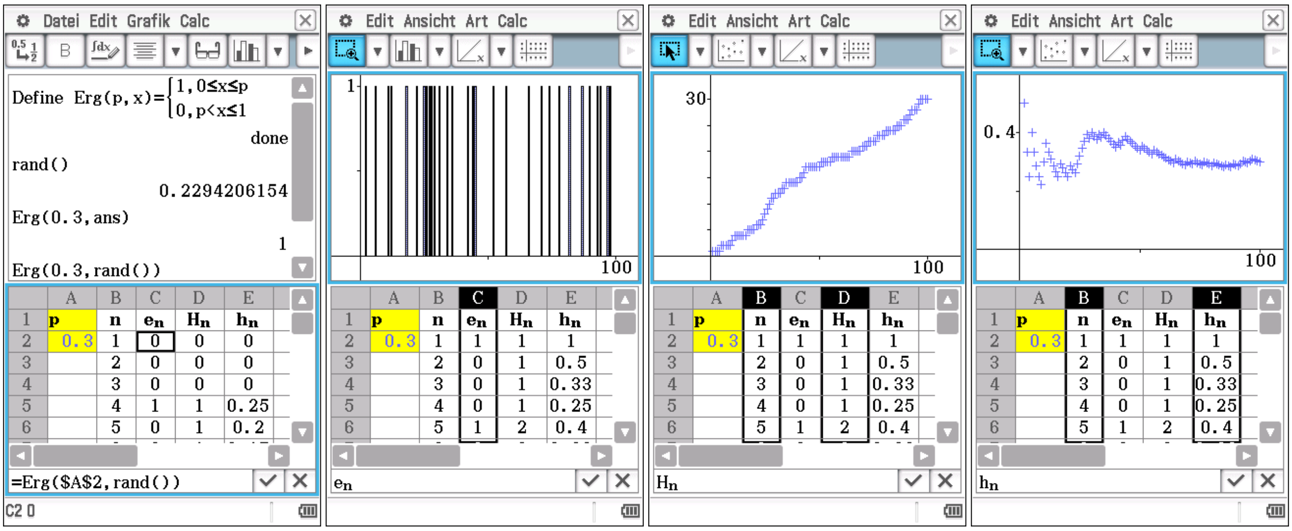
Daten In die Zellen kann man Zahlen und Rechnungen (mit = beginnend) eingeben. Dabei kann man auch auf Funktionen des CAS (benutzer- oder vordefiniert) zurückgreifen. Rechteckige Bereiche entsprechen einer Matrix, die man z.B. per `drag&drop` mit anderen Anwendungen austauschen kann. Das gleiche Format haben die Messwertlisten bei einer Animation in der Geometrie, weshalb man diese ohne Neuformatierung in die TK kopieren kann.

Zellbezüge Die wohl wichtigste Arbeitsweise der TK funktioniert bekanntermaßen: die „Variable“ `C5` greift auf die 3. Zelle in der 5. Zeile zu. Durch Voranstellen eines `$` kann man den Zellbezug (teilweise) absolut gestalten.

Neuberechnung In einer Tabelle führt die Bestätigung der Eingabe in einer Zelle zur Neuberechnung aller anderen. Ist mit den Daten auch eine Darstellung verknüpft, dann wird auch diese aktualisiert. Das lässt sich z.B. bei der Untersuchung exponentiellen Wachstums nutzen. Die Veränderung des Prozentsatzes oder Ausgangswertes bewirkt (nahezu) sofort die Veränderung des Graphen (und ggf. der Regressionsterms). Möchte man (z.B. bei stochastischen Simulationen) eine Neuberechnung auslösen, kann man das auch im Menu unter `Datei` → `Neuberechnung`.

Die Fähigkeiten der TK überschneiden sich dabei mit denen der `Statistik`-Anwendung. In beiden können Daten verarbeitet, graphisch dargestellt und Berechnungen durchgeführt werden. Die TK arbeitet am `ClassPad` eher autonom: Daten können zwar per `copy&paste` ausgetauscht werden, aber ein direkter Zugriff von außen oder eine automatische Übergabe nach außen ist nicht möglich.

Mit der Tabellenkalkulation kann man z.B. das **Gesetz der großen Zahlen** numerisch untersuchen und durch entsprechende graphische darstellungen veranschaulichen. Ausgehend von der Simulation eines Zufallsversuches wird zunächst das (Nicht-)Eintreten eines Ergebnisses veranschaulicht. Anschließend werden die Entwicklung der absoluten und relativen Häufigkeiten über der Versuchsanzahl graphisch dargestellt, um das Stabilwerden der relativen Häufigkeiten sichtbar zu machen. Dabei soll die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit gezielt verändert werden können, um ihren Einfluss unmittelbar zu zeigen.



Bei einem selbstgeschriebenen Programm würde man wahrscheinlich auf Konstrukte wie `if-then-...` zurückgreifen, um das Eintreten eines Ergebnisses zu zählen. Stattdessen verwende ich hier für die „Rechnerei" und die Grafik die `Tabellenkalkulation`. Da diese am `ClassPad` aber nicht über den Befehl `zählenwenn`[2] verfügt, definiere ich (im `Main`) zunächst eine Funktion, die bestimmte Werte (die der Befehl `rand()` liefert) auf 1 und alle anderen auf 0 abbildet. Das erleichtert das Mitzählen. Eine weitere Möglichkeit bietet die `heaviside`-Funktion, die man für solche BOOLEsche Funktionen sehr gut nutzen kann.

Stellt man nur die auftretenden Ergebnisse (Spalte `C`) als Säulendiagramm dar, kann man die „Zufälligkeit" der Ergebnisse veranschaulichen. Eine Veränderung der Wahrscheinlichkeit beeinflusst die (mittlere) Dichte der Säulen. Bei der absoluten und relativen Häufigkeit ist der `scatter`-Plot von Vorteil, da er den funktionalen Zusammenhang zwischen Versuchsanzahl und Wert betont. Um die annähernde Proportionalität im $H_n(n)$-Diagramm zu hinterfragen, kann man die lineare Regression durchführen lassen. Das führt dann argumentativ zum Verhältnis von absoluter Häufigkeit zu Versuchsanzahl (also der relativen Häufigkeit) und dessen Stabilwerden (der statistischen Wahrscheinlichkeitsdefinition).

Um die stochastischen Vorgänge noch deutlicher zu veranschaulichen, kann man durch ein `Datei` → `Neuberechnung` oder durch eine neue Eingabe einer Wahrscheinlichkeit die Simulation neu starten.

[2] Man kann aber auf den Befehl `Calc`→`Zelle-Berechnen`→`cellIf` zurückgreifen. Dieser gibt anhand einer Bedingung zwei Werte aus, die hier 0 bzw. 1 sein müssten.

5 Grafik & Tabelle

5.1 Eingabe

Auch in dieser Anwendung kann man die Terme in natürlicher Darstellung eingeben, ggf. wandelt der `ClassPad` die Eingabe noch um. Es ist auch möglich, auf Funktionen zuzugreifen, die in der Hauptanwendung `Main` definiert wurden (und umgekehrt) oder andere Funktionen auf einem der Funktionenblätter.
Standardterme für Funktionenscharen findet man unter ◆ → `Vorinstalliert`, für ihre Darstellung gibt es zwei Möglichkeiten:

statisch Gibt man eine Liste von Funktionen ein, werden diese verschieden farbig dargestellt; normalerweise nacheinander, bei Auswahl der `Simultangrafik` im `Grafikformat` gleichzeitig.

dynamisch Gibt man den Funktionsterm mit Parameter(n) ein, dann erhält man durch die dynamische graphische Darstellung einer Funktion: einen Graph und für jeden Parameter einen Schieberegler. Deren Bereich und Schrittweite kann man festlegen und manuell bzw. automatisch ablaufen (lassen).

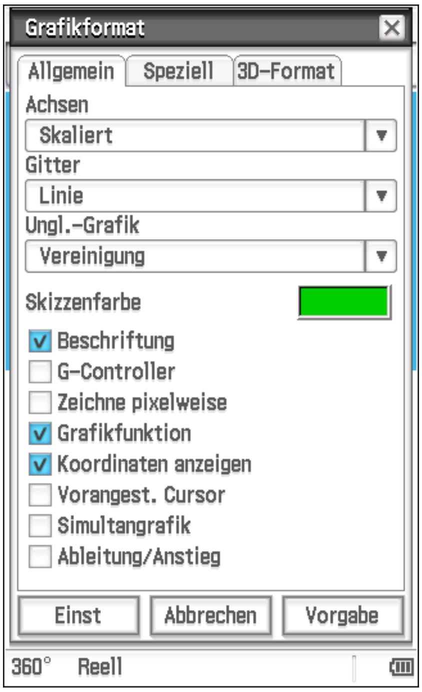
Abschnittweise definierte Funktionen lassen sich mit per `piecewise`-Maske eingeben. Alternativ kann der Definitionsbereich jeder Funktion durch den |-Operator eingeschränkt werden. Den Graph einer zusammengesetzten Funktion erhält man dann durch die Darstellung mehrerer entsprechend eingeschränkter Funktionen. Neben dem Funktionsgraph lassen sich auch andere „Typen“ (vor der Termeingabe) auswählen:

Name	Zeichen	Bemerkung
Funktionsgraph	$y =$	$f(x)$
Parameterkurve	$r =$	Polarkoordinaten $r(\theta)$
Parameterkurve	$x_t =$	kartesischen Koordinaten
senkrechte Geraden	$x =$	
Ungleichungen	$x/y \gtreqless$	Füllung eines Bereiches links, rechts, über oder unter einem Graph
Schattierungstyp	y ◆	Eingabe einer Liste zweier Funktionen $\{f_1, f_2\}$, Füllung des Bereiches zwischen den Graphen von f_1 und f_2, wenn $f_1(x) < f_2(x)$

5.2 Darstellung

Alle ausgewählte Funktionen werden per Knopfdruck im (aktuellen) Darstellungsfenster graphisch dargestellt. Bei der Untersuchung von Funktionsschar nutzt man den entsprechenden Knopf . Grundlegende Einstellungen (z.B. Darstellung des Achsen, punktweises Darstellen der Graphen, Angabe des Anstieges beim „Verfolgen“) kann man unter → `Grafikformat` → `Allgemein` vornehmen.

Anschließend ändert man ggf. das Darstellungsfenster. Dazu kann man verschiedene Möglichkeiten nutzen. Mit den Hardwaretasten $\boxed{+}$ und $\boxed{-}$ vergrößert bzw. verkleinert man die Darstellung. Außerdem gibt es verschiedene Wahlmöglichkeiten (`Zoom`), u.a.



Feld Auswahl eines Rechtecks als neues Darstellungsfenster durch Ziehen einer Diagonalen

Auto Anpassung der Werte für die y-Achse, so dass die dargestellte(n) Funktion(en) auf dem aktuellen Intervall „vollständig“ dargestellt werden

Original zurück zur Zoomstufe, mit der die aktuelle Zoomfolge begann

Quadratisch Anpassung der x-Achsen-Einteilung für winkeltreue Darstellung

Ganzzahlig Punkteinteilung 1

Vorhergehende eine Zoomstufe zurück

Initialisieren $-7{,}7 \leq x \leq 7{,}7 \quad -4{,}6 \leq y \leq 4{,}6 \qquad \Delta x = 0{,}1$ winkeltreue Darstellung

Quick spezielle Zoomstufen für Funktionsklassen, z.B. Winkelfunktionen anhängig von der Winkelmaßeinstellung

Über die **Fenstereinstellung** kann man für die Koordinaten x und y sowie für die Parameter t bzw. θ der entsprechenden Kurven die Intervallgrenzen und die Schrittweite einstellen. Hier lässt sich auch die Einteilung der Diagrammachsen einzeln logarithmisch einstellen.

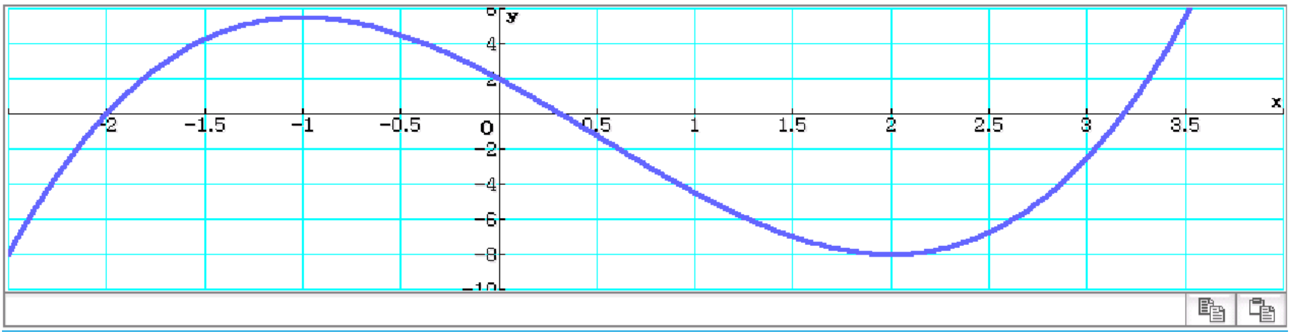
5.3 Analyse

Befehl	Ergebnis, ggf. Bemerkungen	Icon
`Verfolgen`	Cursor auf dem Graphen, Anzeige der Koordinaten	
`Skizze`		
`Tangente`		
`Normale`		
`Umkehrfkt.`	eigentlich Graph der Umkehrzuordnung	
`Grafische Lösung`		
`x/y-Berechnung`		
`Nullstelle`		
`Minimum / Maximum`	lokale Extremwerte	
`fMin / fMax`	globale Extremwerte	
`y-Achsen-Schnittpkt.`		
`Schnittpunkt`		
`Integral`	in freie Grenzen, zwischen Nullstellen oder Schnittpunkten	
`Wendepunkt`		
`Punkte-Abstand`	nicht an Funktionsgraph gebunden	
$\pi\int(f(x))^2\,\mathrm{d}x$	Volumen bei Rotation um x-Achse	

Hat man eine (oder mehrere Funktionen) graphisch dargestellt, bieten sich viele Auswertungsmöglichkeiten. In dieser Anwendung arbeitet der `ClassPad` numerisch, weshalb die Ergebnisse grundsätzlich dezimal dargestellt werden. Alle ausgewählten Funktionen können analysiert werden. Die Analyse erfolgt ausschließlich im angezeigten Intervall. Angezeigt wird genau eine Eigenschaft einer Funktion (bzw. eines Funktionspaares). Stehen mehrere Funktionen(paare) zur Auswahl oder tritt eine Eigenschaft mehrfach auf, dann dient die Cursorwippe der Auswahl: Funktionswechsel durch ▲▼, weitere Eigenschaft durch ◄►.

Ähnliches gilt für „kontinuierliche“ Anzeigen, wie z.B. das Verfolgen oder die Tangente. Die Unterteilung des Intervall (siehe Darstellungsfenster) legt auch die möglichen x-Werte fest. Will man einen konkreten Wert ansteuern, dann sollte er entweder in der Mitte des angezeigten Intervalls liegen oder durch die Einstellungen des Darstellungsfensters ermöglicht werden. Einige Eigenschaften können per Icon direkt angewählt werden, eine Übersicht findet man unter dem Menüpunkt `Analyse`.

liefert eine Übersichtstabelle wichtiger Funktionseigenschaften (Funktions- und Ableitungswerte an den Intervallgrenzen und den Nullstellen der ersten und zweiten Ableitung, Monotonie und Krümmungsverhalten auf den Abschnitten dazwischen:



y1=x^3-1.5·x^2-6·x+2

x	-2.5		-1		0.5		2		4
f´(x)	20.3	+	0	−	-6.8	−	0	+	30
f˝(x)	-18	−	-9	−	0	+	9	+	21
f(x)	-8	↱	5.5	↴	-1.3	↳	-8	↥	18

Die Zeile mit den Werten der zweiten Ableitung lässt sich unter → `Grafikformat` → `Speziell` ein- und ausschalten.

In dieser Anwendung kann man für die ausgewählte(n) Funktion(en) eine Wertetabelle erstellen. Diese lässt sich vielfältig anpassen:

	→ `Grafikformat` → `Allgemein`: Werte der ersten Ableitung (wird dann auch beim `Verfolgen` angezeigt)
	→ `Grafikformat` → `Speziell`: Anzahl der in einem Fenster angezeigten Spalten
	Vorgabe der Argumente: Start- und Endwert sowie Schrittweite
	Erstellen der Wertetabelle
	→ `Verknüpfung` mit der graphischen Darstellung

6 Statistik

Neben der Datenanalyse bietet diese Anwendung auch verschiedene Möglichkeiten, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, darzustellen und Tests durchzurechnen. Da es die aber auch in anderen Anwendungen gibt bzw. für die Schule nicht relevant sind, wird auf sie hier nicht weiter eingegangen.

6.1 Eingabe

Diese Anwendung gehörte (wie `Grafik & Tabelle`) von Anfang an auf dem GTR zum Inventar und wurde v.a. im Physikunterricht genutzt, um Messwertreihen in Listen einzugeben, grafisch darstellen und Regressionen berechnen zu lassen. Darüber hinaus kann man einfache rechnerische Auswertungen durchführen, z.B. Quotienten (bzw. Produkte) zweier Listen berechnen

  A. K. Mieth

und so die (indirekte) Proportionalität zweier Messgrößen prüfen. Außerdem lassen sich hier bequem Zufallslisten (oder Messwertreihen) statistisch auswerten: Lage- und Streumaße sowie andere Kenngrößen erhält man in einer Übersicht angezeigt. Ein großer Vorteil gegenüber der TK ist die Vernetzung dieser Anwendung: Man kann z.B. Daten aus der Hauptanwendung `Main` direkt in Listen ablegen und Regressionsfunktionen (die u.U. „unschöne“ Koeffizienten haben) als Funktion in `Grafik & Tabelle` speichern.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Werte in die Listen einzugeben:

Zahlen eingeben Wenn eine der Zellen einer Liste aktiv (schwarz unterlegt) ist, dann steht in der Eingabezeile (unten) z.B. [3] = und man kann eine Zahl oder einen Term ohne Variable eingeben. Bestätigt man die Eingabe mit `EXE`, wertet der `ClassPad` ggf. den Term aus und die entsprechende Zahl erscheint in der Zelle. Anschließend rückt die aktive Zelle einen Schritt weiter. So lassen sich z.B. Messwertreihen Wert für Wert eingeben.

Reihe berechnen lassen Wählt man die Zelle `Cal▶` einer Liste aus, dann kann man eine allgemeine Bildungsvorschrift eingeben, z.B.

$\texttt{seq}(x, x, a, b, h)$	Werte von a bis $\leq b$ in h-Schritten
$\texttt{seq}(T, x, a, b, h)$	Termwerte von T, mit x von a bis $\leq b$ in h-Schritten
$\texttt{randList}(n, a, b)$	n ganze Zufallszahlen zwischen a und b
$f(\texttt{lista}, \texttt{listb}, \ldots)$	zeilenweise Berechnung aus Listenwerten
$\texttt{cuml}(\texttt{lista})$	aufsummierte Liste
$\Delta\texttt{list}(\texttt{lista})$	Differenzen benachbarter Werte einer Liste
$\texttt{percent}(\texttt{lista})$	prozentualer Anteile an der Summe aller Listenwerte

Zuweisung Einige Anwendungen bieten Möglichkeiten, Listen in die `Statistik` zu schreiben:

`Main` Listen können auf verschiedenste Arten erzeugt und bearbeitet werden. Diese kann dann einer der Listen `list1` bis `list6` zugewiesen werden. Da der `ClassPad` Dezimalzahlen intern aber in einen (gekürzten) Bruch umwandelt (was man meist nicht möchte), sollte man die Dezimaldarstellung mit `approx(...)`, `fRound(...)` oder `sRound(...)` erzwingen.

`Grafik & Tabelle` Einzelne Spalten einer Wertetabelle lassen sich per → `Tabellen zu Liste` der `Statistik` zuweisen.

Einlesen Gespeicherte Listen (z.B. aus der elektronischen Messwerterfassung) können direkt eingelesen werden (im Kopf der Liste) oder an eine Standardliste (z.B. `list2`) durch Eingabe in der `Cal▶`-Zeile übergeben werden. Dabei ist für die Darstellung und Regression die letztere Variante günstiger, weil die Grundeinstellung (z.B. `yListe=list2`) dann nicht verändert werden muss.

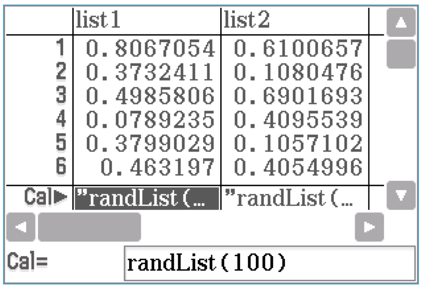
Berechnen In der `Cal▶`-Zeile kann man für die entsprechende Liste eine Berechnungsvorschrift eingegeben werden. Die Möglichkeiten reichen dabei von einfachen arithmetischen Operationen (z.B. $2 \times \texttt{list1} - 1{,}5$) über das Verknüpfen mehrerer (gleichlanger!) Listen (z.B. `list2/list1`) bis zur Verwendung vordefinierter Funktionen (z.B. $f(\texttt{list1})$ oder $\texttt{sRound}(\texttt{list2}, 2)$).

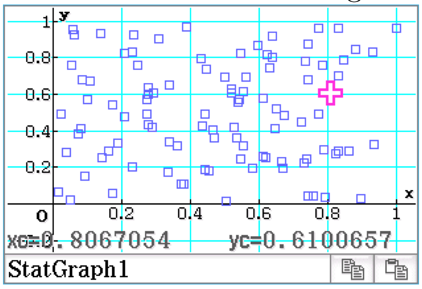
6.2 Darstellung

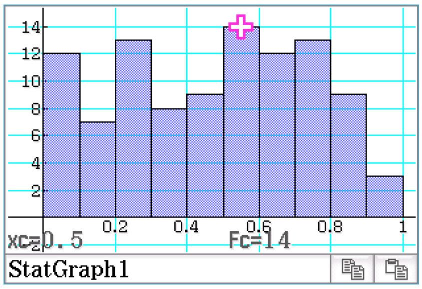
Unter dem Menüpunkt `Grafik einst` bzw. lassen sich 9 Statistik-Graphen einstellen und aktivieren. Die wichtigsten Typen (für die Schule) sind dabei der `Punkteplot` und das `Histogramm`.

Die weiteren Parameter richten sich nach der Wahl der Listen. Normalerweise wird die `Häufigkeit` auf 1 gestellt bleiben, außer bei der Untersuchung von Häufigkeitstabellen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Im Unterschied zur Tabellenkalkulation kann man hier festlegen, welche Liste (bzw. Spalte) die x-Werte und welche die y-Werte enthält.

Für die graphische Darstellung passt der `ClassPad` das Darstellungsfenster so an, dass die „Punktwolke“ das Fenster füllt. Deshalb sind die Koordinatenachsen u.U. zunächst nicht zu sehen und müssen über die Zoom- bzw. Fenstereinstellung erfasst werden.







6.3 Auswertung

In der graphischen Darstellung der Statistik-Anwendung gibt es (wie in Grafik & Tabelle) die Möglichkeit des Verfolgens. Insbesondere im Histogramm kann man so (z.B. bei Simulationen) absolute Häufigkeiten ermitteln.

Sieht man die eingegebenen Daten als Werte einer Verteilung (entweder als Einzelwerte oder bereits als Häufigkeits- oder Wahrscheinlichkeitsverteilung aufbereitet) an, dann kann man über `Calc` → `Eindim. Variable` die Kenngrößen der Verteilung ermitteln:

$\overline{x}$	arithmetisches Mittel	Q_1	unteres Quartil
$\sum x$	Summe aller Werte	Med	Median
$\sum x^2$	Summe der Quadrate aller Werte	Q_3	oberes Quartil
σ_x	Standardabweichung	$\max X$	größter Wert
s_x	empirische Standardabweichung	Mode	Modalwert(e)
n	Anzahl aller Werte	ModeN	Anzahl Modalwerte
$\min X$	kleinster Wert	ModeF	Häufigkeit der(s) Modalwerte(s)

Eine weitere Aufgabe dieser Anwendung (im Zusammenhang mit Messwertreihen) ist das Finden von Funktionstermen. Folgende Regressionen beherrscht der `ClassPad`:

linear	$a \cdot x + b$	logarithmisch	$a + b \cdot \ln(x)$
quadratisch	$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	exponentiell	$a \cdot e^{b \cdot x}$
kubisch	$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$	frei exponentiell	$a \cdot b^x$
quartisch	$a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$	Potenz-	$a \cdot x^b$
Sinus-	$a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$	logistisch	$\frac{c}{1+a \cdot e^{-b \cdot x}}$

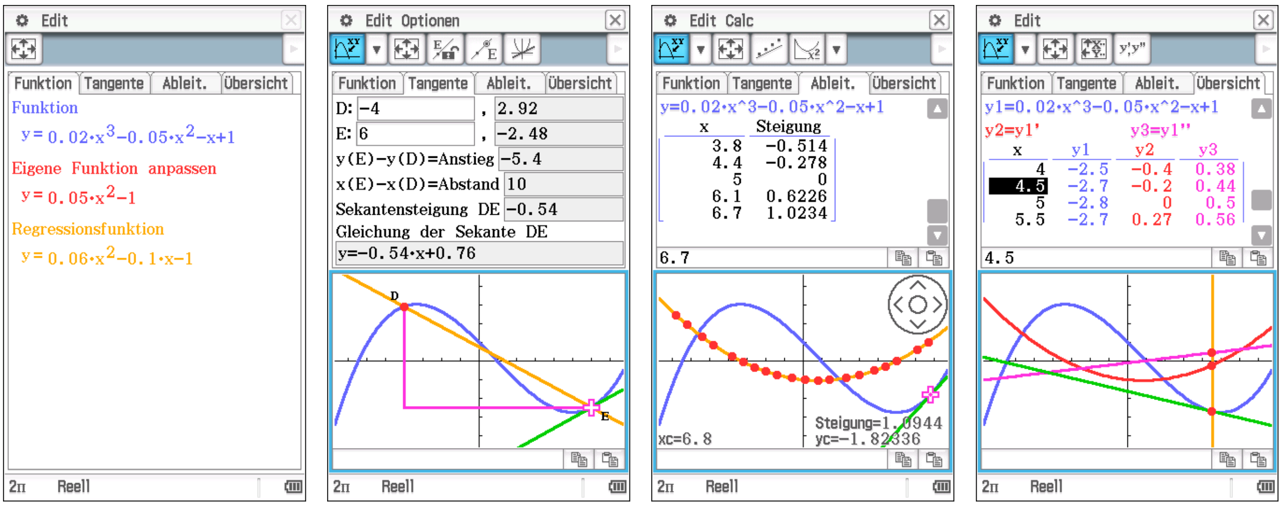
Die entsprechenden Parameter werden zunächst in einem Fenster (ggf. zusammen mit Korrelationskoeffizient r, Bestimmtheitsmaß r^2 und der mittleren quadratischen Abweichung MSe (mean square error)) ausgegeben. Nach dem Bestätigen der Ergebnisse wird der Graph der Regressionsfunktion in der graphischen Darstellung ergänzt. Optional können der Funktionsterm (mit den Parametern der Regression) in die Funktionsliste bei `Grafik & Tabelle` übertragen und die Abweichungen (in y-Richtung) der Daten von den Werten der Regressionsfunktion in eine Liste gespeichert werden. Letzteres kann z.B. zur Fehleranalyse in Physik genutzt werden.

7 Interaktive Differentialrechnung

Diese Anwendung bietet eine umfangreiche Unterstützung bei der Einführung und Untersuchung grundlegender Elemente der Differentialrechnung. Man arbeitet dabei immer im splitscreen, wobei man im unteren Teil die graphische Repräsentation der „Zahlen“ des oberen Bildschirms sieht. Je nach Untersuchungsziel kann man auf folgende Reiter (Unterprogramme) zurückgreifen:

Reiter	Inhalt	Bemerkung
`Funktion`	Anzeige: Ausgangsfunktion, „Eigene Funktion“ und Regressionsfunktion	Gegenüberstellung der Funktionsterme „in Richtung“ erste Ableitung: eigene Vermutung und Regression zu Messwerten aus `Ableitung`
`Tangente`	Übergang einer Sekante zur Tangente	E Tangenten- und erster Sekantenpunkt, D zweiter Sekantenpunkt, Ergebnisse für y_D, y_E, $y_E - y_D$, $x_E - x_D$, m_S und Sekantengleichung
`Ableitung`	Zusammenhang Tangente und 1. Ableitung	Auslesen von „Messwerten“ m_t, graphische Darstellung, Regression
`Übersicht`	Funktion, 1. (und 2.) Ableitung	Wertetabelle und Graphen der Funktionen f, f' und f''.

Mit den Cursortasten kann der aktive Punkt auf dem Graphen bewegt werden, alle damit verknüpften Werte werden aktualisiert. Diese Anwendung unterstützt den Lehrer mit vielen Möglichkeiten, insbesondere der direkten Verknüpfung von Werten und Bildern. Allerdings ist sie ein „single purpose device“, dass sich (m.E.) zu nichts anderem gebrauchen lässt.



8 eActivity

Auf dem `ClassPad` kann man elektronische Arbeitsblätter erstellen, speichern und austauschen. Dazu gibt es folgende Optionen, die man abwechselnd anordnen kann:

Text Man kann (unter Verwendung aller möglichen Sonderzeichen) Fließtext schreiben. Dieser wird ohne Silbentrennung umgebrochen und linksbündig gesetzt. Einzige Gestaltungsmöglichkeit ist der Fettdruck B (z.B. für Überschriften). Diesen schaltet man entweder bei ausgewähltem Text ein bzw. aus oder bevor man schreibt. Mathematische Ausdrücke werden nicht ausgewertet.

Berechnung Wie in der Hauptanwendung `Main` werden mathematische Ausdrücke ausgewertet. Allerdings können die Befehle hier nicht über die `Interaktiv`-Schnittstelle eingegeben werden.

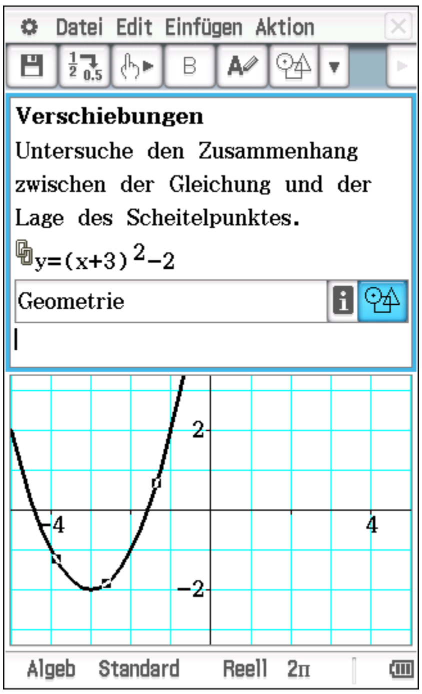
Anwendungszeile Jede Anwendung des `ClassPad` kann (auch mehrfach) in einer `eActivity` eingebunden werden. Die dabei entstehenden Streifen kann man beschriften und mit einer Hilfezeile versehen. Dazu kommen einige „endemische“ Möglichkeiten:

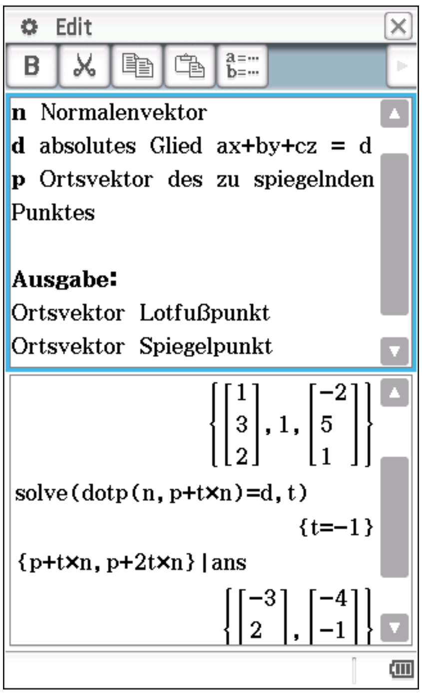
Geometrielink Kopiert man den Inhalt des Links (Term, Gleichung, 2D-Vektor) in ein `Geometrie`-Fenster, dann sind die Darstellung und der Ausdruck wechselseitig verlinkt. Modifiziert man den Ausdruck, dann verändert sich nach Bestätigung mit `EXE` die Darstellung und umgekehrt.

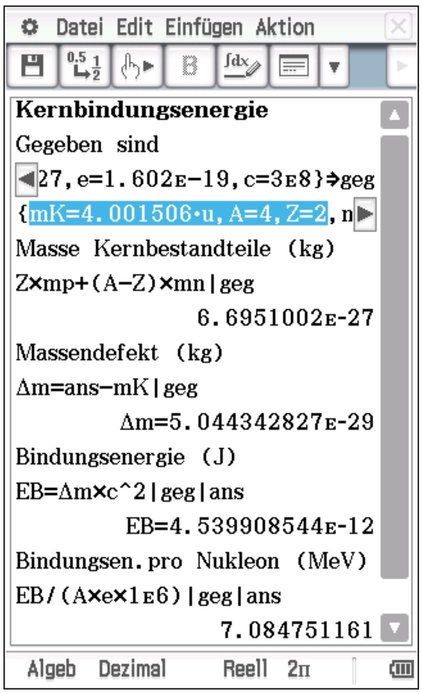
Hinweise Um die `eActivity` zu strukturieren bzw. übersichtlicher zu gestalten, kann man Textpassagen auch in einem eigenen Fenster ablegen.

Hilfezeile Zu jeder Anwendungszeile kann man Kommentare hinzufügen. Das können z.B. Arbeitsanweisungen oder zusätzliche Informationen sein.

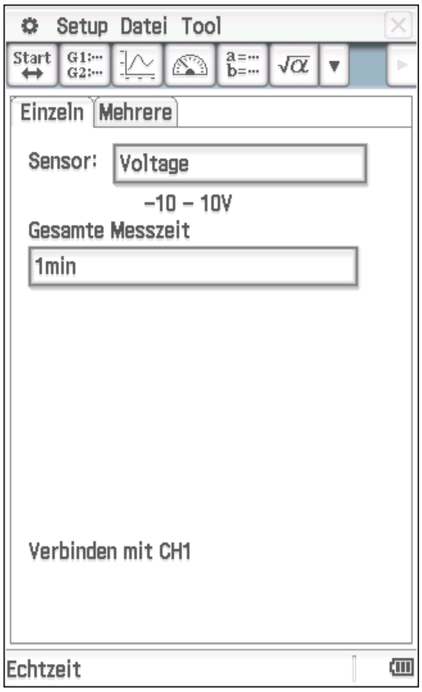
Die Verwendungsmöglichkeiten der `eActivity` sind sehr vielfältig. Einerseits lassen sich komplexere (und natürlich auch einfachere) Untersuchungen geschlossen abspeichern und so gewissermaßen dokumentieren. Andererseits können auch Aufgabenstellungen und Material zu Untersuchungen zusammengestellt und weitergereicht werden. Und schließlich lässt sich eine eActivity auch als elektronisches Tafelwerk (mit Erläuterungen, Beispielrechnungen usw.) nutzen.







9 E-CON3



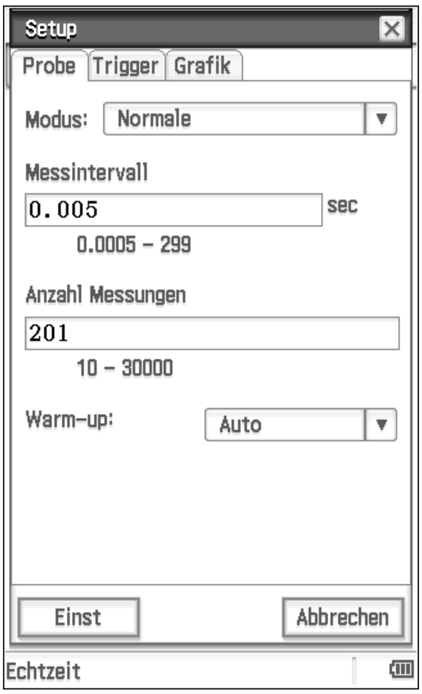
Diese Anwendung bietet die Möglichkeit, mit einer Messschnittstelle (bzw. einem Datenlogger) zu kommunizieren. Lange Zeit war das die EA-200 von CASIO, mittlerweile bietet die Firma CMA das Clab an. Je nach Versuch schließt man einen oder mehrere Sensoren an die Schnittstelle an. Die meisten Sensoren sind in der Bibliothek erfasst. Man kann aber auch eigene Sensoren erstellen und kalibrieren.
`E-CON3` bietet eine Benutzeroberfläche um die Sensorauswahl und die Aufnahme der Messwerte zu steuern. Zur Kontrolle und ersten Auswertung werden diese dargestellt und können je nach Auswertungsanwendung (`Statistik` oder `Tabellenkalkulation`) als Liste oder Matrix gespeichert werden.

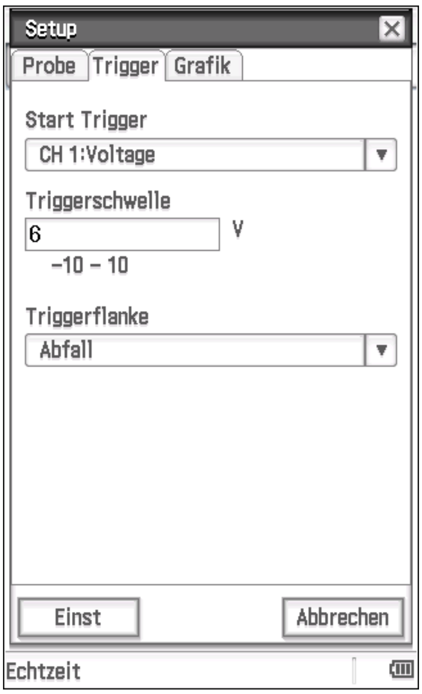
9.1 Vorbereitung

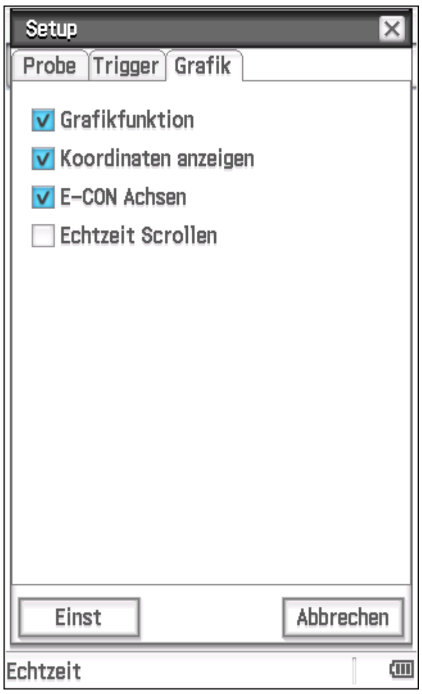
Neben der eigentlichen Versuchsanordnung benötigt man das 3er-Gespann Rechner - Schnittstelle - Sensor(en), wobei die Verbindung zum Rechner durch das 3polige Kabel (Klinkenstecker) erfolgt. Bei der Auswahl der Sensoren sollte man auch den Hersteller (CMA, CASIO, Vernier) beachten, da ansonsten die Kalibrierung nicht stimmt.

Im Multimeter-Modus kann man sich die aktuellen Werte aller Sensoren anzeigen lassen, wobei die Anzeige in kleinen Abständen aktualisiert wird. Hier könnte man bereits manuell eine Messwertliste erstellen. Insbesondere bei der Verwendung von Sensoren, die am Versuch kalibriert werden müssen (z.B. der (Ultraschall-)Bewegungssensor), ist dieser Modus hilfreich.

Will man hingegen eine größere Anzahl von Messwerten automatisch auslesen lassen, sollte man dies im Vorfeld planen und im `Setup` einstellen. Dabei sollte auch der Umstand beachtet werden, dass die Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit des `ClassPad` nicht sehr hoch sind. 100 bis 200 Messwert(paare) sind i.d.R. ausreichend für einen „schönen“ Graph aus Messpunkten und eine entsprechend genaue Regression.







Folgende Modi stehen für die automatische Erfassung der Messwerte zur Verfügung. Im wesentlichen sind sie durch die möglichen Abstände einzelner Messungen gekennzeichnet. Teilweise ist die Wahl des Messintervalls Δt durch die verwendete Sonde begrenzt, z.B. beim Ultraschall-Bewegungssensor gilt $\Delta t \geq 0{,}02\,\mathrm{s}$.

Modus	Δt_{min}	Δt_{max}	**Besonderheit**
Echtzeit	0,3 s	299 s	Messwertpaare einzeln übertragen, Graph aktualisiert
Schnell	20 µs	500 µs	Messwertübertragung nach vollständiger Messung
Normale	0,0005 s	299 s	
Erweitert	5 min	240 min	
Zeitraum			n Zeitmessungen für periodische Vorgänge Spannungsmessung an `CH1` als Trigger z.B. bei Verwendung von Lichtschranken

Die Synchronisierung des Experiment und der Messung von Hand ist meist aufwändig. Deutlich einfacher ist es, den Messbeginn vom Eingangswert eines Sensors (`CH1`) abhängig zu machen oder die Messung mit einem Countdown zu beginnen. Diese Varianten kann man beim `Trigger` (Auslöser) einstellen.

Bildschirm antippen Die Messung wird durch Betätigen der `ok` - Taste gestartet.

Countdown Nach Betätigen der `ok` - Taste zählt der Datenlogger im Sekundentakt herunter und gibt dazu akustische Signale.

`CH1:`**Sensor** Nach Betätigen der `ok` - Taste wird in schneller Folge der Messwert am Kanal 1 ausgelesen. Unterschreitet (bzw. überschreitet, je nach Triggerflanke) dieser einen vorgegebenen Wert (die Triggerschwelle), startet die Messung.

`Sonic` **bzw.** `Microphone` Die EA-200 besitzt ein eingebautes Mikrofon und nutzt für den Bewegungssensor einen eigenen Kanal. Falls über einen der beiden der Trigger gesteuert werden soll . . .

9.2 Messung

Je nach Triggereinstellung beginnt man nun mit dem Experiment und startet die Messung (oder andersherum). Zur Bestätigung des Messungsbeginns hört man einen einfachen beep und zum Abschluss einen doppelten. Anschließend (außer im Echtzeitmodus) werden die Daten übertragen und die entsprechenden Graphen gezeichnet. Allerdings sollte man die Darstellung mit Vorsicht genießen, denn nur das Diagramm des „ersten“ Graphen wird mit passenden Achsen dargestellt. Alle weiteren werden individuell in das gleiche Fenster gestreckt, so dass eventuelle Verschiebungen oder Streckungen nicht deutlich sichtbar sind. Letztlich sollte man in dieser Darstellung nur nach Problemen suchen, z.B. Ausreißern oder Naheinstellungsplatten.

In den meisten Fällen ist die Wiederholung des Versuches ohne großen Aufwand möglich. Tatsächlich können die meisten Einstellungen (Sensorwahl, Messintervall und -anzahl, Trigger) ohne Verbindung zur Schnittstelle („offline“) vorgenommen werden. Das ermöglicht z.B. einer Klasse in relativ kurzer Zeit an einem oder wenigen (ggf. aufwändigen) Versuchsaufbau(ten) individuelle Messungen aufzunehmen und anschließend auszuwerten.

9.3 Speichern und Auswerten

Nach erfolgter Messung erscheint im Menü neben `Zoom` und `Analyse` der Punkt `Datei`. Dort findet man die Möglichkeit entweder die gesamte Messreihe oder einen Abschnitt davon als

Listen (für `Statistik`) oder Matrix (für die Tabellenkalkulation) zu speichern. Außer im Modus `Zeitraum` wird grundsätzlich die Messgröße in Abhängigkeit von der Zeit gespeichert.

Liste Es werden 2 Listen (1-dimensionaler Array, geschweifte Klammern) pro ausgewähltem Kanal gespeichert: eine für die Zeit und eine für die Messgröße. Bei mehreren Kanälen muss der Speichervorgang mit jedem Kanal wiederholt werden.

Matrix Es wird eine Matrix (2-dimensionaler Array, eckige Klammern) mit 2 Spalten pro ausgewähltem Kanal gespeichert: jeweils abwechselnd eine für die Zeit und eine für die Messgröße.

Führt man nur eine Messung durch und löscht bald nach der Auswertung die Daten wieder, kann man getrost intuitiv vorgehen. Bei Mehrfachmessungen oder verschiedenen Experimenten sollte man aber ein System nutzen. Damit die gespeicherten Größen nicht die Variablen (im CAS) blockieren, sollte man die Ergebnisse in einem eigenen Ordner speichern (was den späteren Zugriff etwas erschwert) oder Namen wählen, die aussagekräftig sind und den Regeln für Dateinamen am `ClassPad` entsprechen (keine Systemvariablen, höchstens 8 Zeichen, keine Zahl zu Beginn). Die Buchstaben müssen dabei mit der `abc`-Tastatur (und nicht mit Variablen) geschrieben werden.

Um besonders bei gespeicherten Listen die Übersicht zu behalten (und das System nicht zu behindern), empfiehlt sich das Formelzeichen zu verdoppelt und durch einen geeignete Nummerierung zu ergänzen, wobei gleiche Nummern zum selben Versuch gehören. Misst man z.B. Kraft F und Höhe y eines schwingenden Körpers, dann könnten die 4 Listennamen `tt31`, `yy31`, `tt31a` und `FF31` sein. Da die Zeitlisten sich i.d.R. nicht unterscheiden, können alle bis auf eine gleich gelöscht werden (z.B. im Variablenmanager).

Für die Auswertung importiert man die Listen oder Matrix in die Tabellenkalkulation oder lädt die Listen in der `Statistik`-Anwendung. Das geschieht entweder durch Eingabe des Namens im Kopf (statt `list1` usw.) oder in der `Calc`-Zelle der entsprechenden Liste. Da sowohl bei den Grafik-Einstellungen als auch bei der Regression `list1` und `list2` voreingestellt sind, erspart man sich etwas Arbeit bzw. umgeht Versäumnisse, wenn man die Messwerte in die Standardlisten überträgt.

9.4 Einsatzbeispiele

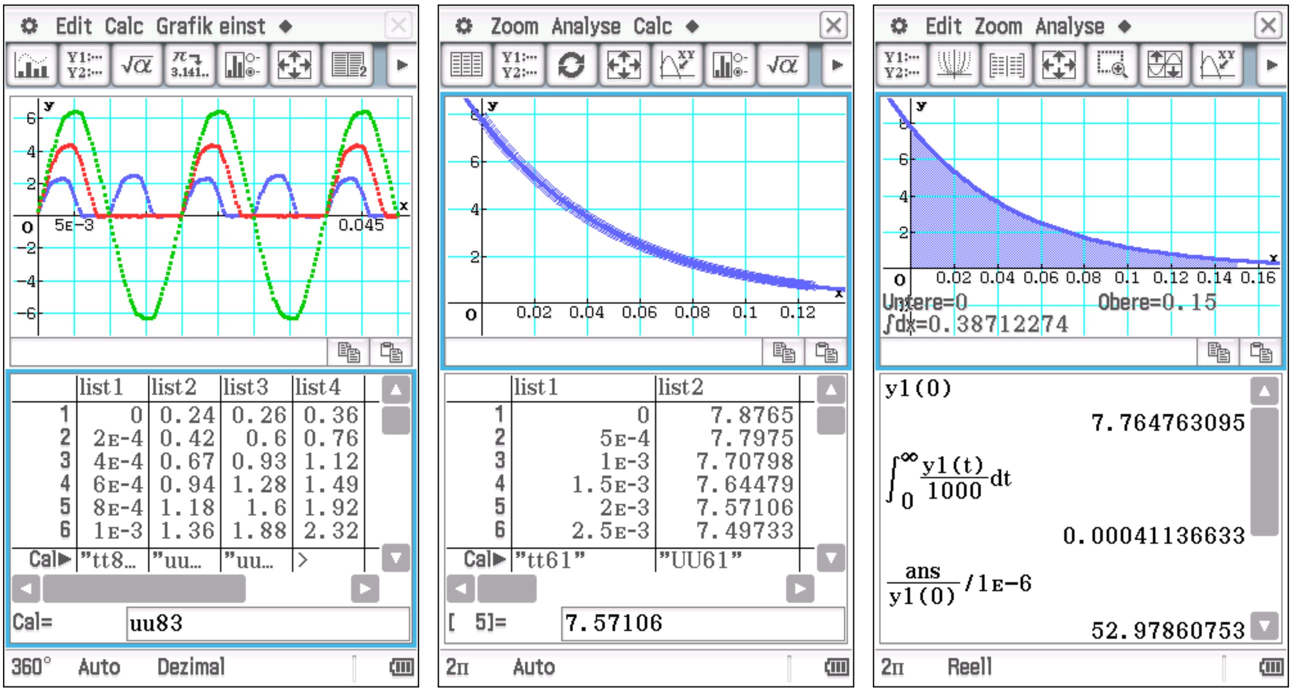
9.4.1 Gleichrichtung

In dieser Messreihe wurde in 3 verschiedenen Schaltungen bei gleicher Ausgangsspannung die Spannung über einem $1\,\mathrm{k\Omega}$-Widerstand gemessen. Einmal ohne Diode (grün), einmal mit einer LED in Reihe (rot) und einmal „nach“ einer GRAETZ-Schaltung (aus 4 LEDs [3]).

Für die Wahl des Messintervalls muss zunächst nur die Periodendauer $\left(\frac{1}{50\,\mathrm{Hz}} = 20\,\mathrm{ms}\right)$ bedacht werden. Möchte man mit ≈ 200 Messintervallen 2 Perioden aufzeichnen, dann sollte man die Länge eines Intervalls auf $200\,\mu\mathrm{s}$ festlegen und deshalb den `Schnell`-Modus wählen.

Damit die Kurven trotzdem vergleichbar sind, wurden sie jeweils mit einer geringen Triggerschwelle (0,2 V, Anstieg) ausgelöst. Man erkennt neben dem „Abschneiden“ bzw. „Umklappen“ auch den „Verlust“ der Schwellspannung (einfach und doppelt).

[3] Bei dieser Messung wurden rote und grüne LEDs benutzt. Das erkennt man an den abwechselnd unterschiedlich hohen Amplituden der pulsierenden Gleichspannung (blau)

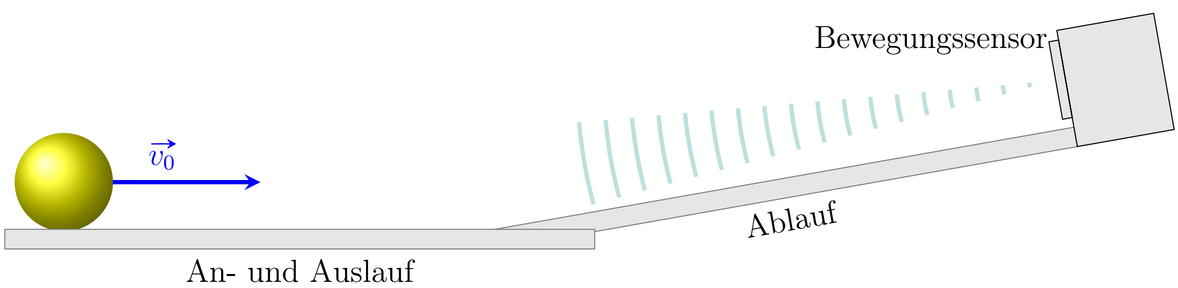


9.4.2 Entladekurve

Statt der eigentlichen Stromstärkemessung im Entladestromkreis wurde die Spannung über dem Entladewiderstand (1 kΩ) gemessen. Die Regressionsfunktion (für $U(t)$) wurde unter `y1` (in `Graphik & Tabelle`) gespeichert. Dadurch kann die Ladespannung als $U(0)$ ermittelt werden. Die Umrechnung in die Stromstärke $\left(I = \frac{U}{R}\right)$ erfolgte erst bei der Bestimmung der Ladung durch das Integral. Die Kapazität des Kondensators wurde mit 53 µF ermittelt.

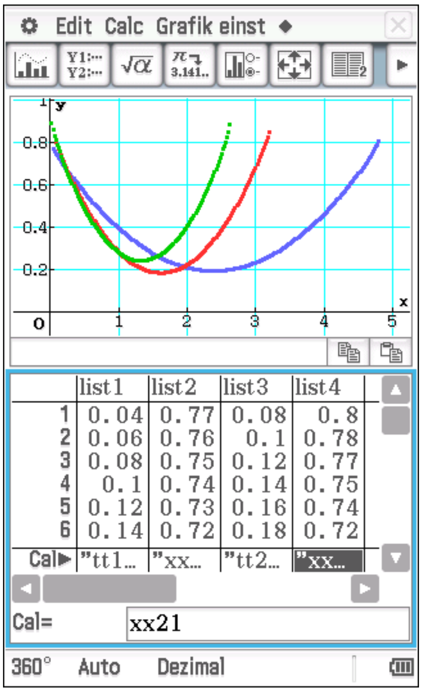
Der asymptotische Teil der Entladekurve ist bei diesem Experiment aus zwei Gründen ungünstig. Erstens enthält er keine echte Information über den Kondensator (die Entladestromstärke geht ja immer gegen 0) und deshalb sind die dort aufgenommenen Messwerte nicht aussagekräftig. Zweitens gibt es auch hier Messfehler, insbesondere einen systematischen: die Spannung am Entladewiderstand geht nicht ganz gegen 0 V sondern meist nur gegen 0,05 V. Das ist normalerweise ein tolerierbarer Fehler, aber hier führt er zu teilweise starken Fehlern in der Regressionsfunktion, denn diese $\left(a \cdot e^{b \cdot x}\right)$ kann die Verschiebung nicht abbilden. Deshalb sollte man entweder mit der Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$ oder mit einer Mindestspannung am Ende arbeiten. Als Faustformel Ziele ich auf eine Gesamtmessdauer von 2τ oder mindestens 10% der Anfangsspannung.

9.4.3 geneigte Ebene



In Klasse 9 und 11 ist die gleichmäßig beschleunigte Bewegung Thema in der Mechanik und die geneigten Ebene ein klassischer Versuch. Auch wenn die Rotation (der Kugel) nicht rechnerisch (Trägheitsmoment, Rotationsenergie etc.) untersucht wird, kann man der rollenden Kugel viel abgewinnen. Führt man den Versuch klassisch durch, lässt man meist eine Kugel eine definierte

Strecke ablaufen und misst die dafür benötigte Zeit. Wegen der Ungenauigkeit in der Handstoppung ($\Delta t \approx 0{,}2\,\mathrm{s}$) muss man diesen Versuch oft genug wiederholen (oder auf Lichtschranken ausweichen). Man kann zwar so die Nichtproportionalität zwischen Ort und Zeit nachweisen, aber ohne den Messpunkt ($0\,\mathrm{s}|0\,\mathrm{m}$) ist die Parabelform nicht ohne weiteres zu erkennen. Genau das kann aber die elektronische Messwerterfassung leisten.



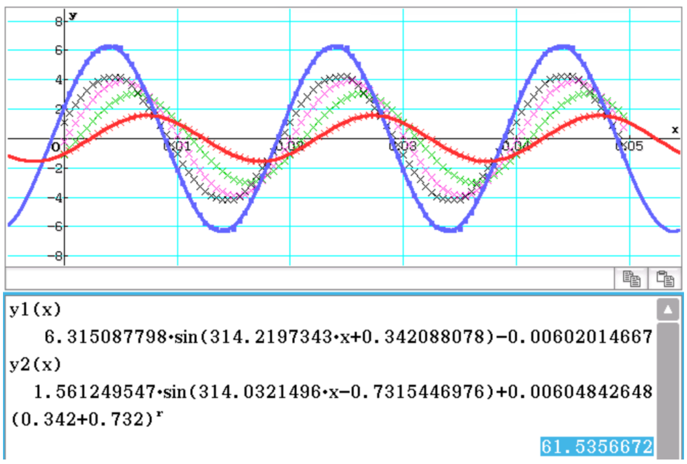
In dieser Anordnung wurden zwei Aluminium-U-Profile (1 m) so ineinander gesteckt (die geneigte Schiene passt mit wenig Spiel in die horizontale), dass ein stoßfreier Übergang möglich ist. Da die Kugel genügend Ultraschall reflektieren muss, damit der Sensor währen des Versuches das Signal nicht verliert, sollte sie ausreichend groß sein. (Pool-) Billardkugeln ($d = 57\,\mathrm{mm}$) erfüllen diesen Zweck und sind außerdem kostengünstig, hart, sehr rund, homogen und glatt. Natürlich tritt Reibung auf, aber mit $\mu \approx 0{,}003$ ist diese meist vernachlässigbar.

Bei der Verwendung des Bewegungssensors ist zu beachten, dass dieser vor der Messung justiert werden (am besten mit dem Multimeter-Modus) und das Messintervall mindestens $0{,}02\,\mathrm{s}$ betragen muss. Die Messdauer kann man deshalb meistens nur noch über die Anzahl der Messpunkte verändern. Da die händische Synchronisierung von Ablauf und Messbeginn schwierig ist und man ohnehin auch Bereiche der tatsächlichen Messung „ausschneiden“ kann, bietet sich hier die Aufnahme einer Auf- und Abbewegung und damit die Verwendung des Triggers an. Da die Kugel auf den Sensor zurollt, soll die Messung ausgelöst werden, wenn die Entfernung der Kugel erstmalig 0,8 m unterschreitet. Der Herstellen gibt als „Naheinstellgrenze“ des Bewegungssensors 60 cm an, aber ich habe gute Erfahrungen bis zu 20 cm gemacht. Rollt die Kugel zu nah heran, wird konstant der minimale Wert angegeben und im Graph zeigt sich in dem Bereich eine Horizontale.

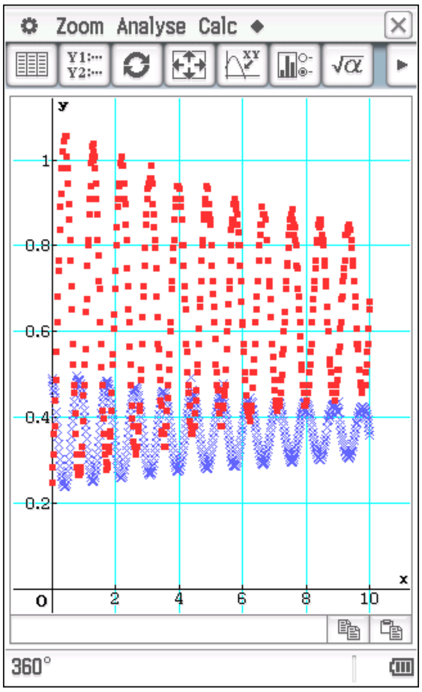
Probe	
Modus	normal
Messintervall	0,02 s
Anzahl Messungen	201
Trigger	
Start Trigger	SONIC:Motion
Triggerschwelle	0,8 m
Triggerflanke	Abfall

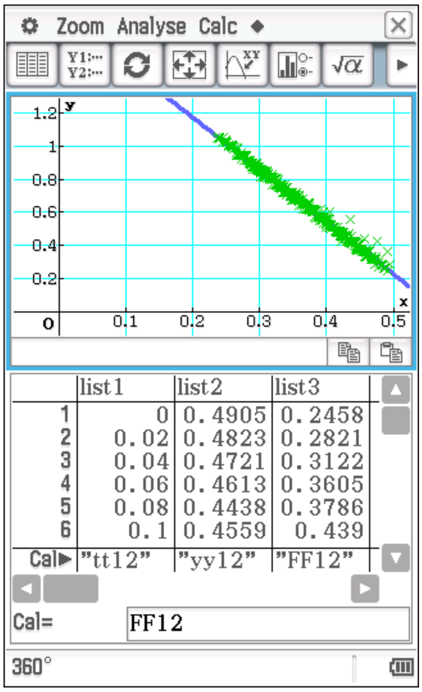
9.4.4 Spule im Wechselstromkreis

Für diese Messung wurde eine Spule mit verschiedenen Füllungen (Luft, I-, U und geschlossener Kern) in Reihe mit einem ohmschen Widerstand in einem Wechselstromkreis betrieben. Die blaue Kurve stellt die Gesamtspannung und die anderen die Stromstärke (als Spannung über dem Widerstand gemessen) dar. Man kann die Abnahme der Amplitude und die zunehmende Phasenverschiebung erkennen und durch Regression bestimmen: 61,5° bei geschlossenem Kern.



9.4.5 Federschwinger





Bei diesem Versuch wurde sowohl die Entfernung des Massestückes als auch die Kraft, mit der die Feder an der Aufhängung zieht, gemessen. Die Messwerte können vielfältig ausgewertet werden: Schwingungsdauer, Dämpfung und HOOKEsches Gesetz. Da beide Sensoren in der Ruhelage von Null verschiedene Werte liefern ($F_0 = m \cdot g$ und $y_0 > 20\,\text{cm}$), ist das HOOKEsche Gesetz hier keine Proportionalität, sondern ein linearer Zusammenhang: $F(y) = -D \cdot (y - y_0) + m \cdot g$. Beim Einsatz des Kraftsensors ist zu beachten, dass auch Schwingungen der Aufhängung und ggf. äußere Stöße gemessen werden. Deshalb sieht der $F(t)$-Graph meist „zittrig“ aus. Abhilfe kann eine solidere Aufhängung oder eine Dämpfung der Anordnung bringen.

10 Lernaufgaben

Meines Erachtens sollte allen Überlegungen zur Unterrichtsgestaltung der Grundsatz

> „Damit Schüler Mathematik lernen, müssen sie sich aktiv mieth ihr auseinandersetzen.“

zugrunde liegen. Bei der Gestaltung folgenden Materials habe ich versucht, ihn konsequent umzusetzen. Im wesentlichen finden sich hier die Arbeitsanweisungen für die Schüler, teilweise durch Übungsmaterial flankiert. Der `ClassPad` spielt darin eine Rolle (deswegen findet sich dieses Material hier).

10.1 binomische Formeln (Gruppenpuzzle)

Ablauf

S_1 Bildet 3er-(Stamm-)Gruppen und nummeriert euch.

E Findet euch mit gleich nummerierten Schülern zusammen.
Bearbeitet die Aufgaben (Erarbeitung & Übung).
Klärt offene Fragen und bereitet eine Zusammenfassung für die anderen Schüler eurer Stammgruppe vor. Diese soll eine graphische Darstellung, eine (möglichst allgemeine) Gleichung und Beispiele (Terme und Berechnungen) enthalten.
Bearbeitet eure Übungsaufgaben und kontrolliert mit dem TR.

S_2 Präsentiert eure Zusammenfassung in der Stammgruppe.
Löst die Übungsaufgaben der anderen Expertengruppe.
Klärt ggf. Fragen.

Expertenaufgaben 1

Anton kennt die Quadratzahlen bis 20^2. Er erkennt zwar ein gewisses Muster, aber es ist ihm nicht ganz klar. Berechnet er größere Quadrate mit dem Taschenrechner, dann scheint seine „Abkürzung“ (z.B. 1601 bei 41^2) nicht richtig zu sein.

1. Erstelle eine Liste „großer“ Quadratzahlen, die insbesondere 41^2 enthält.
2. Formuliere Antons „Abkürzung“sregel und prüfe deren Richtigkeit.
3. Veranschauliche 41^2. Formuliere eine eigene Regel.
4. Verallgemeinere deine Regel und teste sie an eigenen Beispielen.

Übung 1 **(Bearbeitung ohne, Kontrolle mieth TR)**

1. Berechne.
   $91^2 =$ ________ $72^2 =$ ________ $43^2 =$ ________ $21^3 =$ ________
2. Wandle in eine Summe um.

   $(a+3)^2 =$ ____________ $(2b+c)^2 =$ ____________

   $\left(\frac{d}{2}+\frac{2}{3}\right)^2 =$ ____________ $(x+1)^3 =$ ____________
3. Wandle in ein Produkt um.

   $a^2+10a+25 =$ ________ $9b^2+12bc+4c^2 =$ ________

   $0{,}25c^2+c+1 =$ ________ $x^2+6x+10 =$ ________

Expertenaufgaben 2

Berta möchte sich den Term $(a-b)^2$ zu veranschaulichen. Für die Strecke a wählt sie 7 Kästchenlängen und für b 2. Als Summendarstellung für $(a-b)^2$ liest sie aus ihrer Darstellung a^2-2ab ab. Bei der rechnerischen Kontrolle fällt ihr aber auf, dass die Terme nicht äquivalent sein können.

1. Führe Bertas Veranschaulichung von $(a-b)^2$ aus. Markiere a^2 und $(a-b)^2$.
2. Prüfe die Äquivalenz von $(a-b)^2$ und a^2-2ab anhand Bertas Beispiels.
3. Finde Bertas Fehler in der Summendarstellung und korrigiere ihn.
4. Formuliere eine Berechnungsvorschrift für „fast“-Quadrate wie 39^2.

Übung 2 **(Bearbeitung ohne, Kontrolle mieth TR)**

1. Wandle in eine Summe um.

   $(a-3)^2 =$ ____________ $(2b-c)^2 =$ ____________

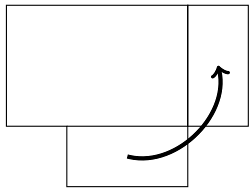
   $\left(\frac{d}{2}-\frac{2}{3}\right)^2 =$ ____________ $(x-y-z)^2 =$ ____________
2. Wandle in ein Produkt um.

   $a^2-10a+25 =$ ________ $9b^2-12bc+4c^2 =$ ________

   $0{,}25d^2-d+1 =$ ________ $x^2-6x+10 =$ ________

3. Berechne.
   $89^2 =$ ____________ $68^2 =$ ____________ $37^2 =$ ____________ $19^3 =$ ____________

Expertenaufgaben 3



Conrad grübelt über einer unbeschrifteten Abbildung. Sie soll die Faktorisierung von $a^2 - b^2$ veranschaulichen. Angeblich kann man so leicht Produkte wie $48 \cdot 52$ berechnen.
Aber Conrad kann a und b nicht zuordnen.

1. Finde die Veranschaulichung der Differenz der Flächeninhalte der Quadrate.

2. Begründe die Flächenverwandlung ($\nearrow$).

3. Formuliere die so veranschaulichte Termumformung.

4. Formuliere eine Berechnungsvorschrift für Produkte wie $39 \cdot 41$ oder $94 \cdot 86$.

Übung 3 **(Bearbeitung ohne, Kontrolle mieth TR)**

1. Wandle in ein Produkt um.

   $a^2 - 25 =$ ____________________ $9b^2 - 4c^2 =$ ____________________
   $0{,}25d^2 - 4 =$ ____________________ $x^2 - 8 =$ ____________________

2. Wandle in eine Summe um.

   $(a-3)\cdot(a+3) =$ ____________ $(2b+c)\cdot(2b-c) =$ ____________
   $\left(\frac{d}{2} - \frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{d}{2} + \frac{2}{3}\right) =$ ____________ $(x-y)\cdot(y-x) =$ ____________

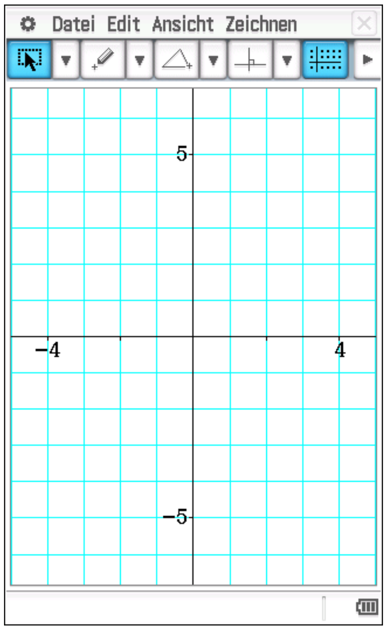
3. Berechne.
   $89 \cdot 91 =$ ____________ $47 \cdot 53 =$ ____________ $4{,}5 \cdot 3{,}5 =$ ____________

10.2 lineare Funktionen

Lineare Funktionen sind eine spezielle Klasse von Funktionen, mit denen man z.B. das Wachstum eines Stoßzahns, das Abbrennen einer Kerze oder die gleichförmige Bewegung beschrieben und analysiert werden können. Allerdings geht es zunächst mathematisch los: mit dem Zeichnen von Geraden. Im Laufe der nächsten Jahre wirst Du weitere Funktionsklassen kennenlernen, bevor zu Beginn der 11. Klasse die linearen Funktionen wieder ins Zentrum des Geschehens rücken.

In den folgenden Kapiteln sollst Du Dir selbstständig und zunächst mit Hilfe des `ClassPad` die Eigenschaften dieser Funktionen erarbeiten. Dabei wirst Du Zusammenhänge erkennen, die es Dir ermöglichen, mehr und mehr auf den Rechner zu verzichten. Das erste Kapitel gibt Dir einige Hinweise, die Dir das Finden der Zusammenhänge erleichtern können.

Allgemeine Arbeitshinweise



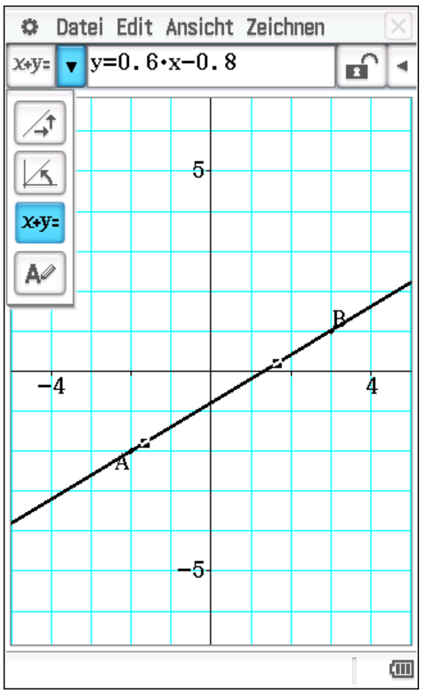
- Arbeite jeweils mit der angegeben Anwendung des ClassPad. In den Übungen sollst Du selbst entscheiden, ob und wie Du den Rechner einsetzt.
- Lass Dir in der `Geometrie` die Koordinatenachsen mit Maßeinteilung und das ganzzahlige Gitter anzeigen.
- Beginne zunächst mit einem beliebigen, aber nicht zu extremen Beispiel. Gehe dann möglichst systematisch vor (z.B. verändere (zunächst) nur die x-Koordinate in 1er Schritten). Die Anzahl der Beispiele kannst Du selbst wählen. Unterscheide ggf. verschiedene Fälle (z.B. Vorzeichen).
- Notiere geeignet Deine Untersuchungsergebnisse (z.B. in einer Tabelle, s.u.).
- Versuche für jede Aufgabe eine möglichst allgemein gültige Antwort zu finden. Gleiche Deine Erkenntnisse nach der Bearbeitung mit dem Tafelwerk und dem Lehrbuch ab.

Nr.	Punkt 1	Punkt 2	Gleichung	Monotonie	S_x	S_y	...
1	$A(-1\|-3)$	$B(3\|5)$	$y = 2 \cdot x - 1$	steigend	$S_x(0,5\|0)$	$S_y(0\|-1)$	
2							
...							

Anstieg und Achsenabschnitt

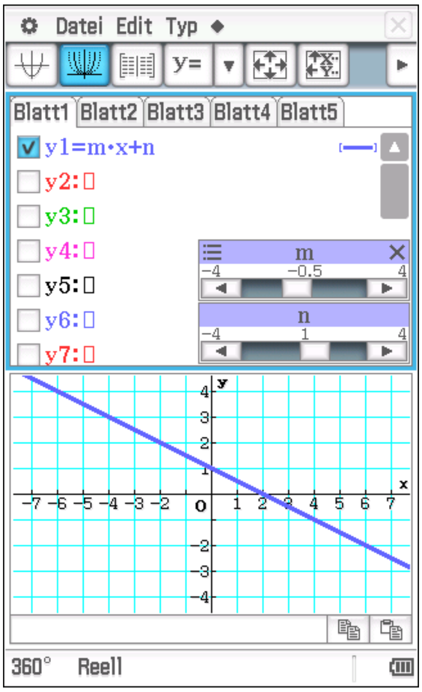
In diesem Abschnitt geht es um die „Form“ der Funktionsgleichung und die darin auftretenden „Parameter“ (Zahlen).

Geometrie



1. Zeichne eine Gerade durch zwei Punkte. Entscheide, ob sie Graph einer Funktion ist und begründe.
   Beschreibe die Lage einer Gerade, die kein Funktionsgraph ist. Letztere Geraden werden im Folgenden nicht mehr betrachtet.
2. Wähle die Gerade aus und lasse Dir bei den Eigenschaften 26.56505 die beschreibende Gleichung angeben. Verschiebe nun die Gerade (durch Klicken und Ziehen) und vergleiche die Gleichungen hinsichtlich ihrer Gestalt und der auftretenden Parameter.
3. Lege nun die Koordinaten eines Punktes so fest, dass er auf der Ordinatenachse (= y-Achse) liegt. Verändere nun die Lage des anderen Punktes und vergleiche die Funktionen.

Grafik & Tabelle



1. Gib den allgemeinen Funktionsterm einer linearen Funktion ein.

2. Wähle als Darstellungsart die `dynamische Grafik` und ändere die Vorgabewerte der Parameter auf

Minimum	-4
Maximum	4
Schrittweite	$0{,}5$

   Verändere die Parameter in Einzelschritten und lass Dir für beide Parameter die `automatische Wiedergabe` vorführen.

3. Beobachte den Einfluss der Parameter auf die Funktionseigenschaften (Monotonie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, ...).
   Ordne die Begriffe **Anstieg** und **Achsenabschnitt** dem entsprechenden Parameter zu.

Übung

1. Lehrbuch: Seite 122, Nummer 9, 10

2. Gib jeweils an, ob es sich bei folgenden Funktionen um eine lineare handelt.
   Gib ggf. Anstieg und Achsenabschnitt an.

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = 2x + 10 & f_2(x) = -3x + \frac{1}{7} & f_3(x) = x - 5 & f_4(x) = (x-2)^2 \\ g_1(x) = 3x^2 + 10 & g_2(x) = -3x + \frac{1}{x} & g_3(x) = 5 - x & g_4(x) = (x-2)^2 - x^2 \end{array}$$

3. Waagerechte und senkrechte Geraden werden durch besondere Gleichungen beschrieben. Gib diese Gleichungen allgemein an.

Differenzenquotient

In diesem Abschnitt geht es um den Anstieg einer linearen Funktion und dessen Berechnung aus zwei Punkten der Geraden.

Geometrie

Der Graph der Funktion g ist eine Gerade und verläuft durch die Punkte $A(2|5)$ und $B(x|y)$.

1. Beschreibe die Lage des Punktes B relativ zu A (oben, unten, links, rechts), so dass g die entsprechende Monotonie aufweist:

Monotonie	Lage von B bzgl. A	Koordinaten von B	Anstieg m
steigend			
fallend			

   Skizziere in einem Koordinatensystem je ein Beispiel.

2. Beschreibe (für monoton steigende Funktionen g) die Lage und Koordinaten von B, damit der Graph besonders steil (bzw. flach) verläuft.

3. Zeichne nun eine Gerade durch A und B. Verändere nun die Lage von B so, dass sich die x-Koordinaten von A und B um 1 unterscheiden (x-Differenz $= 1$) und beobachte die

  A. K. Mieth

Auswirkung auf den Anstieg.

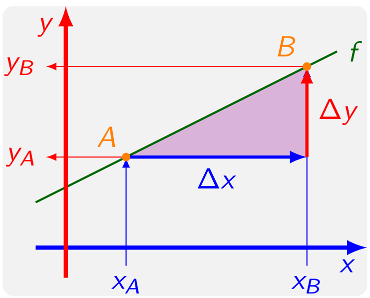
4. Wähle andere x-Differenzen (z.B. $3, \frac{1}{2}, -10, \ldots$) und untersuche wie zuvor. Formuliere einen Zusammenhang.

	y_B	$y_B - y_A$	m
$A(2\|5)$			
$B(3\|y_B)$	6	1	1
	7	2	...

- Lies Dir im Lehrbuch den Eingangstext zu linearen Funktionen (S.118f) und den Informationsrahmen S.123, unten durch.
  Vergleiche diese Zusammenfassung mit deinen Untersuchungsergebnissen.

- Sieh Dir die Präsentation `AnstiegLinFunkt.pdf` Seite für Seite an.
  Erläutere den Zusammenhang zwischen der Grafik und der Rechnung.

Anstieg einer linearen Funktion



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= y & y &= m \cdot x + n \\
f(x_A) &= y_A & y_A &= m \cdot x_A + n \\
f(x_B) &= y_B & y_B &= m \cdot x_B + n \\
\hline
\Delta y &= y_B - y_A & &= m \cdot x_B + n - (m \cdot x_A + n) \\
& & &= m \cdot x_B + n - m \cdot x_A - n \\
& & &= m \cdot x_B - m \cdot x_A \\
& & &= m \cdot (x_B - x_A) \\
& & \Delta y &= m \cdot \Delta x
\end{aligned}$$

- Beschreibe allgemein das **Steigungsdreieck** (Lage, Form, Größe).

Übung Lehrbuch Seite 125, Nummer 1-6

Nullstelle

1. Formuliere den Zusammenhang zwischen einer Nullstelle x_0 und einem Schnittpunkt S_x mit der Abszissenachse (= x-Achse). Vergleiche dazu den Zusammenhang zwischen S_y und n. Leite daraus einen Ansatz zur Berechnung der Nullstelle ab.

2. Gib eine allgemeingültige Berechnungsvorschrift für die Nullstelle x_0 einer linearen Funktion $y = mx + n$ an.

3. **Übung** LB S.128f, Nr.1-6

Zusammenfassung

1. Die Gleichung einer linearen Funktion lässt sich in die Form bringen

   $y =$ ________________ $(x \in \mathbb{Q})$

2. Der Graph einer linearen Funktion ist ________________

3. Zum Graph der linearen Funktion gehört der Punkt ________
4. Der Anstieg einer linearen Funktion kann aus den Koordinaten zweier Punkte mit dem ________________________ berechnet werden.
5. Erhöht man bei einer linearen Funktion das Argument um 1, so ________________________________
6. Das Vorzeichen des Anstieges gibt ________________________ an.
7. Der Betrag des Anstieges gibt an, ________________________________.
8. Wenn der Anstieg einer linearen Funktion ________________ ist, dann kann man ________________ mit $-\frac{n}{m}$ berechnen.

10.3 quadratische Funktionen

Normalformen

In diesem Arbeitsblatt geht es darum, aus dem Term einer quadratischen Funktion deren Funktionseigenschaften zu ermitteln. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall, dass in der allgemeinen Darstellung einer quadratischen Funktion $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ der Parameter $a = 1$ ist. Das ist gleichbedeutend mieth der Aussage, dass die Graphen aus dem von $y = x^2$ durch Verschieben hervorgehen.

Die Angabe **miHimi/oHiMi** soll Dir als Orientierung dienen, ob Du möglichst ohne TR arbeiten oder ihn von Anfang an einsetzen sollst. Als Kontrollinstrument ist er immer sinnvoll und ggf. auch als Hilfe. Versuche aber in letzterem Fall, den Weg oHiMi nachzuvollziehen.

Normalparabel **oHiMi**

Die Graphen quadratischer Funktionen heißen **Parabel**. Der Graph zu $y = x^2$ definiert die Grundform und wird als **Normalparabel** bezeichnet. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion (bzw. ihres Graphs) sind der Scheitelpunkt (Tief- bzw. Hochpunkt der Parabel), die Symmetrieachse und der Wertebereich.

1. Erstelle (oHiMi) eine Wertetabelle von $y = x^2$ für die Argumente $-4 \leq x \leq 4$ in $\frac{1}{2}$-Schritten. Nutze ggf. die binomischen Formeln zum Berechnen, z.B. $3{,}5^2 = (3 + 0{,}5)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 12{,}25$
2. Erstelle eine Zoomfolge (mehrere Darstellungen in feiner werdender Auflösung) des Graphen von $y = x^2$. Verwende für die x- und y-Achse den gleichen Maßstab. Verfeinere ggf. die Wertetabelle.

Zoom	Intervall	Maßstab
weit	$-5 \leq x \leq 5$	1 KL = 1
mittel	$-2 \leq x \leq 2$	1 KL = 0,25
nah	$-1 \leq x \leq 1$	1 KL = 0,1

3. Gib den Scheitelpunkt, die Symmetrieachse und den Wertebereich der Funktion $y = x^2$ an.

Scheitelpunktform **miHiMi**

Für das Verschieben von Funktionsgraphen (und den Term der zugehörigen Funktion) gelten die gleichen Regeln, wie bei den Potenzfunktionen.

1. Verschiebe die Normalparabel $f(x) = x^2$ zunächst um -4 in y-Richtung.

(a) Gib den Scheitelpunkt, die Symmetrieachse und den Wertebereich (des Graphen) der neuen Funktion f_1 an.

(b) Gib eine Gleichung von f_1 an.

Verschiebe den Graphen von f_1 nun (weiter) um 3 in x-Richtung.

(c) Gib den Scheitelpunkt, die Symmetrieachse und den Wertebereich (des Graphen) der neuen Funktion f_2 an.

(d) Gib eine Gleichung von f_2 an.

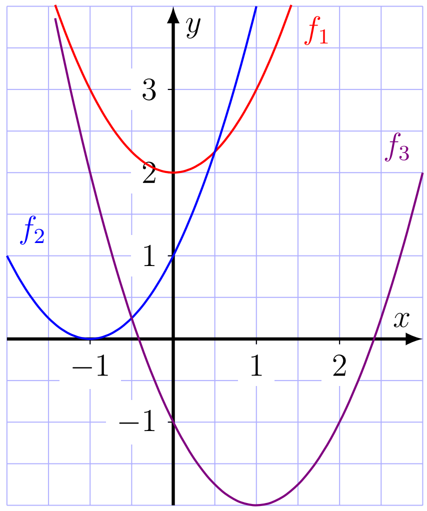
2. Verändere die Reihenfolge und die Werte in Aufgabe 1. und wiederhole die Untersuchung. Formuliere Zusammenhänge.
3. Gib den Scheitelpunkt, die Symmetrieachse und den Wertebereich (des Graphen) der Funktion $g(x) = (x - 12)^2 + 7$ an.
4. Die Normalparabel wurde so verschoben, dass die jeweilige Funktion folgende Eigenschaften hat:

   (a) Scheitelpunkt $S(-2|1)$

   (b) Wertebereich $\{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 5\}$, Symmetrieachse $x = 3$

   (c) Graph aus nebenstehender Abbildung

   Gib jeweils die fehlenden Eigenschaften und eine Gleichung an.



Darstellungsformen des Funktionsterms **miHiMi**

Definition

Die Term einer quadratischen Funktion, deren Graph durch Verschiebung der Normalparabel entstanden ist, kann in verschiedenen Formen angegeben werden:

Name	Funktionsterm
Scheitelpunktform	$(x-d)^2 + e$
Normalform	$x^2 + p \cdot x + q$
Linearfaktoren	$(x-r) \cdot (x-s)$

1. Gegeben sind die Funktionen f, g und h:

$$f(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad g(x) = x^2 + 4 \cdot x + 3 \qquad h(x) = (x-2) \cdot (x-4)$$

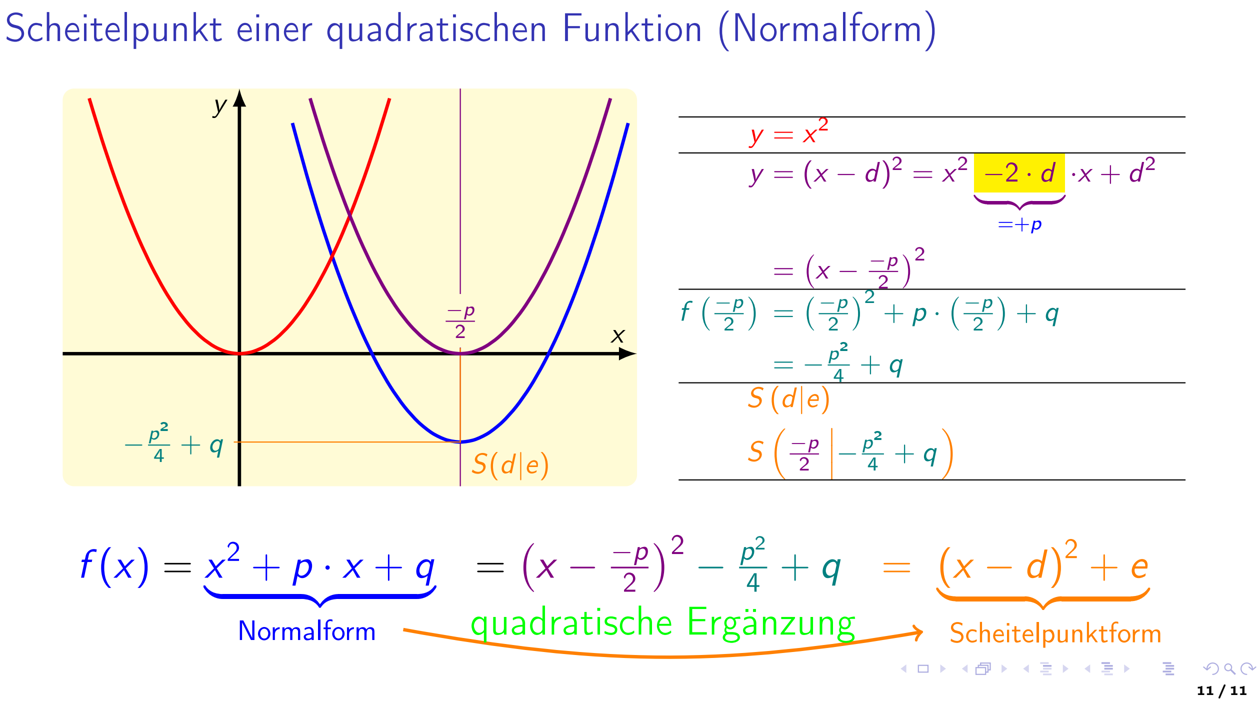
   Gib jeweils folgende Funktionseigenschaften an: Scheitelpunkt, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrieachse, Wertebereich
   Wandle den Term jeder Funktion in beide anderen Formen um.

```
Define f(x)=(x+1.5)^2-6.25
                              done
expand(f(x))
                          x^2+3·x-4
rFactor(f(x))
                        (x+4)·(x-1)
```

2. Ermittle eine Gleichung der quadratischen Funktion den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$ in der Normalform.

3. Beschreibe eine Möglichkeit, aus der Normalform oder den Linearfaktoren den Scheitelpunkt (ggf. oHiMi) einer quadratischen Funktion zu ermitteln.
   Nutze dazu auch die Präsentation `QuadFun-Scheitelpunktform.pdf`:

4. Beschreibe möglichst allgemein die Bedeutung der Parameter d und e (oder p und q bzw. r und s in der jeweiligen Form) für die quadratische Funktion bzw. ihren Graph.



Allgemeine Formen

In diesem Arbeitsblatt geht es darum, den Einfluss eines Faktors a auf den Verlauf des Graphen und die Eigenschaften einer quadratischen Funktion zu untersuchen. Dabei nehmen wir die drei Grundformen (Scheitelpunktform, Normalform, Linearfaktoren) zunächst einzeln unter die Lupe, und führen die Ergebnisse anschließend zusammen. Ein neues Arbeitsmittel am Taschenrechner ist dabei der Schieberegler, dessen Verwendung du im zweiten Abschnitt kennenlernen wirst.

3 neue Graphen **oHiMi**

$y = 2\cdot x^2$
$y = 0{,}5\cdot x^2$
$y = -1\cdot x^2$

Den Graph der Funktion $y = x^2$ hast du bereits gezeichnet.
In dieser Aufgabe geht es um die Graphen der Funktionen

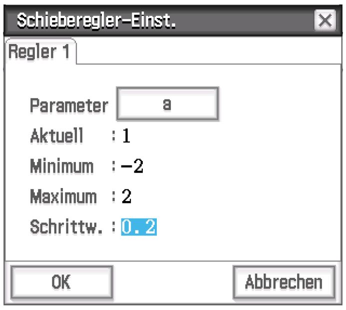
1. Vervollständige nebenstehende Wertetabelle.
2. Stelle alle Wertepaare in einem Diagramm graphisch dar.
   Ergänze die Graphen der Funktionen.

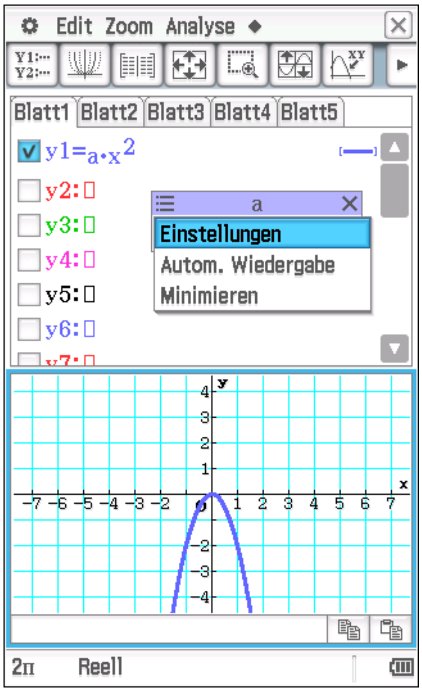
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^2							
$2\cdot x^2$							
$0{,}5\cdot x^2$							
$-1\cdot x^2$							

3. Verdeutliche die „Entstehung“ der y-Werte der 3 neuen Funktionen aus denen der Funktion $y = x^2$ in der Wertetabelle und in der graphischen Darstellung.

nicht mehr normal, diese Parabel **miHiMi**

1. Gib in `Grafik & Tabelle` die Funktion $a \cdot x^2$ ein.
2. Wähle die `dynamische Grafik`
3. Wähle als Zoomstufe `Initialisieren`
4. Du kannst den `Schieberegler` am farbigen Kopf halten und verschieben.
   Passe die `Einstellungen` wie abgebildet an.





5. Benutze die Pfeiltasten am Schieberegler, um die Werte für a langsam ablaufen zu lassen.
   Probiere auch die `Autom. Wiedergabe`.
6. Vergleiche deine Beobachtungen hier mit denen aus dem vorherigen Kapitel.

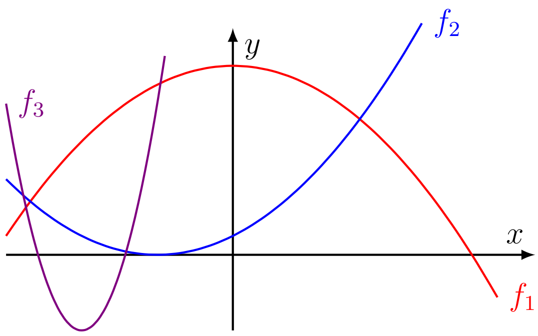
3× nicht dasselbe

Untersuche den Einfluss des Parameters a auf die Eigenschaften und den Graphen der Funktionen

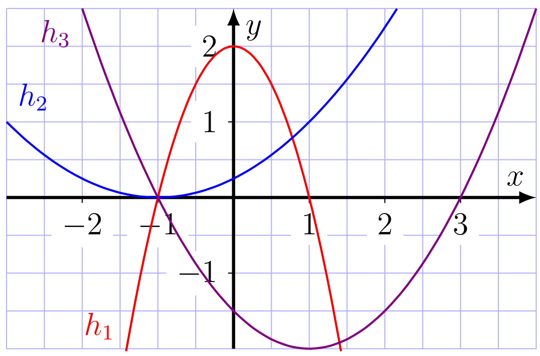
$$f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 3 \qquad g(x) = a \cdot x^2 + 4 \cdot x + 3 \qquad h(x) = a \cdot (x-2) \cdot (x-4)$$

Beschreibe und vergleiche die Veränderungen. Begründe die Unterschiede.

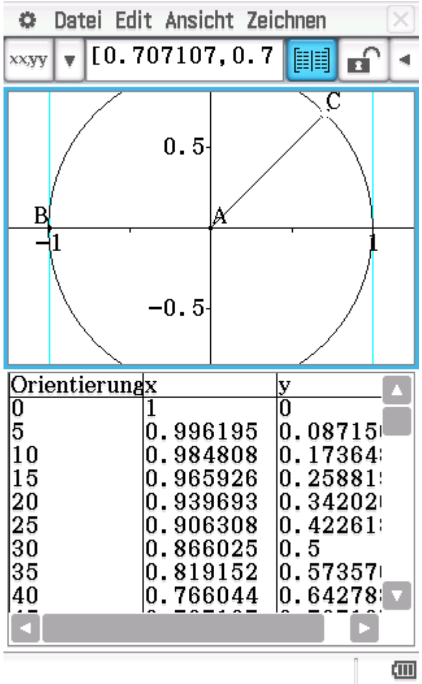
1. In nebenstehender Abbildung sind die Graphen von quadratischen Funktionen zu sehen.
   (a) Begründe folgende Aussagen:
   $$a_1 < 0 \qquad |a_1| = |a_2| \qquad a_2 < a_3$$
   (b) Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.

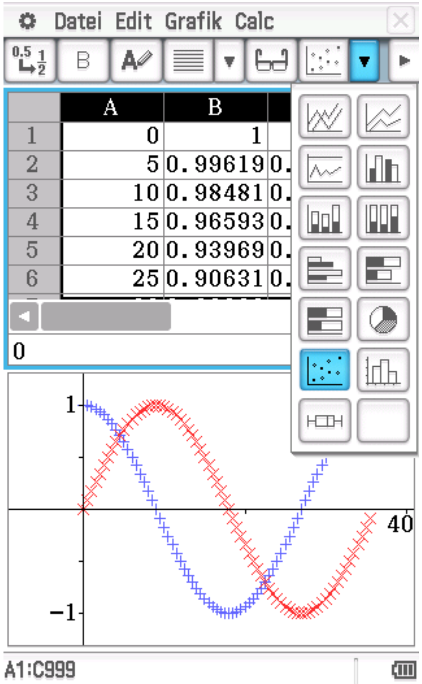


2. Gib den Scheitelpunkt, die Symmetrieachse und den Wertebereich (des Graphen) der Funktionen g_i an
   $$g_1(x) = 0{,}2 \cdot (x+5{,}3)^2 - 4{,}1 \qquad g_2(x) = -5 \cdot (x+3) \cdot (x-1)$$
3. Gib jeweils eine mögliche Gleichung der quadratischen Funktion an.
   (a) Scheitelpunkt $S(-2|1)$ und in y-Richtung gestaucht
   (b) Wertebereich $\{y \in \mathbb{R} \,|\, y \leq 5\}$, Symmetrieachse $x = 3$
   (c) Graph aus nebenstehender Abbildung



10.4 Allgemeine Sinusfunktion (Gruppenpuzzle)



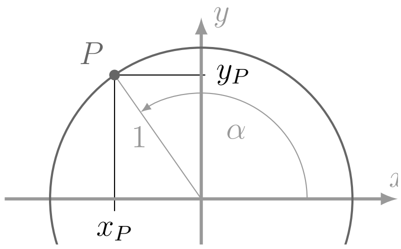


Animation: (Co)Sinus am Einheitskreis

In der `Geometrie` wird zunächst eine Animation (Punkt auf dem Einheitskreis) erstellt, die eine Wertetabelle für die Zusammenhänge zwischen Winkel und Punktkoordinaten liefert. Diese kann in die `Tabellenkalkulation` kopiert und dort graphisch dargestellt werden. Dieses Vorgehen liefert einerseits den Graphen (d.h. die erste Periode) der (Co)Sinus-Funktion als auch die Vorlage für das Gruppenpuzzle. In den Expertengruppen wird die Konstruktion modifiziert.

1. ggf. Koordinatensystem vorbereiten
   Gitter einblenden
   Zoomstufe wählen + −
2. Einheitskreis zeichnen
   Mittelpunkt und Radius „begrenzen“
3. Radius (von Mittelpunkt zum Rand) zeichnen
4. Randpunkt und Kreis markieren
   `Edit - Animation - Animation hinzufügen`
   ggf. `... - Animation bearbeiten`
   `... - Animation ablaufen lassen`
5. Radius markieren
   orientierten Winkel anzeigen
   Wertetabelle auslesen
6. Punkt markieren
   Koordinaten anzeigen
   Wertetabelle auslesen
   Spalten markieren ⇒ `Edit - Kopieren`
7. Wechsel zur TK
   `Edit - Einfügen`
   graphische Darstellung

Weg vom Einheitskreisbrei



Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sind an einem Kreis mit Radius $r = 1$ definiert, dessen Mittelpunkt $M(0|0)$ im Koordinatenursprung liegt und der als Einheitskreis bezeichnet wird.

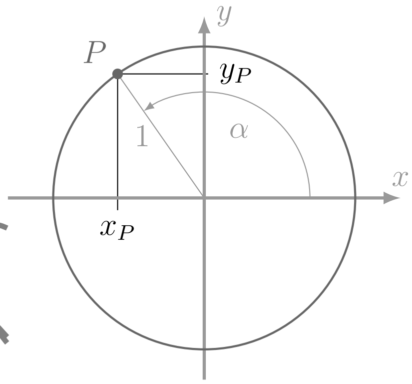
1. Animiere die Bewegung eines Punktes P am Einheitskreis und stelle (in der Tabellenkalkulation) die entsprechenden Messwerte für den Zentriwinkel α und die Koordinaten des Punktes graphisch dar. Gib jeweils eine Gleichung an.
2. Untersuche den Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Mittelpunktes sowie dem Radius des Kreises und der Darstellung (Graphen und Gleichungen) in der Tabellenkal-

kulation.

3. Gib die Gleichungen für die Koordinaten eines Punktes auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2|-1)$ und dem Radius $r = 4$ an.

4. Erstelle eine Übersicht deiner Erkenntnisse.

Schwingungen



Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus können zur Beschreibung einer harmonischen Schwingung benutzt werden. Dabei spielen die physikalischen Größen Frequenz, Periodendauer, Amplitude und Elongation eine Rolle.

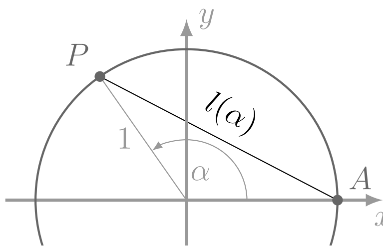
1. Informiere dich im Tafelwerk über die funktionale Darstellung einer harmonischen Schwingung (und die gleichförmige Rotation) und stelle verschiedene Schwingungen graphisch dar.

2. Stelle Zusammenhänge zwischen den physikalischen Größen, dem Funktionsterm und dem Graphen her.

3. Ein Massestück ($m = 200\,\mathrm{g}$) hängt an einer Feder in Ruhe 20 cm über der Tischplatte. Nach einer Energiezufuhr schwingt es mit einer Periodendauer von 0,2 s und einer Amplitude von 2 cm. Gib eine Gleichung für die Höhe $y(t)$ des Massestücks über der Tischplatte an.

4. Erstelle eine Übersicht deiner Erkenntnisse.

Neues vom Einheitskreis



Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sind an einem Kreis mit Radius $r = 1$ definiert, dessen Mittelpunkt $M(0|0)$ im Koordinatenursprung liegt und der als Einheitskreis bezeichnet wird.

1. Animiere die Bewegung eines Punktes P am Einheitskreis.

2. Verbinde P mit dem Punkt $A(1|0)$.
   Stelle die Länge der Strecke $l = \overline{AP}$ in Abhängigkeit vom Winkel α graphisch dar.

3. Gib Eigenschaften der Funktion $l(\alpha)$ an.

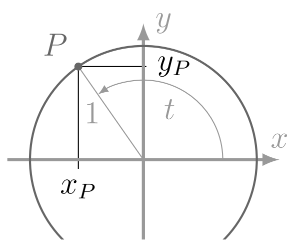
4. Ermittle eine Funktionsgleichung für $l(\alpha)$ durch Herleitung aus der geometrischen Situation und durch Regression.

5. Erstelle eine Übersicht deiner Erkenntnisse.

Zurück zum Kreis

Bezeichnet man den Zentriwinkel im Bogenmaß mit t, so gilt für die Koordinaten des Punktes P auf dem Einheitskreis:

$$x_P(t) = \cos(t)$$
$$y_P(t) = \sin(t)$$



1. Ändert man im $\boxed{\text{Grafik \& Tabelle}}$ - Menü die Einstellung des Typs von $\boxed{y=}$ (Funktion) in $\boxed{x_t=}$ (Parameterkurve), so kann man genau diese Gleichungen eingeben.
   Beachte, dass beim Darstellungsfenster neben den x- und y-Koordinaten auch die Werte für $0 \leq t \leq 2\pi$ eingegeben werden müssen.
2. Untersuche die Auswirkung von Summanden und Faktoren, die den Termen hinzugefügt werden.
3. Stelle auf diese Weise einen Kreis mit Radius $r = 4$ und Mittelpunkt $M(2|-1)$ dar.
4. Erstelle eine Übersicht deiner Erkenntnisse.

10.5 Umkehrfunktion (Gruppenpuzzle)

Ablauf

S1 Findet euch in 4-er Stammgruppen. Teilt euch in die Expertenrunden auf.

E Bearbeitet eure Aufgaben in der Expertengruppe.
Klärt möglichst offene Fragen dort bzw. formuliert diese als solche.

(a) Entscheide, ob es sich bei der „neuen“ Zuordnung um eine Funktion handelt und begründe.

(b) Verändere die Darstellung ggf. so, dass auch die „neue“ Zuordnung eine Funktion ist.

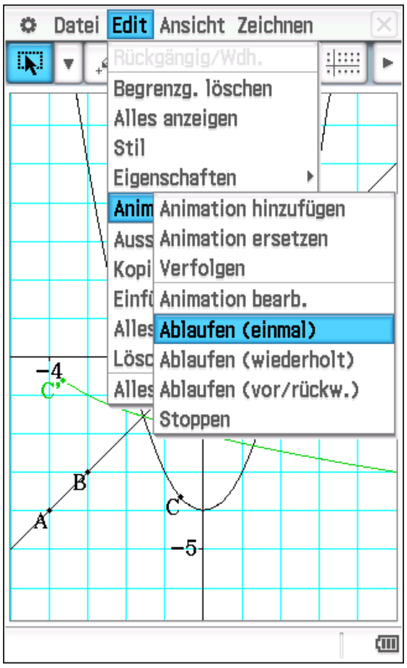
(c) Vergleiche deren Eigenschaften mit denen der Ausgangsfunktion. Formuliere ggf. den Zusammenhang.

(d) Ermittle möglichst einen Term der „neuen“ Funktion.

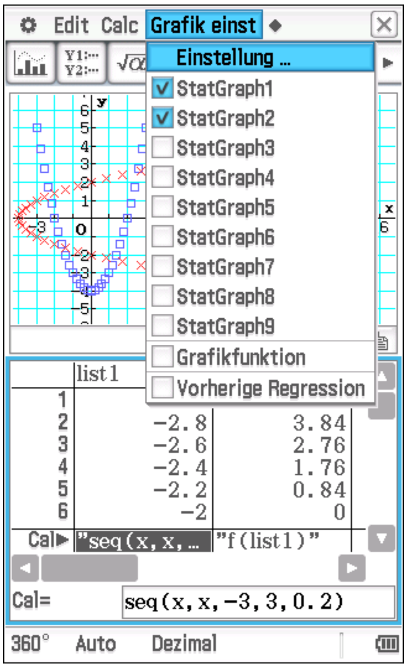
S2a Erläutert der Stammgruppe eure Vorgehensweise kurz. Stellt die Ergebnisse möglichst kompakt dar.

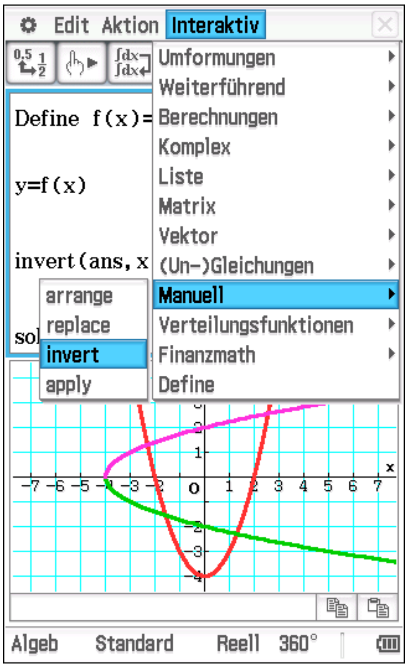
S2b Setzt euch mit dem Begriff der Umkehrfunktion f^{-1} auseinander.
Versucht, eure Erkenntnisse zu verallgemeinern. Ordnet (Gegen-) Beispiele zu.

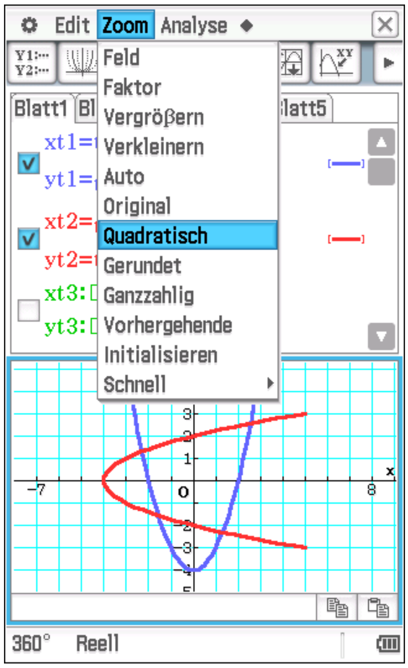
- Nennt Bedingungen, unter denen eine Umkehrzuordnung (k)eine Umkehrfunktion ist.
- Stellt Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften der Ausgangs- und der Umkehrfunktion her.
- Ordnet (wenn möglich) jeder Funktionsklasse die Umkehrfunktionsklasse zu.
- Diskutiert den Einfluss von Verschiebe- und Streckungsparametern.



$f_1(x) = 2x - 1$	$g_1(x) = 1 - \frac{x}{2}$
$f_2(x) = x^2 - 4$	$g_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$
$f_3(x) = \frac{2}{x}$	$g_3(x) = 2x^{\frac{3}{8}}$
$f_4(x) = \sin(2x + 1)$	$g_4(x) = 2\cos(x) + 1$
$f_5(x) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$	$g_5(x) = \frac{2}{9} \cdot 3^x$







Punkt spiegeln Geometrie

- Zeichne die Winkelhalbierende w_I des I. Quadranten.
- Stelle die Ausgangsfunktion graphisch dar.
- Zeichne einen Punkt C auf dem Funktionsgraph.
- Spiegele C an der Geraden w_I.

Animiere den Punkt C auf dem Funktionsgraph.
Lasse den Spiegelpunkt C' verfolgen.

Werte tauschen Statistik

1. Speichere die zu untersuchende Funktion als $f(x)$.
2. Erstelle eine Wertetabelle der Ausgangsfunktion.
3. Ändere die Einstellung der Statistik-Graphen zu
4. Stelle beide Zuordnungen graphisch dar. Wähle als letzten Zoom `Quadratisch`.

	Stat-Graph 1	Stat-Graph 2
Zeichnen	Ein	Ein
Typ	Punkteplot	Punkteplot
xList	`list1`	`list2`
yList	`list2`	`list1`

Gleichung umstellen Main

1. Gib die Funktionsgleichung $y = f(x)$ ein.
2. Wende nun nacheinander die Befehle `invert(ans,x,y)` und `solve(ans,y)` an.
3. Beschreibe die Wirkung dieser Befehle.
4. Stelle die „neuen“ Funktionen graphisch dar. Wähle als letzten Zoom `Quadratisch`.

Parameter vertauschen Grafik & Tabelle

1. Ändere den Darstellungstyp auf „Parameter“ $\boxed{xt =}$.

2. Gib die Ausgangsfunktion $\left| \begin{array}{l} xt1 = t \\ yt1 = f(t) \end{array} \right.$ und ihre vertauschte $\left| \begin{array}{l} xt2 = f(t) \\ yt2 = t \end{array} \right.$ ein.

3. Fenster-Einstellungen unter t: Definitionsbereich und Schrittweite ($\approx 0{,}1$)

4. Stelle beide Parameterkurven graphisch dar. Wähle als letzten Zoom `Quadratisch`.

10.6 Einführung 1. Ableitung (ohne Differentialquotient)

Bei der Untersuchung von Funktionen ging es bisher u.a. um Nullstellen, Monotonie, Extrempunkte und Asymptoten. Für einige Funktionsklassen (z.B. linear, quadratisch, exponentiell, trigonometrisch) können Sie diese Eigenschaften bereits ohne Hilfsmittel angeben bzw. rechnerisch ermitteln, z.B.

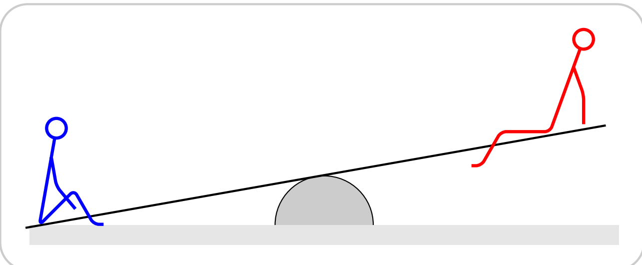
Der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$ ist $S\left(-\frac{p}{2} \middle| q - \frac{p^2}{4}\right)$

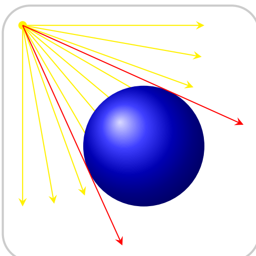
In komplizierteren Situationen (z.B. für die Extrempunkte des Graphen von $g(x) = x^3 - 12 \cdot x$) mussten Sie bislang auf den Rechner zurückgreifen. Das soll sich nun ändern. Ausgehend vom Begriff der Tangente wird u.a. eine rechnerische Methode entwickelt und begründet, mit der man die Art (Hoch- oder Tiefpunkt) und die Lage (Koordinaten) eines Extrempunktes am Graph beliebiger Funktionen ermitteln kann.

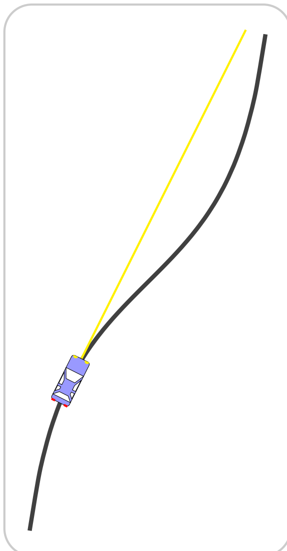
Tangente

Die Tangente bildet den Ausgangspunkt der Differentialrechnung. Es gibt verschiedene Situationen, deren mathematische Modellierung darauf zurückgreift.

- ein gerader Gegenstand liegt auf einem krummen
- Schattenrand oder Winkeldurchmesser eines runden Objektes
- Fahrtrichtung eines Pkw in einer Kurve







Das konstruktive Anlegen einer Tangente an den Kreis (und an Ellipse, Parabel und Hyperbel) ist seit der Antike bekannt. Die Verallgemeinerung auf beliebige krumme Linien (insbesondere Funktionsgraphen) hat fast 2000 Jahre gedauert. Im nächsten Abschnitt vollziehen Sie diesen Weg nach.

Arbeitshinweise

Zunächst werden am Beispiel der Funktion f_1 das grundlegende Vorgehen am `ClassPad` und die wichtigen Begriffe dieses Abschnittes eingeführt. Deine Beobachtungen sollten Sie dabei mit Ihrem Vorwissen abgleichen.

Nicht alle Beobachtungen sind verallgemeinerbar. Ein Beispiel bedeutet noch keine Sicherheit. Deshalb werden Sie an weiteren Funktionen das Vorgehen durchspielen und dabei immer besser vorhersehen, welche Ergebnisse der `ClassPad` liefern wird.

Nach der Bearbeitung dieses Abschnittes sollten Sie über diese Begriffe klare Vorstellungen haben:

- Tangente am Funktionsgraph
- Ableitung einer Funktion
- Zusammenhänge zwischen Funktion, Tangente und Ableitung

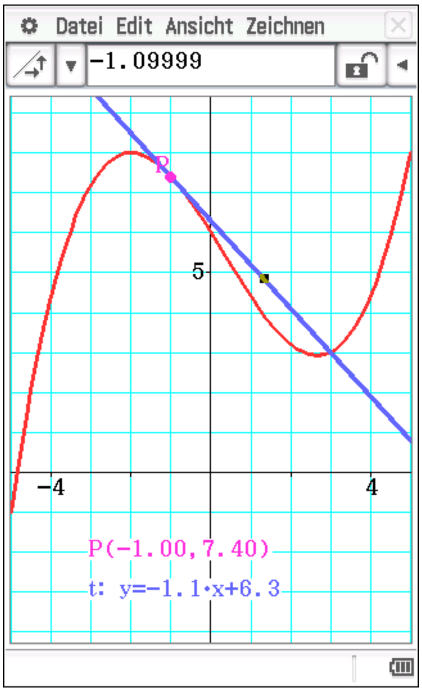
Funktionseigenschaften

Geben Sie folgende Eigenschaften der Funktion $f_1(x) = 0,1 \cdot x^3 - 0,1 \cdot x^2 - 1,6 \cdot x + 6$ bzw. ihres Graphs an:
Definitionsbereich Wertebereich Nullstellen Extrempunkte Monotonie Symmetrie

Tangente zeichnen

Stellen Sie f_1 in der `Geometrie`-Anwendung graphisch dar und legen Sie an der Stelle $x_1 = -1$ eine Tangente t_1 an. Diese können Sie durch Bewegen des Punktes auf dem Graphen verändern.

1. Geben Sie eine Gleichung und Eigenschaften von t_1 an.
2. Vergleichen Sie die Eigenschaften von f_1 und t_1 bzw. ihres Graphs.
3. Vergleichen Sie die Situationen „Tangente an einen Kreis“ und „Tangente an den Graphen einer Funktion“.



- ☑ Tangenten lassen sich auch an Funktionsgraphen anlegen, allerdings versagen hier die klassischen Definitionen „senkrecht zum Radius“ und „genau ein Schnittpunkt“.
- ☑ Das „Tangieren“ findet in der näheren Umgebung des Tangentenpunktes statt, ist also eine **lokale** Eigenschaft.
- ☑ Die Monotonie der Funktion (in der Umgebung eines Punktes) und die der Tangente stimmen überein.

Tangente animieren

Wie das DGS die Tangente anlegt, ist uns bislang unbekannt. Darauf kommen wir später zurück. Jetzt soll aus dem statischen Bild ein dynamisches werden.

- Markieren Sie den Funktionsgraph und den Tangentenpunkt und wählen Sie

  `Edit` ⇒ `Animieren` ⇒ `Animation hinzufügen (und ablaufen)`

- Markieren Sie (nur) den Punkt und blenden Sie dessen Koordinaten ein.

- Markieren Sie (nur) die Tangente und blenden Sie deren Gleichung ein.
- Lassen Sie nun (evtl. mehrfach) die Animation ablaufen und beobachten Sie.

---

1. Beschreiben Sie die Bewegung der Tangente.
2. Beschreiben Sie Punkte des Funktionsgraphs mit „besonderem“ Anstieg.
3. Formulieren Sie eine Definition für den „Anstieg einer Funktion“.

☑ Wenn der Tangentenpunkt sich auf dem Graphen verschiebt, dann dreht sich Tangente je nach Verlauf des Graphen links- bzw. rechtsherum.

☑ Die Drehrichtung wechselt in dem Punkt mit der steilsten Tangente.

☑ An den Extrempunkten liegt die Tangente waagerecht an.

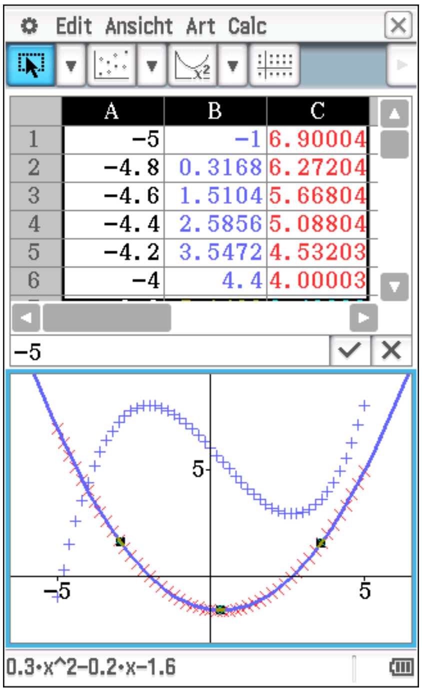
☑ Jeder Punkt hat seine eigene Tangente mit deren eigenem Anstieg. Die Funktion hat also nicht (genau) einen Anstieg (wie die linearen Funktionen). Wenn man den „Anstieg einer Funktion“ allgemein definiert, spricht man vom **Anstieg einer Funktion an einer Stelle**

Messwerte auslesen

- Markieren Sie (ausschließlich) folgendes Objekt und lesen Sie die angegebene Eigenschaft in eine Tabelle aus:

Objekt	Punkt	Tangente
Eigenschaft	Koordinaten	Anstieg

- Markieren Sie die drei Spalten und kopieren Sie diese.
- Wechseln Sie in die `Tabellenkalkulation` und fügen Sie das Kopierte ein.
- Markieren Sie alle drei Spalten und stellen Sie diese (`scatter`) dar.



---

1. Vergleichen Sie die Darstellungen (`TK` und `Geometrie`).
2. Ermitteln und vergleichen Sie Funktionsterme.
3. Interpretieren Sie den „zweiten“ Graph.

☑ Die ersten beiden Spalten entsprechen der klassischen Wertetabelle. Die dritte enthält den Anstieg der Tangente an der jeweiligen Stelle. In der graphischen Darstellung der Messwerte verwendet die Tabellenkalkulation die erste Spalte (x-Koordinate) als Argumente.

☑ Ein der Graph entspricht dem der Ausgangsfunktion. Mithilfe einer kubischen Regression lässt sich das (bis auf Rundungsungenauigkeiten) bestätigen.

☑ Der andere Graph ist „neu“. Er stellt den Anstieg der Tangente m_t an den Graphen der Ausgangsfunktion in Abhängigkeit von der Stelle x dar.

Tangente Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P_1(x_1|f(x_1))$ ist die bestmögliche Annäherung des Funktionsgraphs durch eine Gerade in der Umgebung des Punktes.

Anstieg einer Funktion Der Anstieg einer Funktion f an einer Stelle x_1 entspricht dem Anstieg der Tangente im Punkt $P_1(x_1|f(x_1))$.

Ableitung einer Funktion Die (erste) Ableitung f' einer Funktion f ordnet den Argumenten der Funktion den jeweiligen Anstieg der Tangente zu.

weitere Beispiele

Unterziehen Sie folgende Funktionen f_i der gleichen Untersuchung und dokumentieren Sie insbesondere Terme und Graph von Funktion und Ableitung.

- Skizzieren Sie ausgehend vom Funktionsgraph den Graphen der Ableitung **vor** der Untersuchung mit dem Rechner.
- Formulieren Sie Beziehung zwischen den Eigenschaften (Nullstellen, Extrempunkte, Symmetrie, Asymptoten) der Funktion und ihrer Ableitung.
  Berücksichtigen Sie diese bei Ihrer Skizze.
- Formulieren Sie Vermutungen über Zusammenhänge zwischen den Termen von Funktion und Ableitung.

$$f_2(x) = \frac{x^5}{125} - \frac{x^3}{5} + 1 \qquad f_3(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^3}{10} - x^2 + 2 \cdot x + 5$$
$$f_4(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x \qquad f_5(x) = -0{,}025 \cdot x^4 + 0{,}625 \cdot x^2 - 3$$
$$f_6(x) = \frac{8}{x^2 + 2} \qquad f_7(x) = \frac{x^3 + 2 \cdot x + 8}{x^2 + 2}$$
$$f_8(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \qquad f_9(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

☑ Bei den Funktionen f_1 bis f_5 (ganzrationale Funktionen) werden Graph und Term „einfacher“, nämlich die Anzahl der Extrempunkte bzw. die höchste auftretende Potenz kleiner.

☑ Bei f_6 und f_7 (gebrochenrationale Funtktionen) wird der Graph komplizierter und es gibt keine passende Regression.

☑ Bei f_8 und f_9 bleiben Komplexität des Graphen und Termstruktur gleich.

☑ Asymptotisches Verhalten bleibt grundsätzlich erhalten, allerdings wird aus einer schrägen eine waagerechte Asymptote.

☑ Symmetrie bleibt erhalten, wechselt aber zwischen „achsensymmetrisch“ und „punktsymmetrisch“.

- ☑ Auf Intervallen, auf denen die Ausgangsfunktion monoton steigend (fallend) ist, ist die Ableitung positiv (negativ).
- ☑ Extremstellen der Funktion stimmen mit den Nullstellen der Ableitung überein.
- ☑ Extremstellen der ersten Ableitung markieren den Übergang zwischen Links- und Rechtskurve im Graph der Ausgangsfunktion.

Ableitungsregeln

Der bislang benutzte Weg zeigt zwar die Zusammenhänge zwischen der Tangente, ihrem Anstieg und der Ableitung, ist aber aufwändig (zum Finden des Terms) und ungenau (Regression über gerundete Werte) oder gar erfolglos (wenn kein passender Regressionstyp vorhanden ist). Deshalb verkürzen wir diesen Weg durch den Einsatz des CAS und machen ihn gleichzeitig exakt.

In der Hauptanwendung `Main` gibt es die Möglichkeit, aus dem Term einer Funktion (z.B. $x^3 - 5 \cdot x$) direkt den Term der 1. Ableitung ($3 \cdot x^2 - 5$) bestimmen zu lassen. Die Syntax lautet:

$$\texttt{diff}(x^3 - 5 \cdot x) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3 - 5 \cdot x\right)$$

Die Befehle findet man unter `Aktion` bzw. `Interaktiv` oder im `keyboard`.

1. Überprüfen Sie deine Ergebnisse (Term und Graph) aus der obigen Untersuchung.
2. Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen den Termen einer Funktion und ihrer Ableitung. Beginnen Sie zunächst mit einfachen Beispielen (einer bestimmten Funktionsklasse) und erweitern Sie diese schrittweise.
3. Formulieren Sie Regeln zur Bildung der 1. Ableitung.
4. Versuchen Sie, Begründungen für diese Regeln zu finden.

- ☑ Die Ergebnisse der vorherigen (numerischen) Untersuchung werden reproduziert.
- ☑ Auch für die Terme der gebrochenrationalen Funktionen findet das CAS einen Ableitungsterm.
- ☑ Eine Verschiebung in y-Richtung verändert die Ableitung nicht, da auch die Tangente in y-Richtung (parallel) verschoben wird. Der Anstieg an der Stelle bleibt also gleich.
- ☑ Eine Verschiebung in x-Richtung verschiebt auch die Ableitung, da die Tangente in x-Richtung (parallel) verschoben wird.
- ☑ Konstanten-, Potenz-, Summen-Regel

11 Dokumentation von Lösungswegen

Beim Erstellen von Leistungsaufgaben (aber nicht nur dann) gibt es viele Fragen zu klären, z.B.

- Welchen mathematischen Inhalt möchte ich prüfen?
- Auf welche mathematische Kompetenz möchte ich „sehen"?

- Welchen Anforderungsbereich wähle ich?
- Welcher zeitliche Rahmen steht zur Verfügung?
- Soll die Aufgabe in einem Sachzusammenhang oder innermathematisch gestellt sein?
- Welchen Aufgabentyp (nach R. Bruder) möchte ich verwenden?
- Welche Hilfsmittel sind zugelassen?
- Wie sieht die Minimallösung bzw. der effiziente Lösungsweg aus?
- Sollte ich ggf. Zwischenschritte bzw. Teilaufgaben einbauen?
- Welchen Operator wähle ich?
- Wie viele Punkte bzw. Bewertungseinheiten vergebe ich?

Bereits durch die Zulassung des GTR zu Leistungskontrollen bis hin zur Abiturprüfung wurde eine Regulierung der Lösungsdokumentation nötig und begonnen. Durch die Erweiterung der Hilfsmittel durch CAS, DGS und TK wurden diese Regeln einer scharfen Prüfung unterzogen. Manch eine selbstverständlich geglaubte Gewohnheit bei der Aufgabenerstellung bzw. Bewertung erwies sich nun als logisch nicht schlüssig oder wegen anderer Überlegungen ungünstig.

Leider sind die in diesem Zusammenhang entstandenen Operatorenlisten zwar durch die KMK abgesegnet worden, aber eher knapp gehalten und deshalb im Zweifelsfall nicht deutlich genug. Das hat sogar dazu geführt, dass „berechnen“ in Hessen so gegensätzlich zur sächsischen Lesart wie nur möglich interpretiert wird. Deshalb halte ich es für sehr wichtig, die Definitionen der Operatoren einerseits auch mit grundlegenden Forderungen zu ergänzen und andererseits sie durch geeignete Beispiele und Gegenbeispiele zu erläutern.

Aufgabe des Operators in einer Leistungsaufgabe ist es, dem Schüler (und Korrektor) zu verdeutlichen, welche Lösungswege ggf. nicht zugelassen sind und wie detailliert die Dokumentation des Lösungsweges erfolgen soll. Diese wiederum dient ausschließlich der mathematischen Kommunikation und braucht nicht zu kontrollieren, ob (bzw. dass nicht) abgeschrieben oder anderweitig betrogen wurde.

Für den Schüler sollten die Regeln möglichst einfach nachvollziehbar und unabhängig von verwendetem Rechner oder der konkreten Aufgabe sein. In Sachsen[4] gibt es keine schwarze oder weiße Liste von Befehlen, die von bestimmten Operatoren erlaubt bzw. verboten werden. Solche Regelungen verkomplizieren die Sache völlig unnötig, insbesondere für die Schüler, denn diese müssten die Regeln zusätzlich lernen und einüben.

Eng damit verbunden ist die Abgrenzung der Aufgabenteile mit Hilfsmitteln (B-Teil, miHiMi) von denen ohne (A-Teil, oHiMi). Stellt man sich das mathematische Wissen der Schüler als Netz vor, dann geht es im A-Teil um eher nahe beieinander liegende „Knoten“, die in wenigen kleinen Schritten erreicht werden können. Die Dokumentation dieser Schritte ist i.A. 1:1 möglich und steht deshalb auch nur selten in Frage. Im B-Teil hingegen sollte es um deutlich weiter auseinander liegende Knoten innerhalb einer (Teil-)Aufgabe gehen, weil einerseits die Hilfsmittel größere Schritte ermöglichen und andererseits nicht nochmal das gleiche wie im A-Teil geprüft werden sollte.

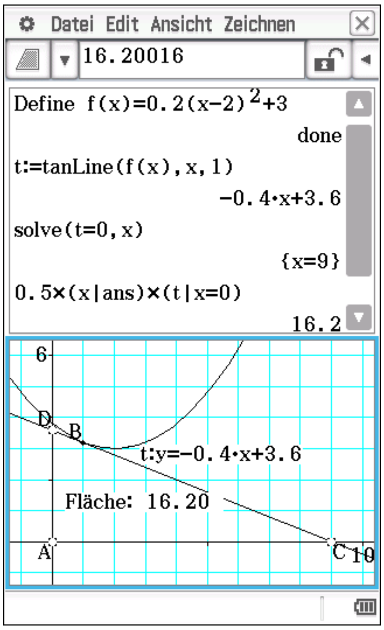
Geht es beispielsweise inhaltlich um die Tangente an den Graphen einer Funktion, dann ist folgende Aufgabenstellung im A-Teil einer Kontrolle problemlos verwendbar:

Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente am Graph von f an der Stelle x_t.

[4] Hessen hat 2015 in einer Handreichung für die Mathematiklehrer die „erweiterte Funktionalität“ (z.B. eines GTR) definiert. Diese umfasst z.B. den Befehl `solve` und darf u.a. beim Operator „berechnen“ nicht verwendet werden. Selbst ein CAS darf dann nur wie ein einfacher Taschenrechner verwendet werden.

Als Lösungsschritte erwartet man Term von f', Werte $f(x_t)$ und $f'(x_t)$, Ansatz der linearen Funktion und schließlich eine Gleichung der Tangente. Die Anzahl der zu vergebenden BE (mein Vorschlag: 4 oder 5) wird sich daran orientieren.

Ganz anders sieht es im B-Teil aus. Jedes CAS kann per Befehl den Term der Tangente liefern (ohne dass man den Ableitungsterm oder einzelne Werte zu sehen bekommt). Folglich kann man auch nicht mehr erwarten, selbst wenn man grafische Wege ausschließt. Deshalb käme als Operator auch nur noch „Angeben" in Frage. Das ist zwar möglich, aber nur selten sinnvoll. Besser wäre m.E. eine „Vergrößerung" der Aufgabe, in der die Tangente vorkommt, aber nur ein Zwischenschritt ist, z.B.:



Die Tangente am Graph von f an der Stelle x_t begrenzt zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck vollständig. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

Lösungsschritte wären hier Ansatz (z.B. rechtwinkliges Dreieck mit Achsenabschnitt und Nullstelle der Tangente) und das Ergebnis des Flächeninhalts, was aus meiner Sicht 3 bis 4 BE rechtfertigt.

Die Anzahl der Bewertungseinheiten orientiert sich also (nach wie vor) an der Anzahl der Lösungsschritte in einem (den Schülern zugängigen) effizienten Lösungsweg. Diese Schritte sind wegen der zur Verfügung stehenden Hilfsmittel nicht immer gleichgroß. Grundsätzlich sollte man sich (auch hier) am Lehrplan orientieren und die Möglichkeiten der Hilfsmittel im Blick haben.

Tatsächlich sind CAS in der Lage, jede mathematische Grundaufgabe (meist auch mieth Parametern) zu lösen. Und es ist erwartbar, dass Schüler zumindest diese Grundschritte auch am Taschenrechner beherrschen. Das bedeutet aber auch, dass bei Verwendung des Rechners die Zwischenschritte einer händischen Rechnung i.A. entfallen und folglich auch nicht bewertet werden können. Wenn man sie sehen will, sollte man eine entsprechende Aufgabe im A-Teil stellen oder die mathematische Kompetenz, die in der Aufgabenstellung geprüft wird, ändern. Operatorenmäßig landet man dann eher bei „beschreiben", „erläutern" oder „begründen".

Interessant wird die Geschichte, wenn ein Teil des Lösungsweges auch im DGS (oder in der TK) bearbeitet werden kann. Wie erwarten wir die Dokumentation solcher (prinzipiell zulässigen) Lösungswege? Es ist ja effizient, geometrische Größen zeichnerisch zu ermitteln, oder beim (gezielten) Probieren auf die TK zurückzugreifen. Andererseits will man auch nicht das „Tastendrücken" belohnen. Deshalb sollte man auf Taschenrechneräußerungen (welche Anwendung oder welchen Befehl) tunlichst keine Bewertungen erteilen, sondern entweder auf mathematische Notation pochen oder eine verbale Beschreibung (unter Verwendung von Fachbegriffen) und ggf. Skizzen einfordern. Die Nennung der Anwendung des Taschenrechners ist ohnehin bewertungstechnisch irrelevant.

Das alles hat unausweichlich auch Konsequenzen auf die Unterrichtsgestaltung selbst. Zunächst ist es Aufgabe des Lehrers, den korrekten Gebrauch der Fachsprache und die angemessene Dokumentation von Lösungswegen im Unterricht zu thematisieren. Aber nicht überwiegend im Sinne des „teaching to the test": Diesen Aufgabentyp löst man soundso mit dem Rechner und dasunddas schreibt man hin. Denn eigentlich geht es im B-Teil um Aufgaben, deren Komplexität deutlich über die Grundaufgaben des A-Teils hinausgehen und die bestenfalls auch verschiedene Lösungswege ermöglichen. In diesem Fall soll der Schüler seine Idee umsetzen können und sicher und effizient dokumentieren können. Und sich nicht fragen: „Welcher Aufgabentyp ist das nochmal?".

Die größte Bedeutung messe ich in diesem Zusammenhang der Konstruktion der Aufgabenstellung bei. Eine sorgsame erstellte Aufgabe findet meist einen „natürlichen“ Operator. Will man diesen ändern, zieht das i.A. eine (zumindest teilweise) Neukonstruktion der Aufgabe nach sich.

12 Leistungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben stammen aus Leistungskontrollen, in denen der `ClassPad` als Hilfsmittel eingesetzt wurde. Ergänzend dazu findet man screenshots, die einen möglichen Lösungsweg am `ClassPad` zeigen, und die Dokumentation einer Minimallösung. Letztere soll an einer *kursiven* Schrift erkennbar sein.

12.1 Klasse 8

1. In folgenden Gleichungen „fehlen“ Teile der beiden Terme. Gib diese so an, dass die beiden Terme einer Gleichung äquivalent sind.

$$\left(\boxed{\text{A}}-2\right)^2 = 9x^2+\boxed{\text{B}}+4 \qquad\qquad 3y^2+y-10=\boxed{\text{C}}\cdot\boxed{\text{D}}$$

$$\boxed{\text{A}}=3x \qquad\qquad \boxed{\text{C}}=y+2$$

$$\boxed{\text{B}}=-12x \qquad\qquad \boxed{\text{D}}=3y-5$$

2. Formuliere jeweils eine Gleichung und interpretiere deren Lösung(en).

   (a) In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Basiswinkel um 25° kleiner als der Winkel an der Spitze.
   $180° = 2\cdot(\gamma-25°)+\gamma \qquad \gamma = 76{,}67°$
   Der Winkel an der Spitze beträgt 76,67°.

   (b) Verlängert man eine Seite eines Quadrates um 3 m und verkürzt die andere um 1 m, dann erhöht sich der Flächeninhalt der Figur um $7\,\text{m}^2$. $(a+3)\cdot(a-1)=a^2+7 \qquad a=5$
   Die Seitenlänge des Ausgangsquadrates betrug 5 m.

   (c) Verringert man das Vierfache einer Zahl um 3, so erhält man ihren Kehrwert.
   $4\cdot x-3=\frac{1}{x} \qquad x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$
   Die Zahl war 1 oder $-\frac{1}{2}$.

```
expand((3·x−2)^2)
                9·x^2−12·x+4
factor(3y^2+y−10)
                (y+2)·(3·y−5)
solve(180=2·(x−25)+x,x)
                {x=76.66666667}
solve((x+3)·(x−1)=x^2+7,x)
                {x=5}
solve(4·x−3=1/x,x)
                {x=1,x=−0.25}
solve(1/(x−2)≥3,x)
                {2<x≤2.333333333}
```

3. Gib zwei Zahlen an, die die Ungleichung $\dfrac{1}{x-2} \geq 3$ erfüllen. *z.B.* 2,1 *und* $2,\overline{3}$.

4. Gib folgende Eigenschaften der Funktion f (bzw. ihres Graphs) an und ergänze die Wertetabelle.

$$f(x)=\frac{10x-10}{x^2+3}$$

x	-2	2	100	$1,536$	$8,464$
y	$-4,286$	$1,429$	$0,099$	1	1

(a) Definitionsbereich $D_f = \mathbb{Q}$

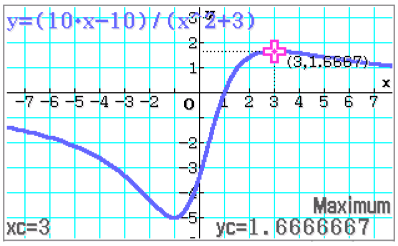
(b) Nullstelle(n) $x_0 = 1$

(c) Monotonie

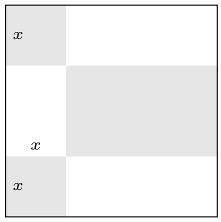
	monoton fallend	$x \leq -1$
	monoton steigend	$-1 \leq x \leq 3$
Monotonie	monoton fallend	$3 \leq x$

(d) Wertebereich $W_f = \left\{y \in \mathbb{Q} \middle| -5 \leq y \leq \frac{5}{3}\right\}$

```
y1(x)
                      10•x−10
                      -------
                       x^2+3
y1(−2)
                 −4.285714286
y1({2,100})
{1.428571429,0.098970308▶
solve(y1(x)=1,x)
{x=1.535898385,x=8.46410▶
solve(y1(x)=0,x)
                        {x=1}
fMin(y1(x),x)
           {MinValue=−5,x=−1}
fMax(y1(x),x)
 {MaxValue=1.666666667,x=3}
```



5. Für die Gestaltung einer quadratischen Fliese mit 10 cm Kantenlänge wird nebenstehender Entwurf diskutiert. Die Fläche wird in Rechtecke und Quadrate unterteilt und mit zwei Farben (hier „grau“ und „weiß“) lackiert. Für eine der Farben gilt:



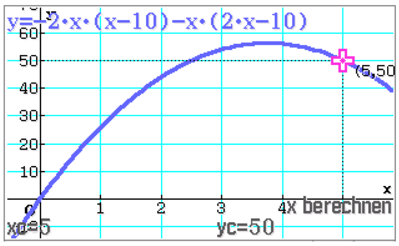
$$A(x) = x \cdot (10 - 2 \cdot x) + 2 \cdot x \cdot (10 - x)$$

(a) Gib die Farbe an, deren Flächeninhalt so berechnet werden kann. *weiß*

(b) Gib alle Werte x an, für die man den Flächeninhalt mit dem Term $A(x)$ berechnen kann. $D_A = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 5\}$

(c) Ermittle den größtmöglichen Flächeninhalt dieser Farbe.
Maximum aus graph. Darst. $A_{\max} = 56{,}25\,\text{cm}^2$

(d) Ermittle alle Werte x, für die der Flächeninhalt beider Farben gleichgroß ist.
Der Flächeninhalt der Fliese beträgt $100\,\text{cm}^2$*. Wenn beide Farben gleichgroße Flächen haben, hat (auch) „weiß“* $50\,\text{cm}^2$*:* $50 = A(x_h)$ $x_{h1} = 2{,}5\,\text{cm}$ $x_{h2} = 5\,\text{cm}$



12.2 Klasse 9

1. Gib jeweils die Gleichung einer Potenzfunktion an, die folgende Eigenschaft(en) hat.

   (a) Tiefpunkt $T(0|1)$ $f(x) = x^2 + 1$

   (b) im gesamten Definitionsbereich ($D = \mathbb{R}$) monoton fallend $g(x) = -x^3$

   (c) achsensymmetrisch (nicht unbedingt zur y-Achse) und Asymptoten bei $x_1 = 2$ und $y_2 = -1$ $h(x) = (x-2)^{-2} - 1$

2. In dieser Aufgabe geht es um den Punkt $P(16|3)$ und die Funktion $g(x) = x^{-\frac{3}{4}}$

   (a) Begründe, dass $D_g = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\}$.
   nichtnegativ wegen der Wurzel, $x \neq 0$ *wegen Reziprokem*

(b) Erläutere die Monotonie von g anhand geeigneter Zahlenbeispiele.

mindestens 2 Wertepaare $(x|y)$, wenn mit steigendem Argument die zugehörigen Funktionswerte kleiner werden, dann nennt man g ***monoton fallend****.*

(c) Weise rechnerisch nach, dass P oberhalb des Graphen von g liegt. $g(16) = \frac{1}{8} < 3$

(d) Beschreibe 2 verschiedene Möglichkeiten, den Graphen der Funktion g so zu verändern, dass der „neue“ Graph durch P verläuft. Gib jeweils eine Gleichung an.

```
Define g(x)=x^-0.75
                                   done
seq(g(x),x,1,3,1)
{1,0.5946035575,0.438691▶
g(16)
                                   0.125
solve(g(16)+d=3,d)
                                 {d=2.875}
solve(a×g(16)=3,a)
                                   {a=24}
```

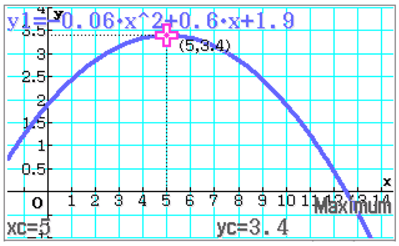
Verschieben um $\frac{23}{8} = 2{,}875$ in y-Richtung $\quad g_1(x) = x^{-\frac{3}{4}} + \frac{23}{8}$

Strecken um 24 in y-Richtung $\quad g_2(x) = 24 \cdot x^{-\frac{3}{4}}$

3. Die Flugbahn einer Kugel beim Kugelstoßen kann beschrieben werden durch

$$y = -0,06 \cdot x^2 + 0,6 \cdot x + 1,9 \qquad 0 \leq x \qquad 0 \leq y$$

Die x-Achse entspricht dabei dem Boden. Eine Einheit entspricht 1 m.



(a) Gib die Höhe an, aus der die Kugel gestoßen wurde. 1,9 m

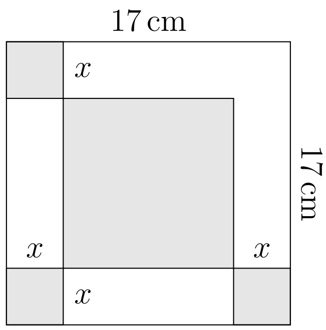
(b) Ermittle die größte Höhe, die die Kugel erreicht.
Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei $S(5|3{,}4)$. Die Kugel erreicht maximal 3,4 m.

(c) Ermittle die Weite dieses Versuches. *positiven Nullstelle:* 12,53 m

4. Ermittle die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x + \frac{4}{x} = z$ in Abhängigkeit von z.
Die Lösungen der Gleichung sind $x_{1/2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2-16}}{2}$. Die Diskriminante $z^2 - 16$ ist Null, wenn $z = \pm 4$, dazwischen negativ und außerhalb positiv. Folglich gilt:

z	$z < -4$	$z = -4$	$-4 < z < 4$	$z = 4$	$z > 4$
Anz. Lös.	2	1	0	1	2

5. In nebenstehender Figur ist eine Fläche grau markiert.



(a) Begründe, dass der Inhalt dieser Fläche mit $A(x) = 7x^2 - 68x + 289$ berechnet werden kann.
Ansatz für graue Fläche: $A = 3 \cdot x^2 + (17 - 2x)^2$.
Umformung in eine Summe liefert $A(x)$.

(b) Gib den Definitionsbereich der Funktion $A(x)$ an.
$D_A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 8{,}5\}$

(c) Ermittle rechnerisch alle Längen x, für die der Inhalt der grauen Fläche $220\,\text{cm}^2$ beträgt.

$$A(x) = 220 \qquad \Rightarrow x_1 = 1{,}15 \qquad x_2 = 8{,}56$$

Nur bei $x = 1{,}15\,\text{cm}$ beträgt der Flächeninhalt $220\,\text{cm}^2$. Die zweite Lösung liegt nicht mehr im Definitionsbereich.

(d) Ermittle den Wertebereich der Funktion $A(x)$ und interpretiere ihn im geometrischen Zusammenhang.

Der Scheitelpunkt liegt (als tiefster Punkt) bei $S(4{,}86|123{,}9)$. Von den Funktionswerten am Rand des Definitionsbereiches liegt der größte bei $x = 0$ und beträgt 289. Demnach gilt

$$W_A = \{A \in \mathbb{R} | 123{,}9 \leq A \leq 289\}$$

Der Flächeninhalt der grauen Fläche beträgt mindestens $123{,}9\,\text{cm}^2$ und höchstens $289\,\text{cm}^2$ liegen.

```
expand(3·x^2+(17-2·x)^2)
                          7·x^2-68·x+289
Define A(x)=7·x^2-68·x+289
                                    done
solve(A(x)=220,x)
{x=1.151108065,x=8.56317▶
rangeAppoint(ans,0,8.5)
                          {x=1.151108065}
fMin(A(x),x,0,8.5)
{MinValue=123.8571429,x=4▶
fMax(A(x),x,0,8.5)
                      {MaxValue=289,x=0}
solve(x+4/x=z,x)
    {x=(z-√(z^2-16))/2, x=(z+√(z^2-16))/2}
```

12.3 Klasse 10

1. Für eine Laboruntersuchung wurde eine sterile Nährlösung mit Bakterien geimpft. Bezeichnet man die Untersuchungsdauer (in Stunden) mit t, dann gilt für die Anzahl N der Bakterien:

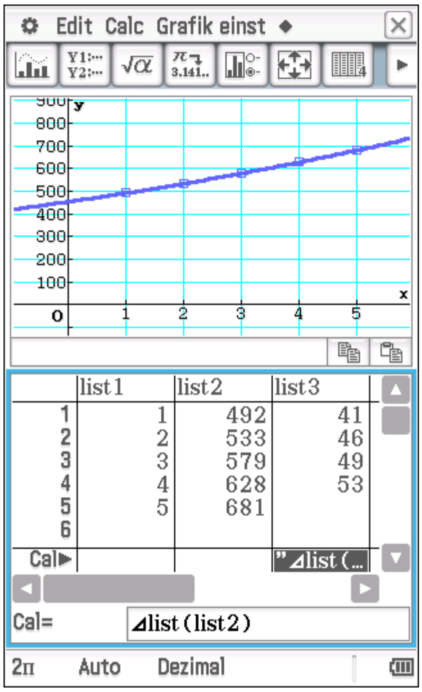
t in h	1	2	3	4	5
N	492	533	579	628	681
ΔN	—	41	46	49	53

(a) Begründe anhand der Daten, dass es sich nicht um ein lineares Wachstum handelt.
In gleichen Zeitabschnitten (1 h) wächst die Kultur ***nicht*** *um den gleichen,*
sondern einen ansteigenden Wert.

(b) Ermittle die Anzahl der Bakterien, mit der die Nährlösung geimpft wurde.
Exponentielle Regression liefert $N(t) = 453 \cdot 1{,}085^t$, also wurden ca. 453 Bakterien in die Nährlösung eingebracht.

(c) Ermittle die Zeitspanne, innerhalb derer sich die Anzahl der Bakterien verdoppelt.

$$906 = 453 \cdot 1{,}085^{t_2} \qquad t_2 = 8{,}5\,\text{h}$$




```
y1(0)
                            453.3322234
y1(x)=2×y1(0)
453.3322234·1.084824901^x▶
solve(ans,x)
                          {x=8.513377131}
```

2. Gib jeweils eine Gleichung einer Exponentialfunktion an, die die genannten Eigenschaften hat.

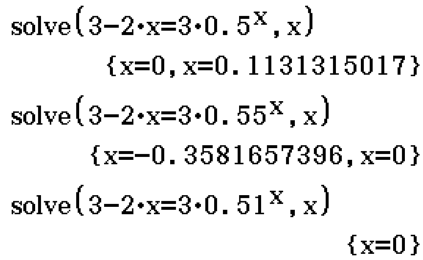
(a) Kontostand $K(t)$, 3800€ zu Beginn, 2% Wachstum $\qquad K(t) = 3800 \cdot 1{,}02^t$

(b) Graph von f verläuft durch $A(0|5)$ und $B(1|4)$
$f(x) = 5 \cdot 0{,}8^x$

(c) Graph symmetrisch zu $g(x) = 5 \cdot 4^x$ bzgl. der y-Achse $g^\star(x) = 5 \cdot 0{,}25^x$

(d) g monoton fallend, Graph unterhalb x-Achse
$a < 0$ und $b > 1$, z.B.: $y = -2 \cdot 3^x$

(e) $y = 3 - 2x$ ist Tangente bei $x = 0$ $\quad y = 3 \cdot 0{,}51^x$

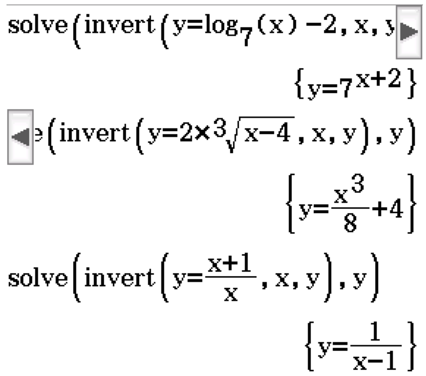


3. Gib jeweils einen Term der Umkehrfunktion an.

$$f(x) = \log_7(x) - 2 \qquad f^{-1}(x) = 7^{x+2} = 49 \cdot 7^x$$

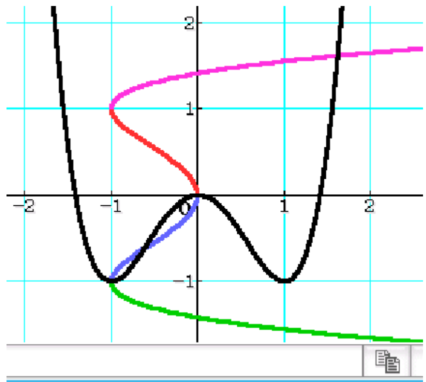
$$g(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{x-4} \qquad g^{-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 4 = \frac{x^3}{8} + 4$$

$$h(x) = \frac{x+1}{x} \qquad h^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$$



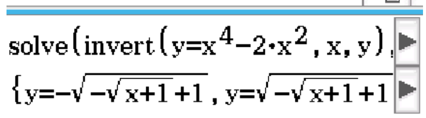
4. Die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) ist nicht eindeutig umkehrbar.

(a) Begründe diese Aussage.
Monotoniewechsel $\Rightarrow$ mehrere Argumente x mit gleichem Funktionswert y $\Rightarrow$ nicht eindeutig umkehrbar

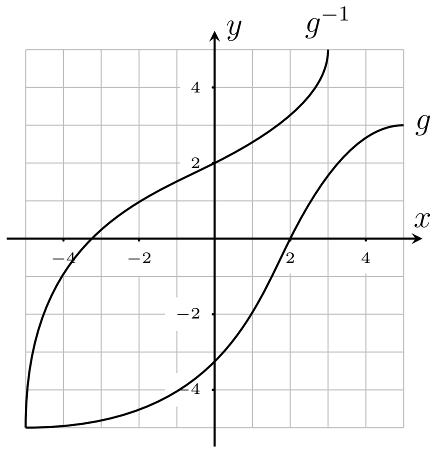


(b) Schränkt man den Definitionsbereich ein, gibt es „die“ Umkehrfunktion f^{-1}.
Gib eine solche Einschränkung und den entsprechenden Funktionsterm von f^{-1} an.

Definitionsbereich	*Umkehrfunktionsterm*
$x \leq -1$	$-\sqrt{\sqrt{x+1}+1}$
$-1 \leq x \leq 0$	$-\sqrt{-\sqrt{x+1}+1}$
$0 \leq x \leq 1$	$\sqrt{-\sqrt{x+1}+1}$
$1 \leq x$	$\sqrt{\sqrt{x+1}+1}$



5. Gegeben ist der Graph einer Funktion g mit $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -5 \leq x \leq 5\}$. Zeichne den Graphen von g^{-1} in dasselbe Koordinatensystem.



6. Gib die Gleichung einer linearen Funktion an, deren Umkehrfunktion den Anstieg 3 und die Nullstelle -2 hat.

$$y = \tfrac{1}{3} \cdot x - 2$$

12.4 Differentialrechnung

1. Am Graphen der Funktion g_1 liegt an der Stelle $x_1 = 5$ die Tangente mit der Gleichung $y = 2x - 3$. Geben Sie $g_1(5)$ und $g_1'(5)$ an.

$$g_1(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 7 \qquad\qquad g_1'(5) = 2$$

2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 + 0{,}5 \cdot x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(a) Weisen Sie nach, dass f streng monoton steigend ist.

$$f'(x) = 1{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5$$

Wegen $x^2 \geq 0$ sind die Werte von f' alle größer oder gleich 0,5 und damit größer als 0. Folglich ist f überall streng monoton steigend.

```
Define f(x)=0.5·x^3+0.5·x+1
                                done
d/dx(f(x))
                          1.5·x^2+0.5
fMin(ans, x, -∞, ∞)
                  {MinValue=0.5, x=0}
```

(b) An der Stelle 5 liegt die Tangente t_5 am Graphen von f.

i. Ermitteln Sie rechnerisch den Flächeninhalt, den t_5 mit den Koordinatenachsen einschließt.
Die Tangente hat die Gleichung $t_5 : y = 38 \cdot x - 124$.
Aus dem Ansatz $0 = 38 \cdot x_0 - 124$ erhält man die Nullstelle $x_0 = 3{,}263$.
Zusammen mit dem Achsenabschnitt $n = -124$ erhält man den Flächeninhalt durch

$$A = \frac{1}{2} \cdot |x_0| \cdot |n| = 202{,}316$$

ii. Im Punkt P liegt parallel zu t_5 eine weitere Tangente am Graphen von f.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.
Die zweite Tangente muss den gleichen Anstieg haben, also setzt man an $38 = f'(x)$ und erhält so die zwei Stellen $x_{1/2} = \pm 5$. Davon ist eine die ursprüngliche und die andere die gesuchte. Es gilt also $x_P = -5$. Setzt man diese in die Funktion ein, erhält man den fehlenden y-Wert: $y_P = f(x_P) = -64$. Der gesuchte Punkt ist also $P(-5|-64)$.

```
tanLine(f(x), x, 5)
                            38·x-124
solve(ans=0, x)
                      {x=3.263157895}
3.263157895×124/2
                         202.3157895
solve(38=d/dx(f(x)), x)
                          {x=-5, x=5}
f(-5)
                                 -64
```

(c) Ermitteln Sie jeweils die Stelle $z > 0$, an der die Tangente am Graphen von f liegt, die ...

i. durch den Punkt $R(1|-338)$ verläuft.
In die allgemeine Gleichung der Tangente an der Stelle z setzt man die Punktkoordinaten ein.

$$t_z : y = \left(1{,}5z^2 + 0{,}5\right) \cdot x - z^3 + 1$$
$$R : -338 = 1{,}5z^2 + 0{,}5 - z^3 + 1$$
$$\Rightarrow z = 7{,}514$$

```
tanLine(f(x), x, z)
0.5·z^3+x·(1.5·z^2+0.5)-z·(1▶
T:=collect(ans, x)
              -z^3+x·(1.5·z^2+0.5)+1
-338=T|x=1
               -338=-z^3+1.5·z^2+1.5
solve(ans, z)
                      {z=7.513648448}
```

  A. K. Mieth

ii. mit den Koordinatenachsen einen Flächeninhalt von 28 einschließt.
Von der allgemeinen Tangente t_z benötigt man wieder die Nullstelle und den Achsenabschnitt. Diese erhält man, in dem man jeweils x bzw. y Null setzt und die entstandene Gleichung nach der anderen Variablen löst. Die erhaltenen (ggf. vereinfachten) Terme setzt man in die Gleichung zur Berechnung des Flächeninhaltes ein und löst diese Gleichung nun nach z. Von den zwei Lösungen erfüllt aber nur die positive alle Kriterien: $z = 3{,}106$

```
solve(0=T,x)
                         {x=2·(z^3-1)/(3·z^2+1)}
T|x=0
                                        -z^3+1
|2·(z^3-1)/(3·z^2+1)|×|ans|/2
                                 (z^3-1)^2/(3·z^2+1)
solve(28=ans,z)
                        {z=-3,z=3.105511556}
```

$$0 = \left(1{,}5z^2 + 0{,}5\right) \cdot x_0 - z^3 + 1 \qquad \Rightarrow x_0 = \frac{2 \cdot (z^3 - 1)}{3 \cdot z^2 + 1}$$

$$n = \left(1{,}5z^2 + 0{,}5\right) \cdot 0 - z^3 + 1 \qquad \Rightarrow n = -z^3 + 1$$

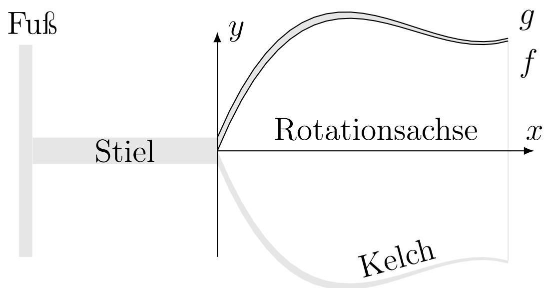
$$A_\triangle = \tfrac{1}{2} \cdot |x_0| \cdot |n|$$

$$28 = \frac{\left(z^3 - 1\right)^2}{3 \cdot z^2 + 1} \qquad z_1 = -3 < 0$$

$$z_2 = 3{,}106$$

12.5 Integralrechnung

Ein Rotweinglas ist rotationssymmetrisch und besteht aus Fuß, Stiel (jeweils zylinderförmig) und einem Kelch. Stellt man den Querschnitt des Kelches (der die Rotationsachse enthält) liegend in einem kartesischen Koordinatensystem dar, dann liegen die Kanten der Glaswand auf den Graphen der Funktionen f und g



$$f(x) = 0{,}016 \cdot x^3 - 0{,}36 \cdot x^2 + 2{,}4 \cdot x \qquad g(x) = 0{,}016 \cdot x^3 - 0{,}3572 \cdot x^2 + 2{,}333 \cdot x + 0{,}5$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Zentimeter und es gilt jeweils $D = [0; 11]$. Die Dicke der Glaswand wird parallel zur y-Achse gemessen.
Der Stiel ist 7 cm lang und schließt stetig an der Graph von g an. Der Fuß hat einen Durchmesser von 8 cm und ist 5 mm hoch. Die Dichte des verwendeten Glases beträgt $2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

1. Ermitteln Sie den Durchmesser der Trinköffnung. $2 \cdot f(11) = 8{,}3 \qquad \Rightarrow D = 8{,}3\,\text{cm}$

2. Ermitteln Sie die minimale Dicke der Glaswand.
   Das globale Minimum der Funktion $d(x) = g(x) - f(x)$ auf D beträgt 0,102, also ist die minimale Dicke ca. 1 mm.
3. Berechnen Sie das maximale Fassungsvermögen des Glases.
   $$\pi \cdot \int_0^{11} (f(x))^2 \, dx = 597{,}12 \qquad V = 600\,\text{cm}^3$$
4. Ein Schoppen Rotwein sind $200\,\text{cm}^3$. Berechnen Sie die Höhe der Flüssigkeit im Glas.
   $$\pi \cdot \int_0^{h} (f(x))^2 \, dx = 200 \qquad h = 4{,}7\,\text{cm}$$
5. Ermitteln Sie die Masse eines (leeren) Glases.
   $$\begin{aligned} V_F &= \pi \cdot r_F^2 \cdot h_F \\ V_S &= \pi \cdot (g(0))^2 \cdot h_S \\ V_K &= \pi \cdot \int_0^{11} (g(x))^2 \, dx - \pi \cdot \int_0^{11} (f(x))^2 \, dx \\ V_G &= V_F + V_S + V_K \\ m_G &= \varrho \cdot V_G = 460\,\text{g} \end{aligned}$$

Define $f(x)=0.016\cdot x^3-0.36\cdot$

done

Define $g(x)=0.016\cdot x^3-0.357$

done

$2\times f(11)$

8.272

fMin(g(x)−f(x), x, 0, 11)

{MinValue=0.1018, x=11}

$\pi\times\int_0^{11} f(x)^2 dx$

597.1220202

$200=\pi\times\int_0^{h} f(x)^2 dx$

200=3.141592654·(3.65714

solve(ans, h)

{h=4.671608616}

$\pi\times(8^2\times 0.5+g(0)^2\times 7)$

106.0287521

$\pi\times\int_0^{11} g(x)^2 dx-597.1220202$

64.07431348

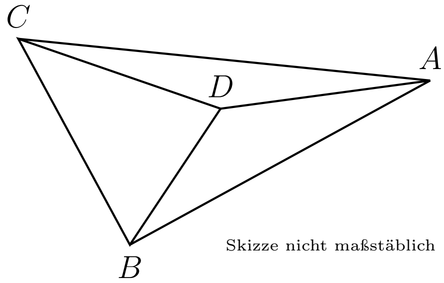
$2.7\times(106+64)$

459

12.6 Vektorrechnung

Die Punkte

$A(19|60|-12)$
$B(-3|-64|0)$
$C(-35|-18|27)$
$D(21|-60|28)$



sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide, die von der Ebene

$$\varepsilon \ldots 10x + 59y - 17z = 64$$

geschnitten wird.

1. Zeigen Sie, dass D nicht in der Ebene der Punkte A, B und C liegt.
   Die Punktprobe von D in der Ebenengleichung $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC}$ führt zum Widerspruch (Das entstehende Gleichungssystem ist nicht lösbar). Folglich liegt D nicht in der Ebene von A, B und C.

2. Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Kante $\overline{BD}$ parallel zur Ebene ε liegt.
   Aus $\overrightarrow{BD} \circ \vec{n} = 0$ und $D \notin \varepsilon$ kann man schlussfolgern, dass die Kante $\overline{BD}$ (echt) parallel zu ε liegt.

3. Die Ebene ε schneidet sich mit der Pyramide $ABCD$ in einem Vieleck Φ. Charakterisieren Sie Φ hinsichtlich seiner Seiten und Winkel. Führen Sie die Untersuchung rechnerisch.
   Setzt man (wie oben) die Koordinaten der Geradengleichung $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ in die Gleichung von ε ein, dann entsteht eine Gleichung, deren Lösung t_{PQ} Aufschluss über den eventuell existierenden Schnittpunkt liefert, nämlich wenn $0 \leq t_{PQ} \leq 1$:

P	Q	t_{PQ}	Schnittpunkt
A	B	$\frac{1}{2}$	$R(8\|-2\|-6)$
A	C	$\frac{2}{3}$	$S(-17\|8\|14)$
A	D	$\frac{1}{2}$	$T(20\|0\|8)$
C	B	$-1 < 0$	—
C	D	$-1 < 0$	—

$$\overrightarrow{RS} \circ \overrightarrow{TR} = 0 \quad \overline{RS} = 15 \cdot \sqrt{5} \quad \overline{RT} = 2 \cdot \sqrt{86}$$

Φ ist ein rechtwinkliges, ungleichseitiges Dreieck.

$$\left\{\begin{bmatrix}19\\60\\-12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-64\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-35\\-18\\27\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow \{A, B, C\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}19\\60\\-12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-64\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-35\\-18\\27\end{bmatrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}21\\-60\\28\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\59\\-17\end{bmatrix}, 64\right\} \Rightarrow \{D, n, d\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}21\\-60\\28\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\59\\-17\end{bmatrix}, 64\right\}$$

A+t×(B−A)+s×(C−A)

$$\begin{bmatrix}-54 \cdot s-22 \cdot t+19\\-78 \cdot s-124 \cdot t+60\\39 \cdot s+12 \cdot t-12\end{bmatrix}$$

solve(D=ans, {s, t})

No Solution

{dotP(D−B, n), dotP(D, n), d}

{0, −3806, 64}

solve(dotP(A+t·(B−A), n)=d, t)

$$\left\{t=\frac{1}{2}\right\}$$

A+t·(B−A) | ans

$$\begin{bmatrix}8\\-2\\-6\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}8\\-2\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-17\\8\\14\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}20\\0\\8\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow \{R, S, T\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}8\\-2\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-17\\8\\14\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}20\\0\\8\end{bmatrix}\right\}$$

solve(dotP(C+t·(D−C), n)=d, t)

{t=−1}

dotP(S−R, T−R)

0

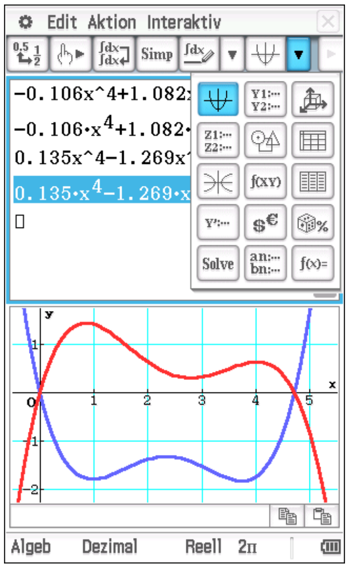
{norm(S−R), norm(T−R)}

$\{15 \cdot \sqrt{5}, 2 \cdot \sqrt{86}\}$

DelVar A, B, C, D, n, d, R, S, T

done

12.7 Mathematik-Abitur (Sachsen)



2015 Leistungskurs Ersttermin – B1

Eine Spielzeugfabrik stellt Puppenwagen her. Die beiden zueinander kongruenten Seitenteile eines solchen Puppenwagens bestehen aus Holzplatten. Die Außenfläche eines dieser Seitenteile kann in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O (1 Längeneinheit entspricht 1 Dezimeter) dargestellt werden.
Die obere Begrenzungslinie der Außenfläche zwischen den Punkten O und $A(x_A|0)$ kann durch den Graphen der Funktion f und die untere Begrenzungslinie zwischen den Punkten O und $A(x_A|0)$ durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden.
Die Funktionen f und g sind gegeben durch die Gleichungen

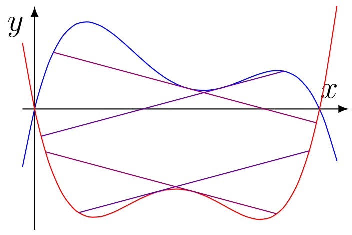
$$f(x) = 0{,}106 \cdot x^4 + 1{,}082 \cdot x^3 - 3{,}602 \cdot x^2 + 4{,}039 \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le x_A)$$
$$g(x) = 0{,}135 \cdot x^4 - 1{,}269 \cdot x^3 + 3{,}962 \cdot x^2 - 4{,}618 \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le x_A)$$

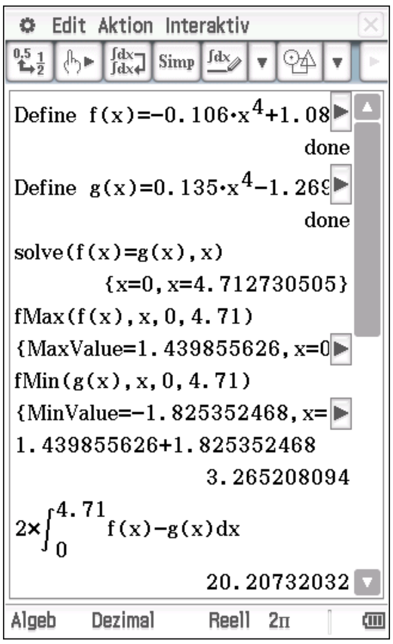
1. Begründen Sie, dass die Strecke $\overline{OA}$ näherungsweise die Länge 4,71 dm besitzt.

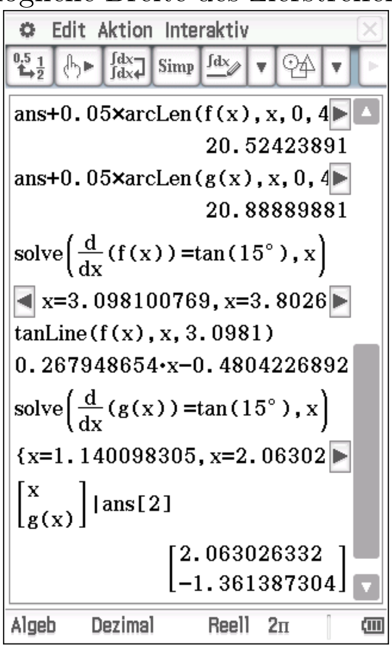
2. Jedes Seitenteil des Puppenwagens wird aus einer rechteckigen Holzplatte ausgesägt. Die Strecke $\overline{OA}$ verläuft dabei parallel zu zwei gegenüberliegenden Seiten dieser Rechtecksfläche.
Ermitteln Sie Mindestlänge und Mindestbreite der rechteckigen Holzplatte.

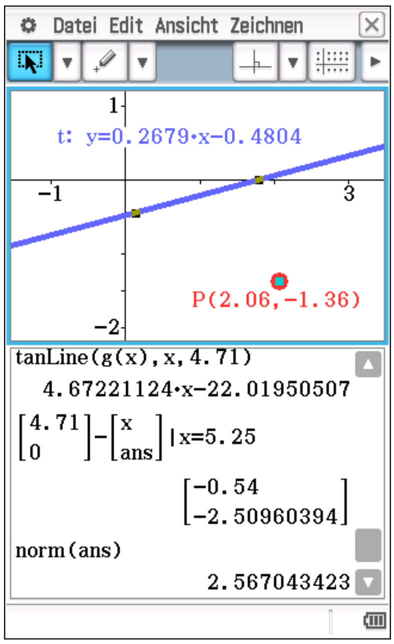
3. Jedes 0,5 cm dicke Seitenteil des Puppenwagens soll vollständig (Außenfläche, Innenfläche und Randfläche) mit einem für Kleinkinder gefahrlosen Speziallack überzogen werden.
Ermitteln Sie den Inhalt der zu lackierenden Fläche eines Seitenteils des Puppenwagens.

4. Jedes Seitenteil soll auf der Außenfläche mit einem Zierstreifen beklebt werden. Die parallelen Begrenzungen des Zierstreifens sollen dabei vollständig auf der Außenfläche des Seitenteils zu sehen und unter einem Winkel von $\alpha = 15°$ gegenüber der Abszissenachse geneigt sein.
Bestimmen Sie die maximal mögliche Breite des Zierstreifens.









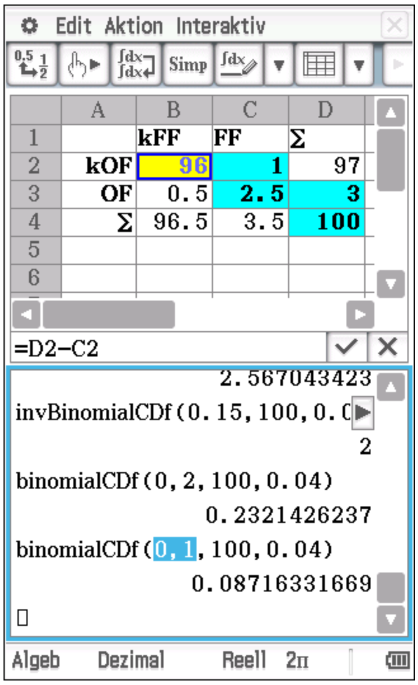
5. Für die Befestigung des Haltegriffes am Puppenwagen wird eine Metallstrebe verwendet. Zwischen den Punkten A und $B(5{,}25|y_B)$ kann die Metallstrebe durch einen Teil des Graph einer linearen Funktion h beschrieben werden. Im Punkt A geht der Graph der Funktion h tangential in den Graphen der Funktion g über.
Bestimmen Sie die Länge der Metallstrebe zwischen den Punkten A und B.

Puppenwagen aus der laufenden Produktion können Oberflächen- oder Farbgestaltungsfehler besitzen. Erfahrungsgemäß werden bei 3,0% aller produzierten Puppenwagen Oberflächenfehler festgestellt. Bei 1,0% aller produzierten Puppenwagen werden erfahrungsgemäß Farbgestaltungsfehler und keine Oberflächenfehler festgestellt.

Oberflächen- und Farbgestaltungsfehler treten bei einem produzierten Puppenwagen erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 2,5% auf.

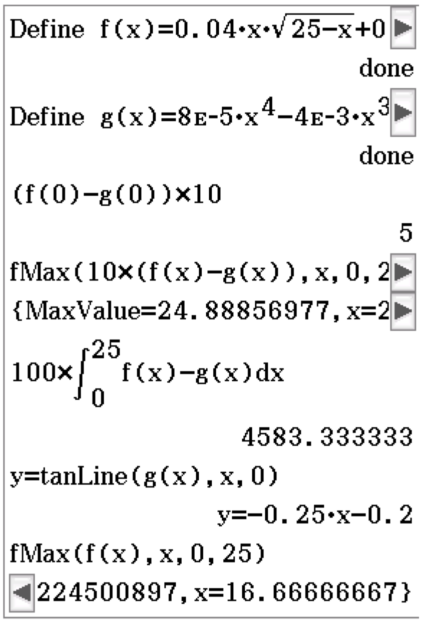
6. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein der Produktion zufällig entnommener Puppenwagen keinen der beiden Fehler aufweist.

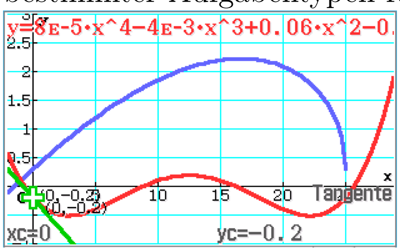
7. Nach einer Veränderung des Produktionsablaufes wird von Seiten der Spielzeugfabrik behauptet, dass von den produzierten Puppenwagen statt bisher 4% nun weniger fehlerhaft sind. In einem Test mit 100 der Produktion zufällig entnommenen Puppenwagen soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Puppenwagen beträgt mindestens 4%.“ auf einem Signifikanzniveau von 15% überprüft werden.
Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese für den beschriebenen Test.

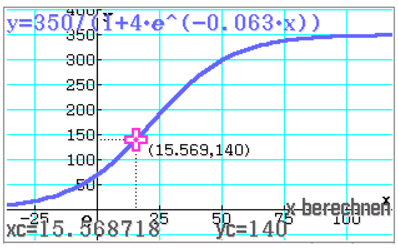


2021 Leistungskurs Nachtermin

Die abgebildeten screenshots sollen möglichst effiziente Lösungswege, aber auch -varianten für die Aufgaben des jeweiligen B-Teils aufzeigen. Damit verknüpft sind insbesondere die Fragen nach dem Umfang der Lösungsdokumentation, der (Nicht-)Vergabe von Bewertungseinheiten und der Eignung bestimmter Aufgabentypen für diesen Teil der Klausur.







Aufgaben 1.1 bis 1.4

$\begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} | \text{ans}$

$\begin{bmatrix} 16.66666667 \\ 2.224500897 \end{bmatrix}$

$\text{angle}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 \\ g(0) \end{bmatrix} - \text{ans}, \begin{bmatrix} 25 \\ g(25) \end{bmatrix} - \text{a}\right.\right.$

155.5014049

g(5)=normal(f(x),x,u)|x=5

$-0.4=0.04\cdot u\cdot(-u+25)^{0.5}\_5($

solve(ans,u)

{u=4.752897053,u=24.9996

$\begin{bmatrix} u \\ f(u) \end{bmatrix} | \text{ans}[1]$

$\begin{bmatrix} 4.752897053 \\ 1.15546027 \end{bmatrix}$

Define $w(t)=\dfrac{350}{1+4\cdot e^{-0.063\cdot t}}$

done

w(0)

70

solve(w(t)=140,t)

{t=15.5687183}

$\lim\limits_{t\to\infty}(w(t))$

350

Define $w(t)=\dfrac{600}{a+4\cdot e^{-b\cdot t}}$

done

$\lim\limits_{t\to\infty}(w(t)|b>0)$

$\dfrac{600}{a}$

solve(ans=300,a)

{a=2}

w(10)=180|ans

$\dfrac{600}{4\cdot e^{-10\cdot b}+2}=180$

solve(ans,b)

{b=0.1098612289}

$50\times\dfrac{21}{350}$

3

binomialCDf(6,50,50,0.06)

0.07764059519

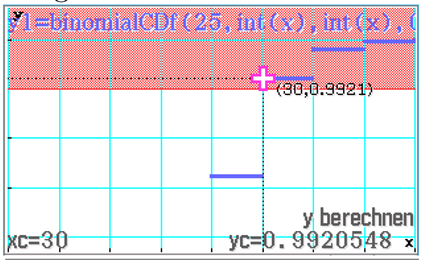
binomialCDf(45,50,50,0.94)

0.9223594048

binomialCDf(25,29,29,0.94)

0.972393811

Aufgaben 1.5 bis 1.8



binomialCDf(25,30,30,0.94)

0.9920547609

$\text{solve}\left(n\times\dfrac{3}{50}=\dfrac{18}{5},n\right)$

{n=60}

$\sqrt{n\times\dfrac{3}{50}\times\dfrac{47}{50}} | \text{ans}$

1.839565166

$\left.4\right], \begin{bmatrix} 4 \\ -4\times\sqrt{2}+4 \\ 4 \end{bmatrix}\Bigg\}\Rightarrow\{A,B,C,D\}$

$\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -3\cdot\sqrt{2}+3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3\cdot\sqrt{2}-3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4\cdot\sqrt{} \\ 4 \end{bmatrix}\right.$

factor({B−A,C−D})

$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 6\cdot(\sqrt{2}-1) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 8\cdot(\sqrt{2}-1) \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

judge(norm(C−A)=norm(B−D))

TRUE

$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}\Rightarrow\{nxy,n\}$

{dotP(n,A),dotP(n,B),dotP(

{12,12,12}

180−angle(n,nxy)

75.96375653

$\text{solve}\left(\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} b^2-3 \\ 1 \\ 2\cdot b \end{bmatrix}, n\right)=0, b\right)$

{b=2,b=−1.5}

B+t×(C−B)

$\begin{bmatrix} t+3 \\ t\cdot(\sqrt{2}-1)+3\cdot\sqrt{2}-3 \\ 4\cdot t \end{bmatrix}$

solve(ans[3,1]=1,t)

{t=0.25}

B+t×(C−B)|ans⇒P

Aufgaben 2.1 bis 2.4

$\begin{bmatrix} \dfrac{13}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{4}+3\cdot\sqrt{2}-3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\text{solve}\left(\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A+t\cdot(D-A)\right)=\right.$

{t=0.25}

A+t·(D−A)|ans⇒Q

$\begin{bmatrix} \dfrac{13}{4} \\ \dfrac{-(\sqrt{2}-1)}{4}-3\cdot\sqrt{2}+3 \\ 1 \end{bmatrix}$

norm(crossP(P−R,Q−R))×4

35.00104602

$\text{angle}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ z \end{bmatrix}-\dfrac{C+D}{2}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}-\dfrac{C+D}{2}\right)=$

$\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{17}\cdot(2\cdot(z-4)-3)}{17\cdot\sqrt{z^2-8\cdot z+34}}\right)=80$

solve(ans,z,0,0,∞)

{z=7.459787627}

(88−50)×2

76

invNormCDf("L",0.88,1,0)

1.174986792

$\text{solve}\left(\dfrac{50-48}{s}=\text{ans},s\right)$

{s=1.702146793}

$\dfrac{0.6972477064-0.0734}{0.6972477064}$

{s=1.702146793}

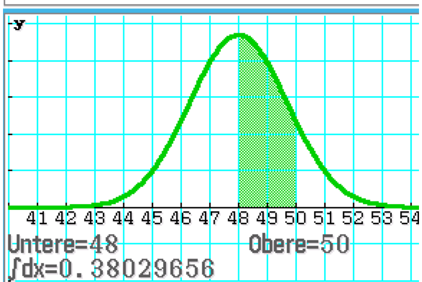
$\dfrac{0.6972477064-0.0734}{0.6972477064}$

0.8947289474

$\dfrac{0.0459}{0.1193}$

0.384744342

normPDf(x,1.7,48)



2021 Grundkurs Nachtermin

Aufgaben 1.1 bis 1.5

Define $g(x)=\frac{-x}{4}+15$
done
Define $f(x)=\frac{-x^3}{400}+\frac{281\cdot x^2}{800}-7$▸
done
g(0)
15
solve(f(x)=0,x)
{x=67.73210813}
{f(36),g(36)}
{6,6}
tanLine(f(x),x,36)
−0.25·x+15
$\int_0^{36} g(x)dx+\int_{36}^{67.73} f(x)dx$

$\int_0^{36} g(x)dx+\int_{36}^{67.7} f(x)dx$
674.2012404
solve(4·(x−40)+47.5=g(x),x)
{x=30}
$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}x\\g(x)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}40\\47.5\end{bmatrix}\right)|\text{ans}$
41.23105626
$\text{fMin}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}x\\f(x)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}40\\47.5\end{bmatrix}\right),\right.$▸
{MinValue=36.91227991,x=5▸
Define $h(x)=-0.92\cdot x^4+1.84\cdot$▸
done
simplify(h(−x)−h(x))
0

Aufgaben 1.5 bis 2.1

solve(h(x)=0,x)
{x=−1,x=1}
fMin(h(x),x,−1,1)
{MinValue=−0.92,x=0}
diff(h(x),x,1,1)
0
$\text{fMax}\left(\frac{d}{dx}(h(x)),x,-1,1\right)$
{MaxValue=1.41643266,x=0.▸
h(x)|ans
−0.4088888889
10×0.2
2
binomialPDf(2,10,0.2)
0.301989888
$(\text{binomialPDf}(1,10,0.2))^2$
0.07205759404
$\text{solve}(1-0.957=(1-p)^{10},p)$
{p=0.2699596821,p=1.7300▸
◂, $\begin{bmatrix}3.7\\-0.5\\1.7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3.7\\0\\0\end{bmatrix}\}$ ⇒{A,B,D,P}
$\left\{\begin{bmatrix}3.7\\0.7\\0.5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0.7\\0.5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3.7\\-0.5\\1.7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3.7\\0\\0\end{bmatrix}\right.$▸
D+B−A
$\begin{bmatrix}0\\-0.5\\1.7\end{bmatrix}$
{norm(B−A),norm(D−A)}
{3.7,1.697056275}
crossP(B−A,D−A)/4.44

Aufgaben 2.1 bis 2.6

$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$
$\text{dotP}\left(\text{ans},\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\text{dotP}(\text{ans},A)$
y+z=1.2
$\text{solve}\left(A+t\cdot(D-A)=P+\begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix},z\right)$
{z=1.2}
$\text{norm}\left(D+t\cdot(B-A)-\left(P+\begin{bmatrix}0\\0\\0.5\end{bmatrix}\right)\right)$
$\frac{\sqrt{1369\cdot t^2+169}}{10}$
solve(ans=1.7,t)
◂60662473,t=0.2960662473}
D+t·(B−A)|ans[2]
$\begin{bmatrix}2.604554885\\-0.5\\1.7\end{bmatrix}$
$\text{solve}\left(\tan(\alpha)=\frac{0.5}{0.7-y},y\right)$
$\left\{y=-\frac{0.5}{\tan(\alpha)}+0.7\right\}$
100×(1−0.35)×(1−0.2)
52
0.35×0.2+0.65×0.2
0.2
$1-\frac{65}{100}\times\frac{64}{99}\times\frac{63}{98}$
0.7298701299

12.8 TÜ-Variante mieth CAS

Ab Klasse 8 gestalte ich die tägliche Übung unter Verwendung eines screenshots aus der Hauptanwendung, der 4 oder 5 (meist alleinstehende) Zeilen umfasst und immer mit der gleiche Aufgabenstellung einhergeht:

„Erläutere nebenstehende Rechnungen.“

Die Schüler erhalten (nach einer Eingewöhnungsphase) ca. 10 min Zeit um sich unter Verwendung aller Hilfsmittel, sogar der Nachbarin, vorzubereiten. Anschließend bitte ich einen Schüler zur Tafel, der dort zunächst einen ca. 10 min-Monolog hält. Abschließend dürfen die Miethschüler und der Lehrer noch einige Fragen stellen.

sin(310)
−sin(50)
$\text{solve}\left(\frac{\sin(\alpha)}{4}=\frac{\sin(30)}{3},\alpha,0,0\right.$▸
{α=41.8103149,α=138.1896▸
$\begin{cases}6=5m+n\\-4=3m+n\end{cases}\Big|_{m,n}$
{m=5,n=−19}
Define $f(x)=x^2$
done
solve(f(2+d)=9,d)
{d=−5,d=1}

Für jede mathematisch korrekte Aussage (Inhalt und Fachsprache) erhält der Schüler einen Punkt, ebenfalls bei entsprechenden Reaktionen auf Nachfragen. Bei manchen Aufgaben (z.B. bei Dreiecken) ist auch eine alternative oder weiterführende Untersuchungsmöglichkeit (z.B. im DGS) am `ClassPad` möglich. Auch solche Demonstrationen bringen Punkte. Falsche oder ungenaue Aussagen werden separat gezählt. Ziel sind insgesamt ca. 20 Bewertungseinheiten.

In der Eingewöhnungsphase gibt es für die Schüler Hilfsfragen, anhand derer sie sich Notizen machen können:

Was sehe ich? Einerseits geht es um das Erkennen mathematischer Strukturen (Term, Gleichung(ssystem), Funktion, ...) und andererseits um Bedeutung von Taschenrechnerbefehlen (`solve`, `factor`, ...). Das bezieht sich sowohl auf die Ein- als auch auf die Ausgabe.

Wie rechnet man das? In den allermeisten Fällen sind die Rechnung ohne Rechner oder sogar im Kopf nachvollziehbar. Die Erläuterung soll vor allem „erläutert“ und nicht unbedingt „vorgerechnet“ werden. Die Schüler sollen also Gesetzmäßigkeiten (z.B. die binomischen Formeln) nennen oder Lösungsschritte begründen (... mit 3 erweitert, damit ...).

Warum wurde das gerechnet? Die Schüler sollen sich Gedanken um eine Aufgabenstellung machen, die zu dieser Eingabe geführt hat und erläutern, in welchem Bezug das Ergebnis dazu steht.

Womit hängt es zusammen? Neben einem möglichen Anwendungsbezug gibt es auch innermathematische Zusammenhänge. Die Terme einer Gleichung kann man geometrisch oder als Funktionsterm interpretieren. Grundsätzlich ist das Veranschaulichen der Rechnungen ein wichtiger Aspekt des Monologes.

Mittlerweile schätze ich diese Form der TÜ sehr und bevorzuge sie gegenüber der klassischen Variante der Kopfübung, denn

- viele mathematische Kompetenzen (kommunizieren, modellieren, Darstellungen verwenden, mit Symbolen und Formalia umgehen, argumentieren) werden angesprochen
- sowohl oHiMi- als auch miHiMi-Fähigkeiten werden gefestigt
- fehlende Kenntnisse können innerhalb der Übung (zumindest teilweise) aufgearbeitet werden
- die Übertragung zwischen Taschenrechner-Syntax und Fachsprache (und ihre Abgrenzung voneinander) wird trainiert
- die offene Aufgabe differenziert leistungsabhängig
- die sozial offene Anfangssituation wirkt meist anregend
- sie zeigt Mathematik als „Lehre von den Zusammenhängen“

Bei der Auswahl der Aufgaben orientiere ich mich sowohl an länger zurückliegenden Inhalten (z.B. Addition gemeiner Brüche) als auch aktuellen (z.B. Lösen linearer Gleichungssysteme in Klasse 8).

13 Lehrplansynopse

Der sächsische Lehrplan von 2002 (der für die 8. Klassen ab 2005 angewendet wurde) unterschied sich von seinem Vorgänger grundsätzlich in mehreren Punkten. Einer davon war der konsequente Einbezug mathematischer Software: zunächst in der Forderung des Einsatzes im Mathematikunterricht, dann in der punktuellen Ausweisung der Verwendung in verschiedenen Lernbereichen und schließlich in der Reduktion einiger mathematischer Inhalte, wie z.B. den Wurzelgesetzen oder der Quotientenregel. Hier folgt eine Zusammenstellung der Lehrplanaussagen, die m.E. mehr oder weniger direkt mit dem Einsatz mathematischer Software (bzw. dem `ClassPad`) zu tun haben.

13.1 Grundaussagen

- Aufgaben, die mit bzw. ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind, müssen in einem **ausgewogenen Verhältnis** einbezogen werden.

- Modernen Mathematikunterricht kennzeichnet ein fachdidaktisch und mediendidaktisch sinnvolles Nutzen zeitgemäßer Hilfsmittel, das aufwändige algorithmische Tätigkeiten auf einen Umfang begrenzt, der für die Entwicklung elementarer Rechenfertigkeiten notwendig ist.

- Als Hilfsmittel für die Arbeit im Unterricht, das Lösen von Hausaufgaben **und** das Absolvieren von Leistungskontrollen **werden eingesetzt**:… mathematische Software in Form von Computer-Algebra-Systemen (CAS) ab Klassenstufe 8, dynamischen Geometriesystemen (DGS) und Tabellenkalkulation (TK)

- Der Einsatz von CAS sollte insbesondere entdeckendes Lernen fördern sowie bei sachbezogenen Aufgabenstellungen die Reflexion zum Sachverhalt und die Interpretation des Ergebnisses unterstützen.

13.2 inhaltliche Zuordnung

- Umformen von einfachen Termen und Gleichungen ohne Hilfsmittel,
  Kennen der Verwendung von CAS beim Umformen komplexerer Terme und Gleichungen

- Eine Lösungsformel kann z. B. durch Lösen der allgemeinen Form oder der Normalform einer quadratischen Gleichung mithilfe von CAS gewonnen werden.

- Gewinnen der Umkehrfunktion mit CAS

- Nutzen von CAS zum Nachweis der Eigenschaften von Zahlenfolgen
  anschauliches Gewinnen des Grenzwertbegriffs

- Polynomdivision mittels CAS

- Anhand inner- und außermathematischer Problemstellungen sollen die im jeweiligen Fall interessierenden Eigenschaften auch mit GTR/CAS betrachtet werden. Es geht nicht um eine routinemäßige Abarbeitung einer Kurvendiskussion.

- mit CAS auch verkettete und verknüpfte Funktionen in Integralen

13.3 Jahrgangsstufen

Klasse 8

1. Arbeiten mit Termen und Gleichungen — Main
   - Variablen (Eingabe, Variablenname, Belegen und Freigeben)
   - Terme (Eingabe, Termwertberechnung, Termumformung)
   - (Un-)Gleichungen ((schrittweises) Lösen, Lösungsmenge)
2. Zufallsversuche — Main, TK, Statistik
   - Simulation von Zufallsversuchen
     (Einzel- und Mehrfachversuch, ein- und mehrstufiges Experiment)
   - Stabilisierung der relativen Häufigkeit (Darstellen von Messreihen)
   - Produktregel (Abzählterme)
3. Funktionen und lineare Gleichungssysteme — Main, Grafik & Tabelle, Geometrie, TK, Statistik
   - Darstellung und Eigenschaften von Funktionen
   - Darstellung und Eigenschaften linearer Funktionen
   - grafisches und rechnerisches Lösens linearer Gleichungssysteme
4. Ähnlichkeit — Geometrie
   - Konstruktion und Eigenschaften der zentrischen Streckung
5. Vernetzung: Heuristische Strategien
   - Dokumentieren und Präsentieren von Lösungswegen

Klasse 9

1. Funktionen und Potenzen — Main, Grafik & Tabelle
   - Potenz- und Wurzelschreibweise
   - Wurzelgleichungen
   - Potenzgesetze, Probleme beim Radizieren mit GTR
   - Eigenschaften von Potenzfunktionen (experimentelles Ermitteln von Vermutungen anhand der Graphen und der Struktur der Funktionsterme)
   - Einfluss von Parametern auf den Verlauf der Graphen
   - Lösen quadratischer Gleichungen
   - Lösen von Extremwertaufgaben mit elementaren Mitteln
2. Kreise, Kreiszylinder und Kugeln — Geometrie, Main
3. Rechtwinklige Dreiecke — Geometrie, Main
   - Streckenlängen, Winkelgrößen, Flächeninhalten im rechtwinkligen Dreieck und Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramide und Kreiskegel

4. Auswerten von Daten — Main, Statistik, TK
    - Modalwert, Median, arithmetischem Mittel, Spannweite, Varianz und Standardabweichung
    - Klassenbildung bei Daten, Darstellen von Histogrammen
    - Dokumentation und Präsentation
5. Vernetzung: Mathematik und moderne Rechentechnik — Geometrie, TK
    - Nutzen von Rechentechnik als Hilfsmittel im Problemlöseprozess
    - Einsetzen geeigneter Lösungsverfahren und Mathematikwerkzeuge sowie kritisches Werten der Ergebnisse

Klasse 10

1. Wachstumsvorgänge und periodische Vorgänge — TK, Grafik & Tabelle, Folgen & Reihen
    - rekursive und explizite Beschreibung exponentiellen Wachstums
    - Eigenschaften Exponentialfunktion
    - Einfluss von Parametern
    - exponentielle Regression
    - Graph & Eigenschaften Sinusfunktion
    - Grad- und Bogenmaß
    - Einfluss von Parametern
2. Diskrete Zufallsgrößen — Statistik, TK
    - Stabdiagramme und Histogramme
    - Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
3. Algebraisches Lösen geometrischer Probleme
    - Herleitung des Sinus- und des Kosinussatzes sowie der Flächeninhaltsformel für Dreiecke
    - Berechnungen an allgemeinen Dreiecken, Pyramiden und Kegeln
4. Funktionale Zusammenhänge — Main, Statistik, Geometrie, Grafik & Tabelle, Folgen & Reihen
    - Gewinnen der Umkehrfunktion mit CAS, grafische Interpretation
    - Eigenschaften der Logarithmusfunktionen
    - Lösen von Exponentialgleichungen
    - Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen
    - Parameterdarstellung des Kreises
    - explizite und rekursive Bildungsvorschrift von Zahlenfolgen
    - Schranke, Grenzwert
5. Vernetzung: Zinsrechnung — TK

Grund- und *Leistungs*kurs

1. Differentialrechnung — TK, Grafik & Tabelle, Folgen & Reihen
   - Grenzwerten bei Funktionen, *abschnittsweise definierte Funktionen, Grenzwertsätze für Funktionen*
   - *Approximation einer Funktion durch eine lineare Funktion in einem Intervall*, Differenzen- und Differentialquotient, Ableitungsfunktion nach Definition
   - Ableitungen, Umkehrung des Differenzierens bei Potenzfunktionen
   - lokale und globale Extrema, Wendepunkte, Nullstellen, Polstellen, Monotonie, Symmetrie, achsenparallele *und schräge* Asymptoten
   - Bestimmen von Gleichungen ganzrationaler Funktionen
   - Extremwertproblemen
   - Regression
2. Matrizen — Main, Geometrie
   - Darstellen linearer Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise
   - Multiplizieren zweier verketteter Matrizen
   - *Nachweis der Nichtgültigkeit des Kommutativgesetzes an Beispielen*
   - Gauß-Jordan-Verfahren
   - Drehung geometrischer Objekte in Ebene und Raum, Verflechtungen
3. Vektoren, Geraden und Ebenen — Main, 3D, Geometrie
   - Addition, Subtraktion und Vielfachenbildung von Vektoren
   - *lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren*
   - Gleichungen von Geraden und Ebenen in Parameterform und parameterfreier Form
   - Lagebeziehungen und Bestimmen von Schnittpunkten (Gerade *& Ebene* – Gerade & Ebene)
4. Binomialverteilte *(und Normalverteilte)* Zufallsgrößen — Main, Statistik, TK
   - Wahrscheinlichkeiten und Kenngrößen binomialverteilter Zufallsgrößen
   - Fakultät, Binomialkoeffizient
   - *Simulation*
   - Wahrscheinlichkeiten und Kenngrößen normalverteilter Zufallsgrößen
5. Integralrechnung — Main, Grafik & Tabelle
   - Stammfunktion, bestimmtes Integral
   - Eigenschaften des bestimmten Integrals
   - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
   - Berechnung von Flächeninhalten
   - *Volumina von Rotationskörpern bei Rotation um die x-Achse, Bogenlängen*
6. Beurteilende Statistik — Main, Statistik, TK

- ein- und zweiseitiger Signifikanztests für binomialverteilte Zufallsgrößen
- Signifikanzniveau, kritischer Wert

7. Abstände und Winkel Main

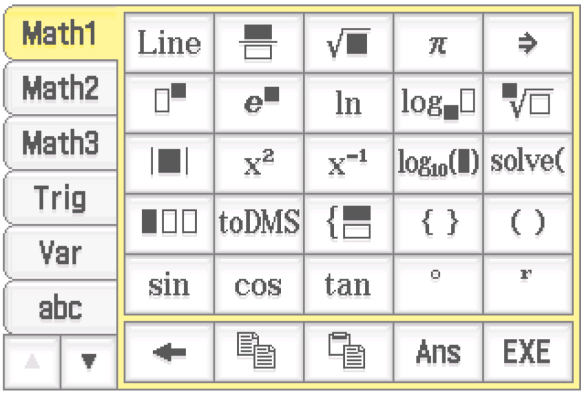
- Skalar- und Vektorprodukt
- Orthogonalitätsbedingung für Vektoren, Normalenvektor
- *Hesse'sche Normalenform für Geraden- und Ebenengleichungen*
- Schnittwinkel
- Abstände

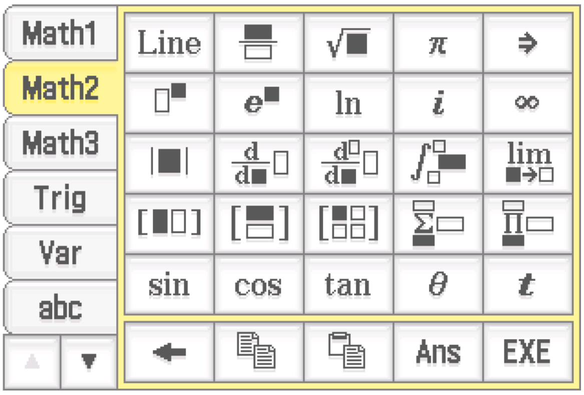
8. Weitere Anwendungen Main, Grafik & Tabelle, Geometrie

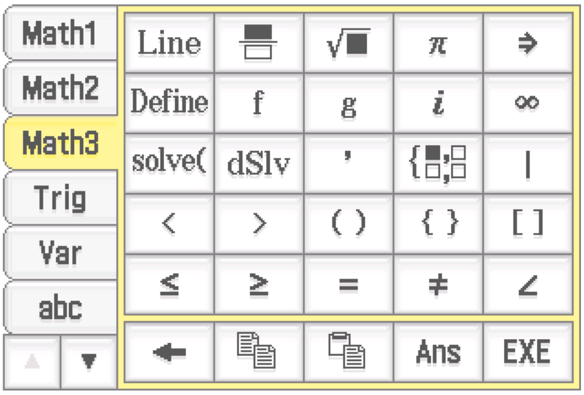
- minimalen und maximalen Entfernungen in Ebene und Raum
- Spiegelung eines Punktes an einer Ebene
- *Zusammenhang von Dichtefunktion, Wahrscheinlichkeit und Flächeninhalt*
- Funktionsscharen *und Ortskurven*
- *Ebenen- und* Geradenscharen

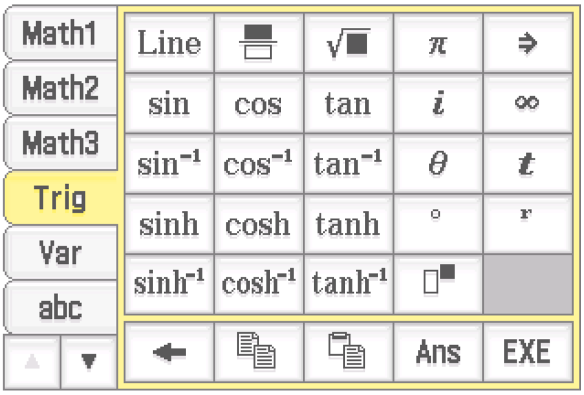
A Keyboard

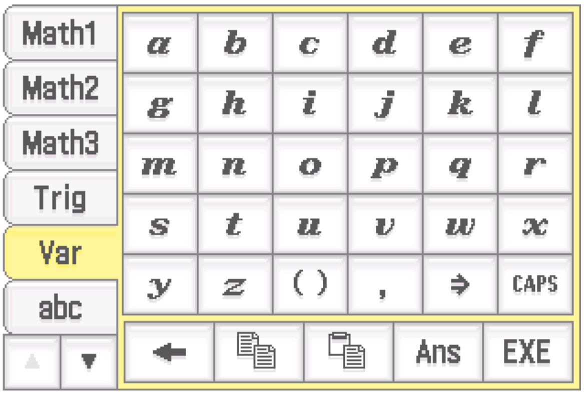
A.1 mathematische Ausdrücke



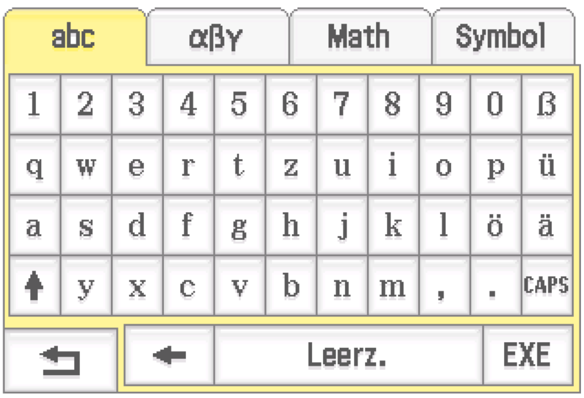


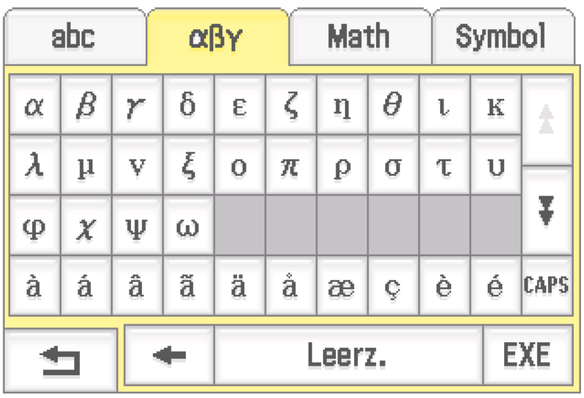


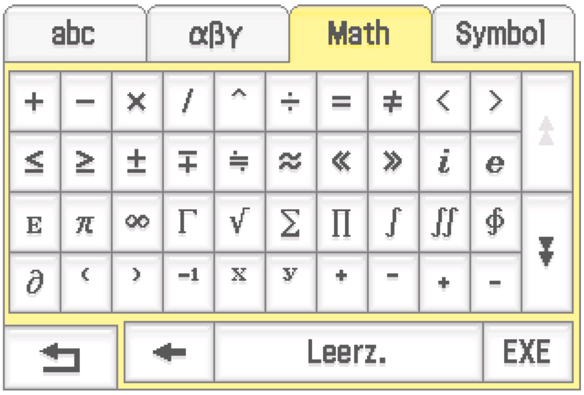


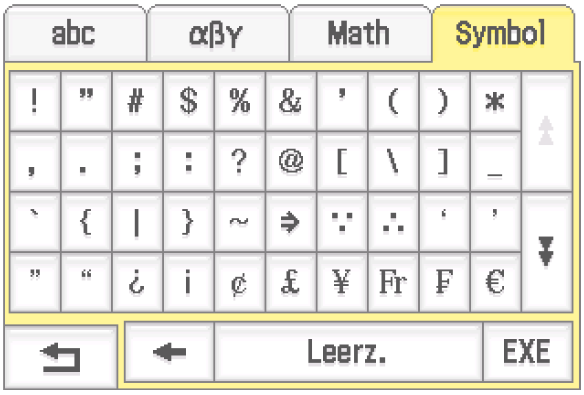


A.2 Buchstaben und (Sonder-)Zeichen

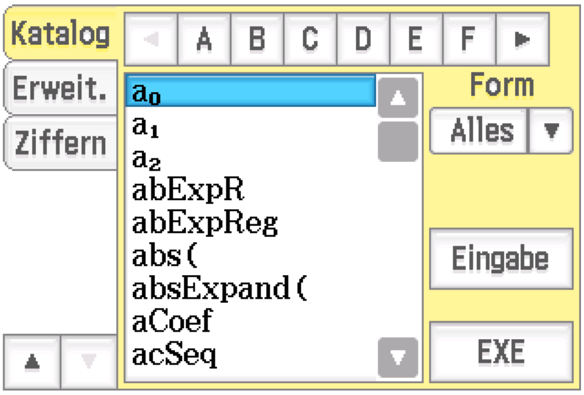




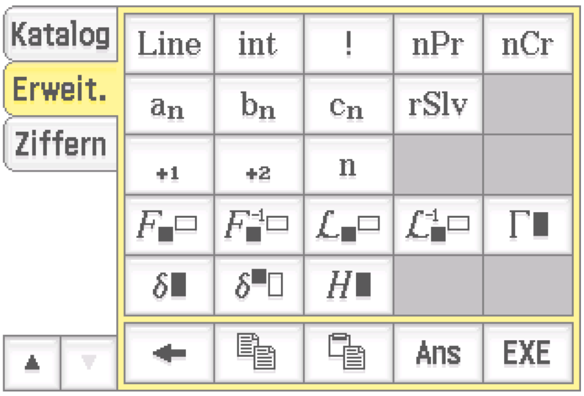


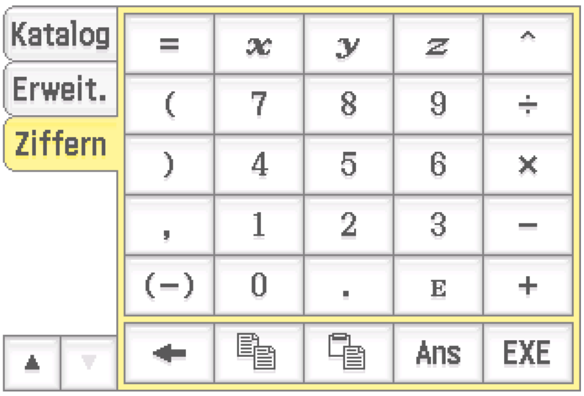


A.3 Katalog



A.4 Erweiterter Befehlssatz und Ziffernblock





B Befehlsübersicht (Auswahl)

Befehl	Parameter	Ergebnis
`Umformungen`		
`approx`	Zahl	Dezimalzahl
`simplify`	Term	vereinfachter Term
`expand`	Term (, Variable)	Summe (Partialbruchzerlegung)
`factor`/`rFactor`	Term	Produkt (über $\mathbb{Q}$ bzw.$\mathbb{R}$)
`factorOut`	Term, Faktor	Produkt aus Faktor und „Rest“
`combine`	Term	Zusammenfassen (z.B. von Brüchen)
`collect`	Term(, Variable)	Polynom (bzgl. der Variable)
`propFrac`	Term	Polynomdivision
`Berechnung`		
`diff`	$f(x)$, x, n (, x_1)	n. Ableitung von f (an einer Stelle x_1)
$\int$	$f(x)$, x (, a, b, ε)	(un)bestimmtes Integral (mit Genauigkeit ε)
`lim`	$f(x)$, x, x_1 (, ± 1)	Grenzwert (von links oder rechts) von $f(x)$ an der Stelle x_1
`tanline`/`normal`	$f(x)$, x, x_1	Tangente/Normale an Graph von f an der Stelle x_1
`arcLen`	$f(x)$, x, a, b	Bogenlänge von a bis b des Graphen von f
`fMin/fMax`	$f(x)$, x(,a, b, ε)	globales Minimum/Maximum mit Stelle im Intervall
`Vektor`		
`angle`	2 Vektoren	Winkel zwischen den Vektoren
`norm`	Vektor	(euklidische) Länge des Vektors
`crossP`	2 Vektoren	(Vektor-) Kreuzprodukt
`dotP`	2 Vektoren	(Punkt-) Skalarprodukt
`unitV`	Vektor	Einheitsvektor (Länge 1)
`Gleichung (oder Weiterführend)`		
`solve`	G (,V)	Lösung(en) der Gleichung G (nach der Variablen V)
`Matrix`		
`ref` / `rref`	Matrix	Dreiecks- bzw. Diagonalgestalt
`mRowAdd`	a, M, k, i	addiert zur i. Zeile der Matrix M das a-fache der k.
`(inverse) Verteilung`		
`binomialPDf`	k, n, p	Wahrscheinlichkeit, genau k Erfolge bei n Vers. mit Erfolgswkt. p
`binomialCDf`	k_1, k_2, n, p	Wkt., k_1 bis k_2 Erfolge bei n Vers. mit Erfolgswkt. p
`invBinomialCDf`	P, n, p	kleinstes k mit $\texttt{binomialCDf}(0, k, n, p) \geq P$
`normPDf`	x, σ, μ	Wert der normalverteilten Wkt.-Dichte $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$
`normCDf`	a, b, σ, μ	Wahrscheinlichkeit, dass x im Intervall $[a; b]$ liegt
`invNormCDf`	Lage, P, σ, μ	a je nach Lage $\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = P$, $\int_{a}^{2\mu-a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = P$ oder $\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = P$

Befehl	Parameter	Ergebnis
`Liste`		
`seq`	$f(x)$, x, a, b, h	Werteliste von f mit x von a bis b in h-Schritten
`sortA` (`D`)	Liste	auf- bzw. absteigende Sortierung
`dim`	Liste	Länge
`sum`	Liste	Summe aller Listenwerte
`Δlist`	Liste	Liste mit Differenzen benachbarter Listenwerte
`sequence`	(xListe,) yListe, x	Interpolationspolynom
`Manuell`		
`invert`	Gleichung (, x, y)	Vertauscht in einer Gleichung zwei Variablen