Realitätsbezogene Aufgaben in der Sekundarstufe II mit dem CASIO ClassPad

Gilbert Greefrath – Udo Mühlenfeld

2. Auflage 2018

Inhaltsverzeichnis

Download

Gilbert Greefrath

Eine Datei wird in 38 Sekunden aus dem Internet auf dem eigenen Computer gespeichert. Dabei wird zu einigen Zeitpunkten die Übertragungsrate notiert (siehe Abbildung 1, Abblidung 2 und Tabelle).

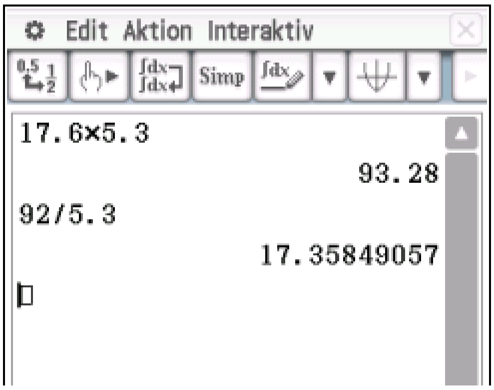
Zeit in Sekunden	0	5,3	10,9	18,4	32,1	38
Übertragungsrate in kB/Sek.	17,6	17,6	11,2	9,62	9,62	11,2

a) Entscheiden Sie, wie sich vermutlich die Übertragungsrate zwischen 0 und 5,3 Sekunden verhalten hat?
b) Bestimmen Sie die geschätzte Dauer nach 5,3 Sekunden und nach 18,4 Sekunden. Begründen Sie Ihren Rechenweg
c) Ermitteln Sie eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die die Messwerte näherungsweise beschreibt. Verwenden Sie diese Funktion auch für die folgenden Aufgabenteile.
d) Untersuchen Sie, zu welchem Zeitpunkt ist die Übertragungsrate (Downloadgeschwindigkeit) und die Veränderung der Übertragungsrate am größten ist.
e) Beurteilen Sie die Qualität der Funktion mit Hilfe der beiden Abbildungen. In welchem Bereich könnte die wirkliche Übertragungsrate anders verlaufen sein?
f) Bestimmen Sie, zu welcher Zeit sind die ersten 100kB der Datei auf dem Rechnergespeichert sind.
g) Ermitteln Sie die wirkliche durchschnittliche Übertragungsrate während der gesamten 38 Sekunden? Vergleichen Sie diese mit der von Ihnen verwendeten Funktion 4. Grades.

Lösungshinweise

Aufgabe a)

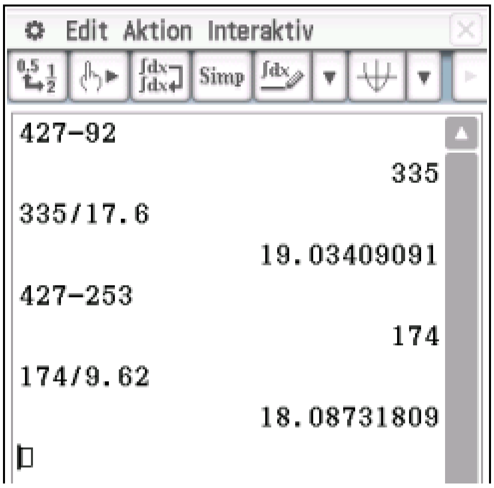
Zur Zeit 0 und 5,3 Sekunden ist die Übertragungsrate jeweils 17,6 kB/Sek. Wäre die Geschwindigkeit die gesamte Zeit so groß gewesen, wäre die zu erwartende Datenmenge aber größer gewesen. Die durchschnittliche Downloadgeschwindigkeit liegt in diesem Zeitraum nur bei 17,4 kB/Sek. Es ist zu vermuten, dass zwischen 0 und 5,3 Sekunden die Geschwindigkeit geringer war.



Aufgabe b)

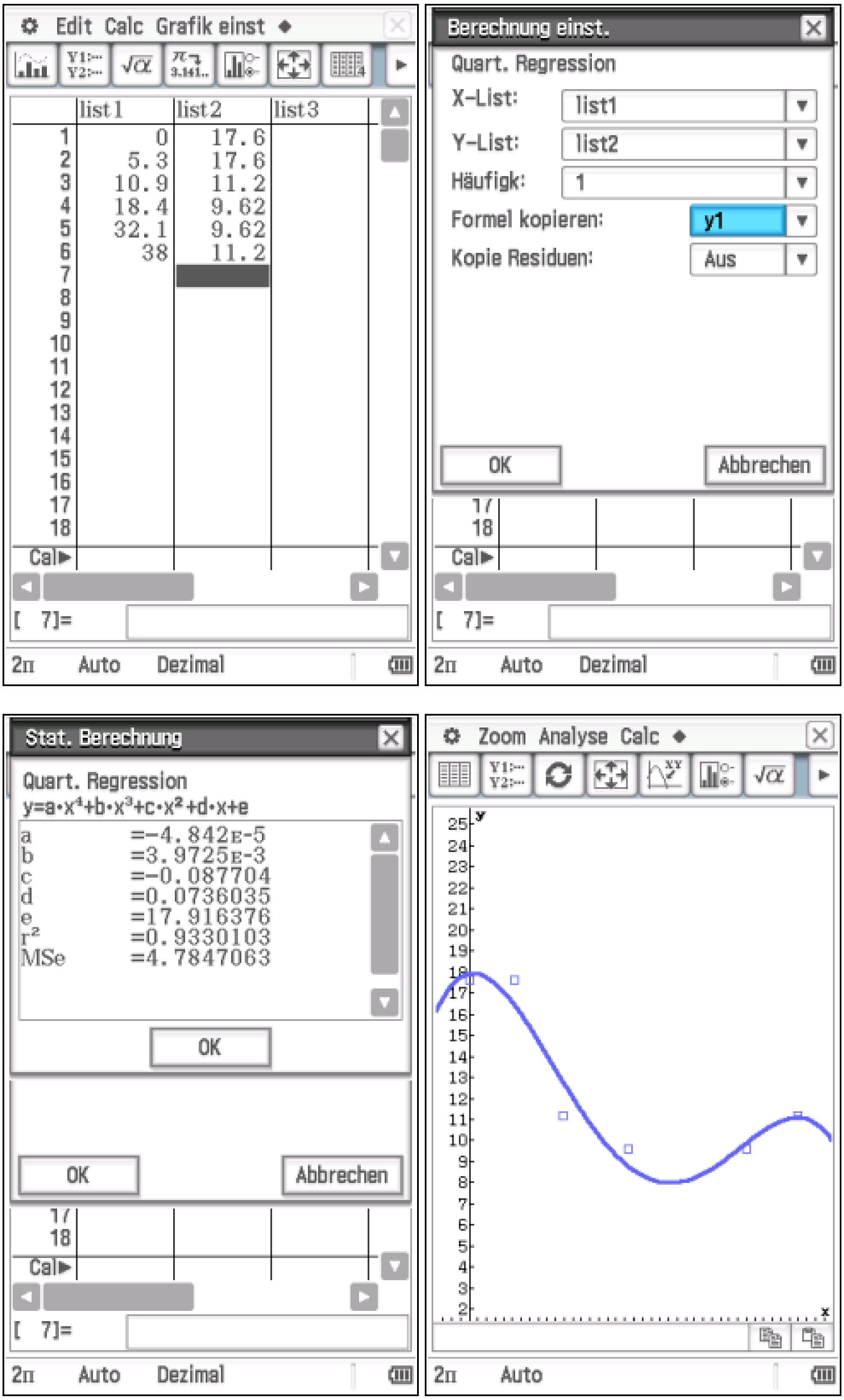
Nach 5,3 Sekunden sind noch 335kB herunter zu laden. Bei einer Geschwindigkeit von 17,6 kB/Sek. würde das noch 19 Sekunden dauern, also ingesamt 24,3 Sekunden.

Nach 18,4 Sekunden sind noch 174 kB herunter zu laden. Bei einer Geschwindigkeit von nur noch 9,62 kB/Sek. würde das noch 18,1 Sekunden dauern, also insgesamt 36,5 Sekunden.



Aufgabe c)

Die Funktion kann in verschiedener Weise modelliert werden. Hier wird eine ganzrationale Funktion 4. Grades mit Hilfe des Statistik-Menüs näherungsweise durch die gegebenen Werte gelegt. Der Weg mit Hilfe von Gleichungssystemen ist schwieriger, da die Anzahl der Werte im Hinblick auf die Parameter der Funktion vierten Grades zu groß ist.



Aufgabe d)

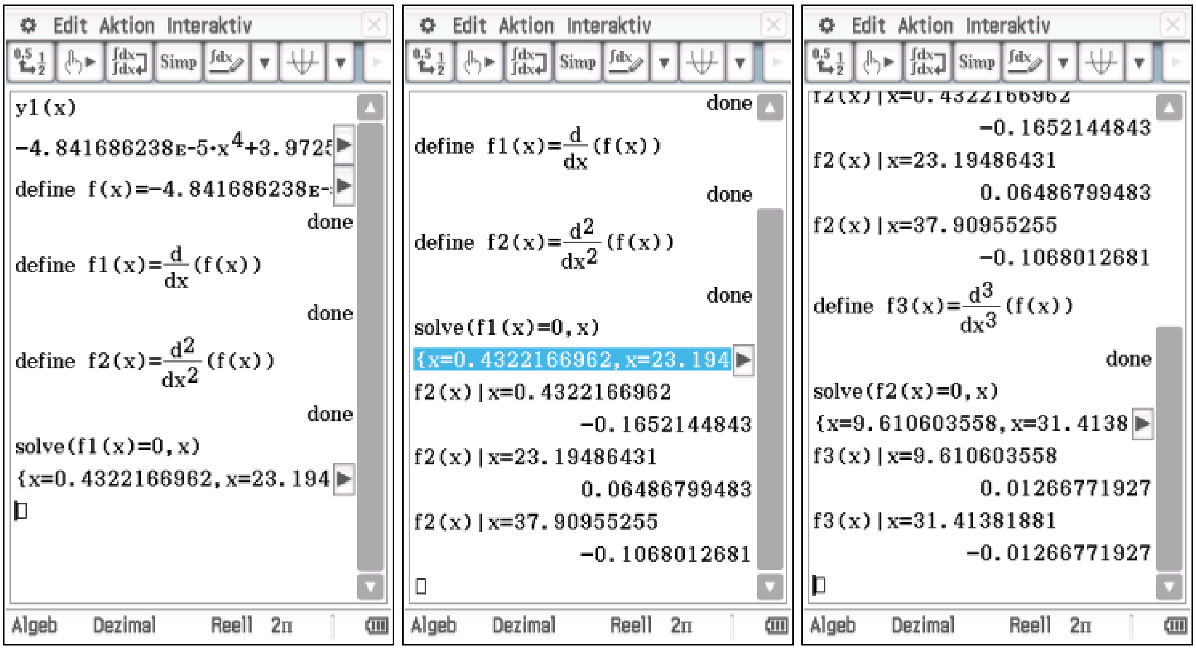
Die Funktion wurde in Aufgabenteil c) im Grafik-Menü unter y1(x) abgelegt. Diese Teilaufgabe kann nun numerisch oder algebraisch gelöst werden. Hier wird die algebraische Lösung vorgestellt.

Die Funktion und ihre beiden ersten Ableitungen werden definiert. Im nächsten Schritt werden die Nullstellen der ersten Ableitung berechnet. Mit Hilfe der zweiten Ableitung wird der relevante Wert überprüft. Hierzu reicht eigentlich die Betrachtung des Graphen aus.

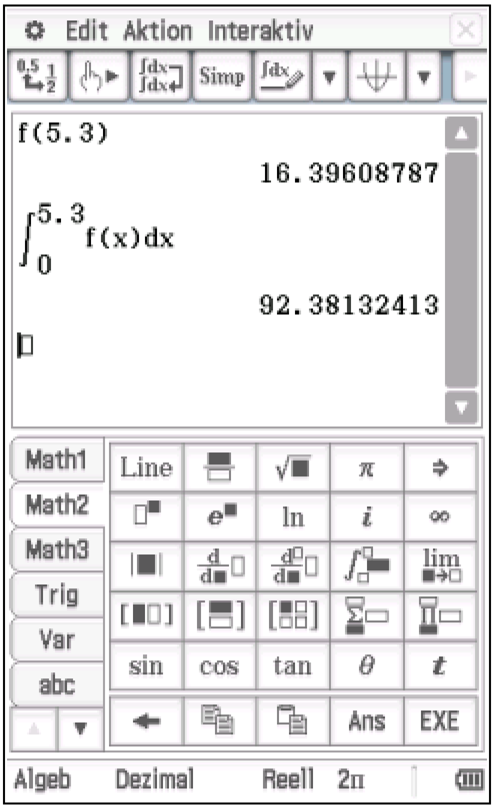
Da die zweite Ableitung bei 0,43 negativ ist, handelt es sich um eine Maximalstelle. Das gleiche gilt für die Stelle 37,9. Die Downloadgeschwindigkeit ist also an diesen Stellen am größten. Das absolute Maximum liegt bei 0,43.

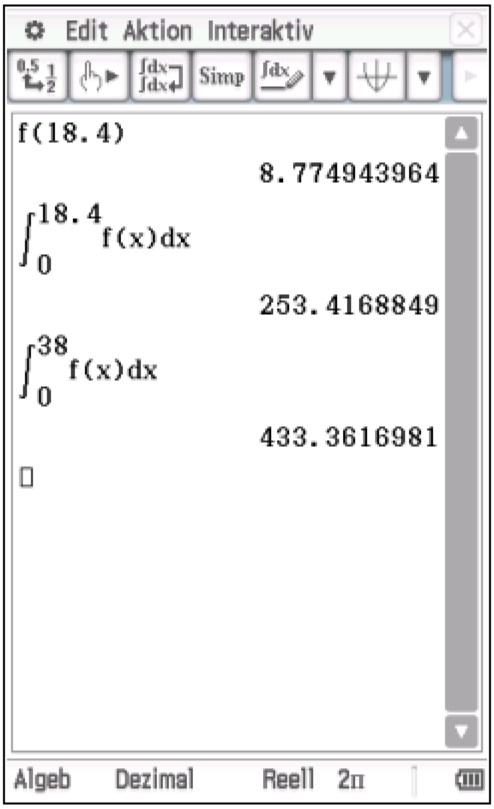
Für die Veränderung der Downloadgeschwindigkeit kann man analog vorgehen. Dabei ergeben sich folgende Berechnungen:

Da nur die Nullstelle 31,4 der zweiten Ableitung in der dritten Ableitung einen negativen Wert hat, muss die Veränderung der Downloadgeschwindigkeit hier maximal sein. Dies bestätigt auch der Graph.

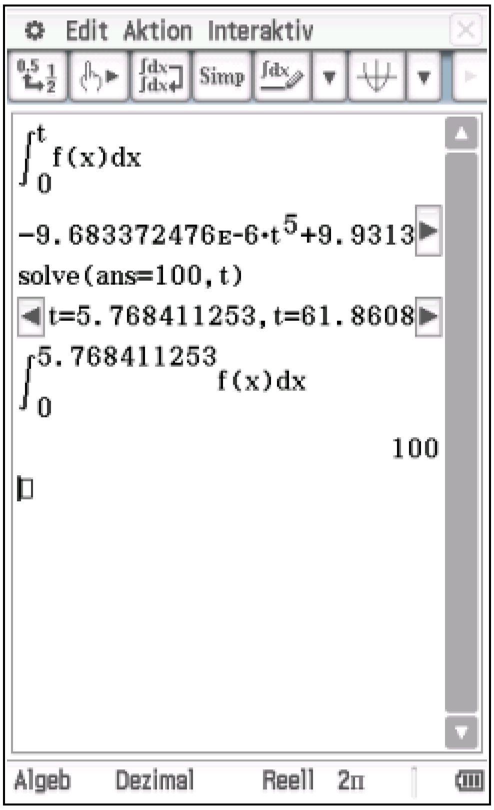


Aufgabe e)
Mit Hilfe der gegebenen Funktion werden die in den Abbildungen angegebenen Werte überprüft. Dabei werden die Übertragungsrate und die Datenmenge zu diesen Zeitpunkten berechnet. Sie stimmt relativ gut überein. Die Übereinstimmung zum zweiten Zeitpunkt ist noch besser als zum ersten. Nur die Gesamtdatenmenge stimmt nicht mit dem angegebenen Wert überein. Sie ist mit der gegebenen Funktion zu groß.



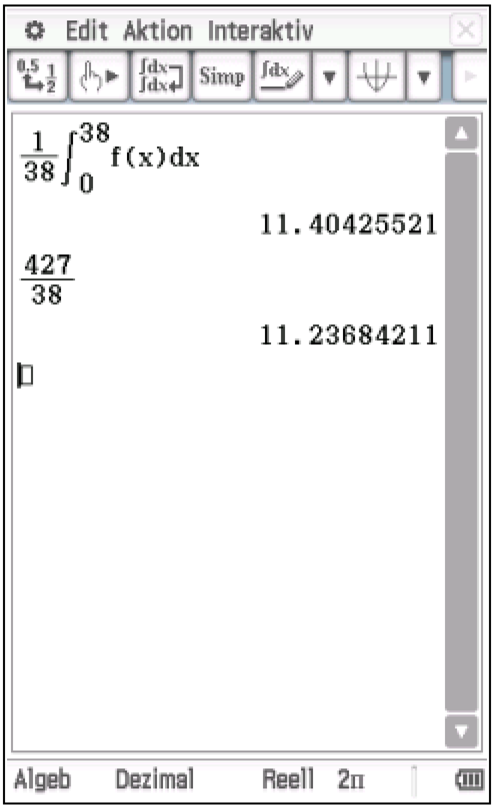


Aufgabe f)
Das Integral wird bis zur Zeit t berechnet. Der erhaltene Term wird der gewünschten Datenmenge 100 gleichgesetzt und nach t aufgelöst (Dabei muss die Variable t explizit ausgewählt werden). Das einzige Ergebnis im Definitionsbereich ist 5,7. Die Probe zeigt, dass das Integral den richtigen Wert hat.



Aufgabe g)

Der Vergleich der durchschnittlichen Downloadgeschwindigkeit berechnet mit Hilfe der modellierten Funktion und mit Hilfe der Gesamtdatenmenge ergibt eine geringfügig höhere Geschwindigkeit durch die modellierte Funktion.



Bahnübergang

Ulrich Droste

Das Landestraßenbauamt und die Bahn planen die Neugestaltung eines Bahnübergangs. Ein Koordinatensystem wird so gesetzt, dass der Übergang im Punkt $B = (0|0)$ ist. [1 Einheit = 100m].

a) Die Straße verläuft von links kommend geradlinig bis zum Punkt B. Die zugehörige Gleichung lautet $g_1(x) = -2x$. Nach einer zu schließenden Lücke folgt die Straße ab dem Punkt $P = (2|-2)$ nach rechts einer Parabel mit $p(x) = -x^2 + 2x - 2$. Zeichnen Sie die bestehende Straßenstücke in ein Koordinatensystem ein!

b) Es soll eine ganzrationale Funktion f_1 niedrigsten Grades ermittelt werden, deren Graph die Lücke zwischen B und P so schließt, dass die Straße glatt (knickfrei) in die vorgegebenen Strecken übergeht! Begründen Sie die Wahl des Grades der Funktion!

c) Zeigen Sie das f_1 keine Extremstellen hat! (Wenn Sie f_1 nicht gefunden haben, rechnen Sie mit $f_1 = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$).

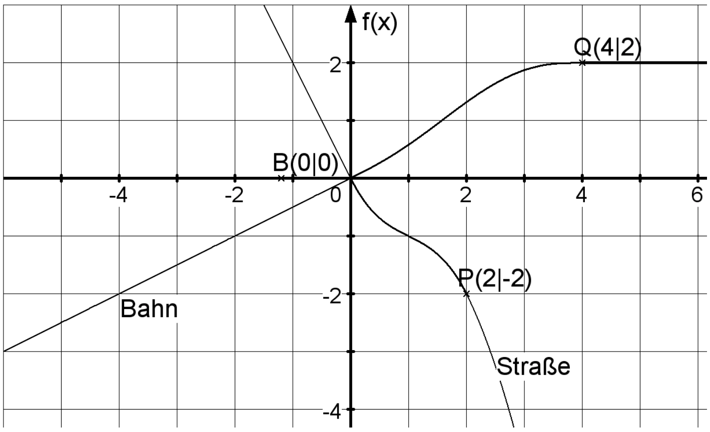
d) Die Bahnlinie verläuft von links kommend geradlinig bis zum Bahnübergang und trifft hier senkrecht auf die Straße. Nach einer zu schließenden Lücke führt sie ab dem Punkt $Q(4|2)$ parallel zur x-Achse weiter. Zeichnen Sie die bestehenden Gleisstücke in das Koordinatensystem aus a)!

e) Das erforderliche Gleisstück für die Lücke soll glatt und ruckfrei in B und Q an den vorgegebenen Geradenstücken ansetzen. Bestimmen Sie dazu eine ganzrationale Funktion f_2 möglichst niedrigen Grades! Begründung!

f) B und Q sind Wendepunkte des Graphen der Funktion f_2. Bestimmen Sie den dritten Wendepunkt des Graphen dieser Funktion! (Wenn Sie f_2 nicht gefunden haben, rechnen Sie mit $f_2 = \frac{3}{512}x^5 - \frac{7}{128}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x$).

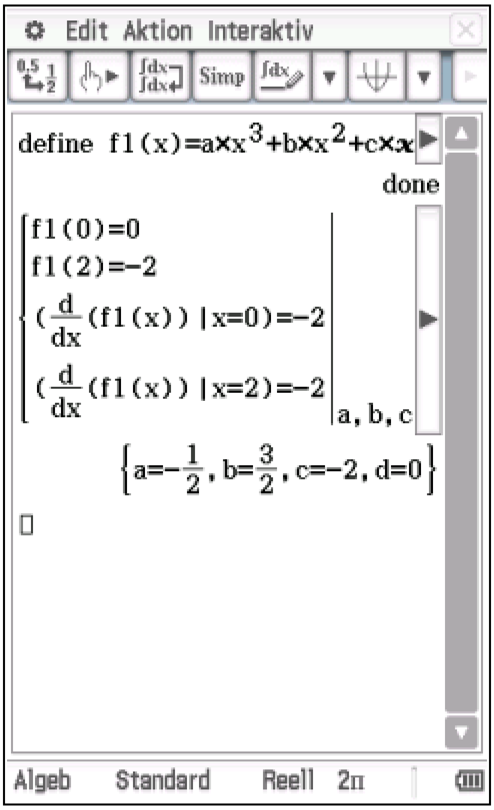
Lösungshinweise

Aufgabe a)

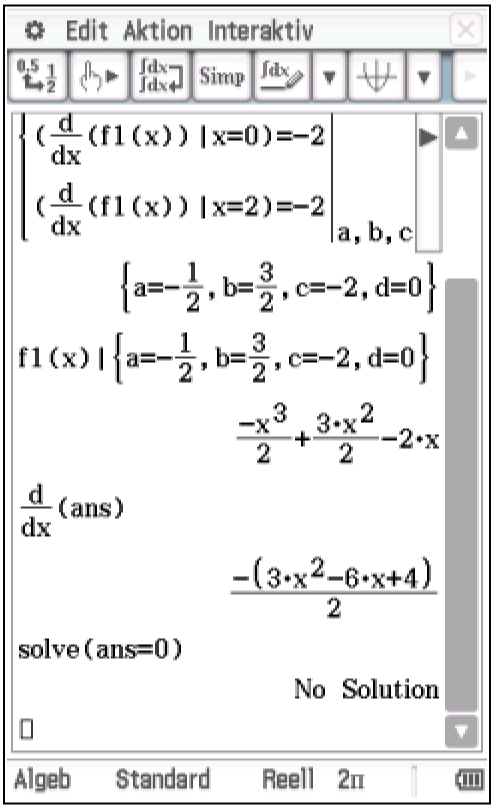


Die Abbildung zeigt die Graphen der zwei Straßenstücke, der zwei Teile der Bahnlinie (aus d)) und die Graphen von f_1 und f_2 (aus b) bzw. e)).

Aufgabe b)
Es gibt 4 Bedingungen, denn das gesuchte Straßenstück muss in B und Q anfangen bzw. enden und dort knickfrei sein, d.h. die erste Ableitung muss in B den Wert $g_1'(0) = -2$ und in P $p'(2) = -2$ haben. Darum handelt es sich um eine Funktion 3. Grades. Das entsprechende Gleichungssystem hat die Lösung: $f_1(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 - 2x$.



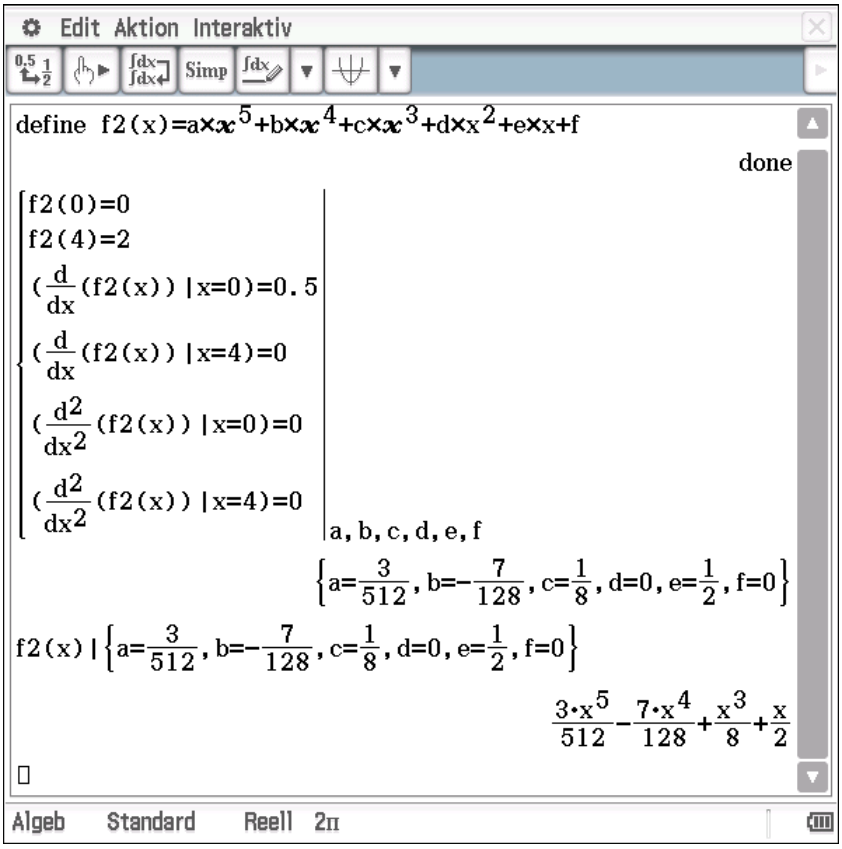
Aufgabe c)
Da die erste Ableitung der Funktion f_1 keine Nullstellen besitzt, hat diese Funktion auch keine Extremstellen.



Aufgabe d)
Siehe Aufgabe a)

Aufgabe e)
Hier gibt es 6 Bedingungen, nämlich die Anbindung an die Punkte B und Q, den glatten Übergang in beiden Punkten und den ruckfreien Übergang, d.h. es handelt sich um eine Funktion 5. Grades. Das entsprechende Gleichungssystem hat die Lösung:

$f_2(x) = \frac{3}{512}x^5 - \frac{7}{128}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x.$

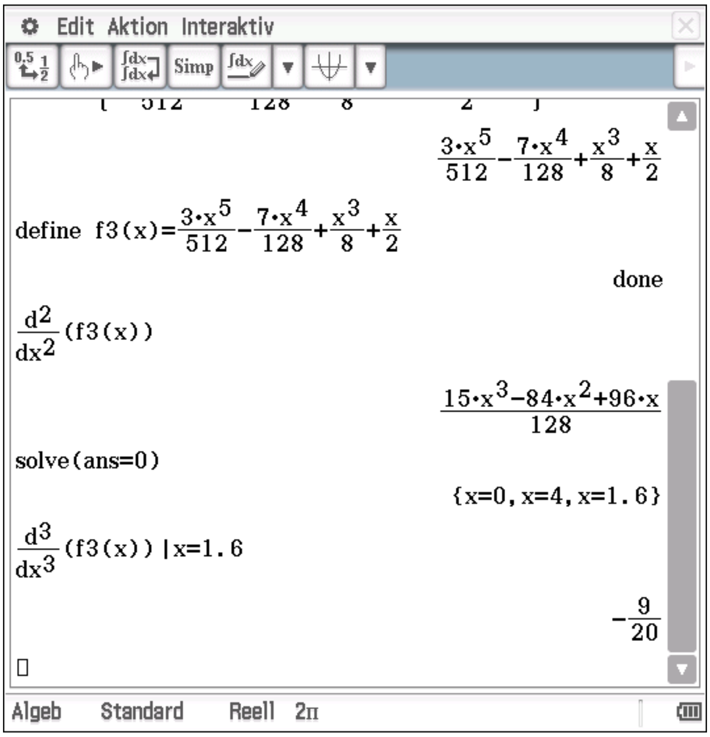


Aufgabe f)

Die notwendige Bedingung für Wendestellen: $f_2''(x) = 0$ liefert die Lösungen:

$x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $x_3 = 1{,}6$. Da gilt: $f_2'''(1{,}6) = -\frac{9}{20} \neq 0$, ist der gesuchte Wendepunkt bei

$W_3\left(-\frac{9}{20}\middle|\frac{3172}{3125}\right)$.



Grippe Epidemie

Antonius Warmeling

Die Niederlande wurden im letzten Jahr von einer Grippe-Epidemie getroffen. Das Ministerium für Volksgesundheit hat die Zahl der Erkrankten sehr genau festgehalten, um daraus Rückschlüsse für zukünftige Grippewellen ziehen zu können und damit der Ärzteschaft und den Krankenhäusern verlässliche Warnungen zukommen lassen zu können.

Es hat festgestellt, dass sich die Zahl der Grippekranken (in 1000) ganz gut durch die folgende Funktion beschreiben lässt: $f(t) = -0{,}003(60 - x)^3 + 0{,}18(60 - x)^2$. Dabei ist x die Anzahl der Tage, die seit dem Ausbruch der Epidemie vergangen sind.

a) Beschreiben Sie allgemein den Verlauf einer Epidemie. Skizzieren Sie dazu den Verlauf (Anzahl Erkrankten gegen die Zeit) qualitativ, d.h. ohne eine Rechnung zu machen.

b) Zeichnen Sie nun den Grafen der oben angegebenen Funktion in einem sinnvollen Intervall und übertragen Sie eine Skizze in Ihr Heft.

c) Erklären Sie, warum sich das Modell nur für maximal 60 Tage eignet und geben Sie an, was sonst noch am Modell zu kritisieren ist.

d) Ermitteln Sie die Antworten auf die folgenden Fragen. Geben Sie eine weitere Frage an und beantworten Sie diese.

   i) Wie viele Kranke waren es nach 7 Tagen?

   ii) Wann war die Zahl am größten? Wie groß war die Anzahl?

   iii) Wie viele Tage lag die Zahl der Erkrankten über 75000?

   iv) Wann war die tägliche Zunahme kleiner als 1000?

   v) Wann war die Abnahmerate am größten (d.h. am stärksten negativ)?

   vi) .....

e) Erklären Sie, wie die Modellfunktion konstruiert ist, damit die Zahl der Erkrankten zu Beginn und am Ende der Epidemie jeweils passend ist.

f) Das Nachbarland NRW hatte von der Untersuchung des Niederländischen Ministeriums für Volksgesundheit gehört und hat das Modell im letzten Frühjahr getestet. Bei der ersten Grippe-Epidemie zählt es nach dem ersten Tag rund 12000 Erkrankte, nach dem dritten Tag ca. 34000.

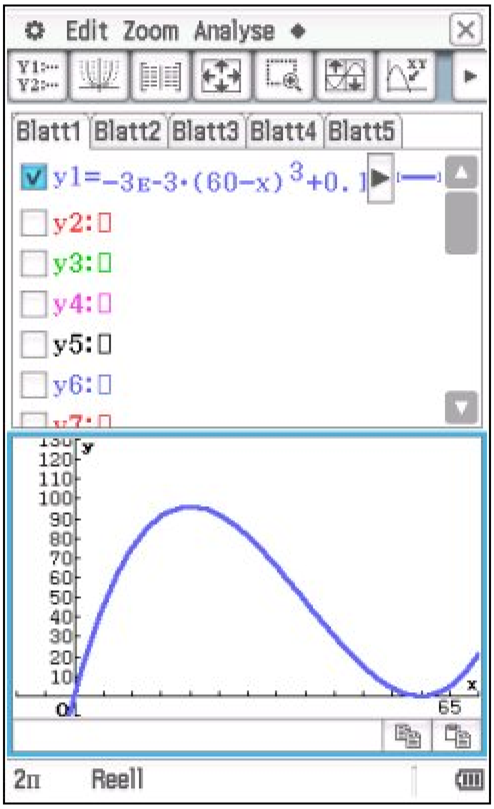
   Zeigen Sie mit Hilfe dieser Zahlen, dass sich das Modell nicht einfach auf NRW übertragen lässt.

g) Nehmen Sie an, dass sich die Dauer der Epidemie in NRW nicht von der den Niederlanden unterscheidet. Ermitteln Sie unter dieser Annahme ein passendes Modell für die weitere Entwicklung in NRW.

Lösungshinweise

Aufgabe a)
Die Zahl der Kranken steigt zunächst langsam, wird dann schneller größer und erreicht nach Abnahme der Wachstumsrate schließlich das Maximum. Danach wird die Zahl zunächst immer schneller abnehmen, bis die Abnahmeraten nach dem Wendepunkt wieder kleiner werden.

Aufgabe b)
Die Funktion kann z. B. im Menu Grafik und Tabelle bei y1 eingegeben und dargestellt werden. Für weitere Berechnungen steht der Funktionsterm über y1(x) zur Verfügung.



Aufgabe c)
Nach x = 60 steigt der Funktionswert wieder, das sollte nach dem Abklingen der Epidemie nicht passieren. Außerdem gibt es vor dem Hochpunkt keinen Wendepunkt. Den sollte eine Modellierungsfunktion für eine Grippewelle aber haben, da sie in der Regel zunächst mit wenigen Infizierten beginnt.

Aufgabe d)

i. Die Funktion ist als y1(x) gespeichert, also gibt y1(7)=58,989 die Zahl der infizierten nach 7 Tagen (in 1000) aus. Es gab also 59.000 Infizierte

```
y1(7)
                        58.989
```

ii. Ohne die Mittel der Differentialrechnung zu benutzen kann man z.B. mit dem Befehl „fmax" das absolute Maximum in einem bestimmten Zeitraum bestimmen. fmax(y1(x),x,0,60). Nach 20 Tagen lag die Zahl der Infizierten demnach bei 96.000.

```
fMax(y1(x),x,0,60)
            {MaxValue=96,x=20}
```

iii. Es muss die Ungleichung $y1(x) \geq 75$ gelöst werden. Mit dem „with-operator" kann man die Grenzen des Definitionsbereiches setzen.

```
solve(y1(x)≥75,x)|0≤x|x≤60
            {10≤x≤32.08712153}
```

Zwischen dem 10. Und dem 32. Tag lag die Zahl der Infizierten mindestens bei 75.000.

iv. Die Infiziertenrate wird mathematisch durch die erste Ableitungsfunktion bestimmt. In Kombination mit „solve" kann direkt der Zeitpunkt ausgerechnet werden, wann die Rate kleiner 1 (also 1000 Infizierte pro Tag) war:

$$\mathrm{solve}\left(\frac{d}{dx}(y1(x))<1\right)$$
$$\{17.39<x<62.61\}$$

Da die Infiziertenrate nach dem Maximum negativ wird, muss nur der Zeitraum bis zum Maximum betrachtet werden. Die Zunahme der Infizierten geschieht bis zum 20. Tag, daher liegt die Zunahme von Mitte des 17. Bis zum 20. Tag unter 1000.

v. An der Wendestelle liegt die größte bzw. kleinste Steigung vor. Daher muss also der Wendepunkt bestimmt werden. Die Wendestelle liegt bei 40, dort ist die Abnahme am stärksten. Danach klingt die Epidemie aus.

$$\mathrm{define}\ f2(x)=\frac{d^2}{dx^2}(y1(x))$$
$$\mathrm{done}$$
$$f2(x)$$
$$0.018\cdot x-0.72$$
$$\mathrm{solve}(f2(x)=0,x)$$
$$\{x=40\}$$
$$\mathrm{define}\ f3(x)=\frac{d^3}{dx^3}(y1(x))$$
$$\mathrm{done}$$
$$f3(x)|\{x=40\}$$
$$0.018$$

Aufgabe e)
Am Originalterm sieht man leicht, dass die Funktion den Wert 0 für x=60 annimmt. Für x=0 muss man entweder erkennen, dass $-0{,}003 * 60^3 + 0{,}18 * 60^2 = 0$ ist, oder man formt den Term um.

```
simplify(y1(x)|x=60
                                   0
expand(y1(x)
    0.003·x^3-0.36·x^2+10.8·x
```

Aufgabe f)

```
y1(1)
                              10.443
y1(3)
                              29.241
```

Die ermittelten Zahlen passen nicht zur bekannten Funktion.

Aufgabe g)
Man defniert zunächst eine allgemeine Funktion $g(x) = a * (60 - x)^3 + b * (60 - x)^2$ und generiert dann ein lineares Gleichungssystem, dass nach a und b aufgelöst wird. Wir erhalten $a = -0{,}0035, b = 0{,}2105$.

Diese Funktion erfüllt aber nicht mehr die Bedingung, dass sie bei 0 und 60 gleich Null sein soll. Es ist $g(0) = -0{,}221$.

Will man das verhindern, muss man von Anfang an die Beziehung zwischen a und b berücksichtigen: $-a * 60 = b$. Dann braucht man allerdings auch nur eine Bedingung.

```
define g(x)=a×(60-x)^3+b×(60-x)^2
                                                          done
{g(1)=12
{g(3)=34 |a,b
                        {a=-0.00350873656,b=0.2104627424}
define h(x)=g(x)|{a=-3.508736562E-3,b=0.2104627424}
                                                          done
h(x)
          0.00350873656·(x-60)^3+0.2104627424·(x-60)^2
h(0)
                                                  -0.221224752
```

Neuplanung in Berlin-Mitte

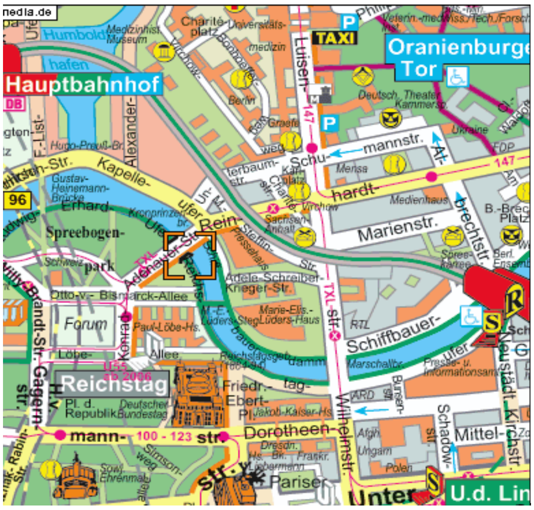
Christel Weber / Michael Mausbach

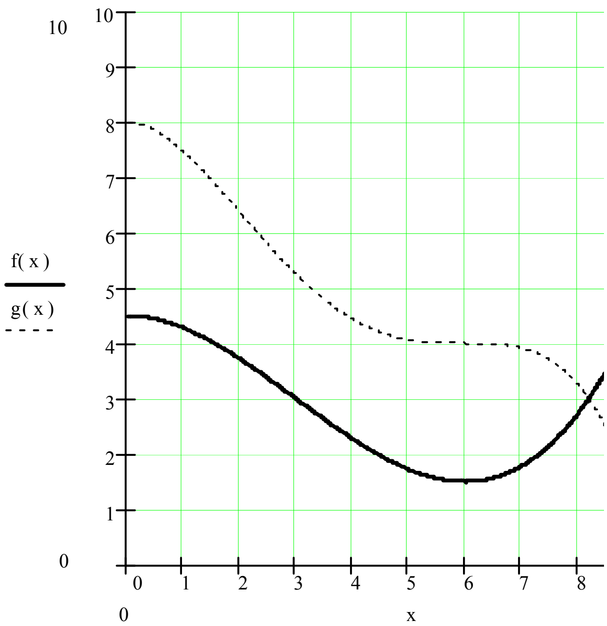
Auf dem abgebildeten Stadtplanausschnitt von Berlin ist die Spree und nördlich davon die S-Bahnlinie in der Nähe des Reichstages zu sehen.

Eingefügt in ein Koordinatensystem und etwas vereinfacht erscheint ein Teil der Karte annähernd wie im abgebildeten Koordinatensystem. Der unten skizzierte Stadtausschnitt soll nun völlig neu geplant werden, da eine Hängebahn die alte S-Bahnlinie ersetzen soll.

Der Flussverlauf kann mit einer Funktion 3. Grades angegeben werden:

$f(x) = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 4{,}5$ (1LE = 100m)





a) Modellieren Sie die Bahnlinie (gepunktet) durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades g(x). Diese ist durch die besonderen Eigenschaften der Punkte H(0/8) und S(6/4) eindeutig bestimmt. Nennen Sie diese Eigenschaften und bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g(x).

Die Bahnlinie g(x) soll zwischen der Haltestelle H und der Brücke B, wo sie den Fluss überquert, durch eine geradlinige Hängebahn ersetzt werden.

b) Zeichnen Sie die Strecke $\overline{HB}$ und verlängern diese zu einer Geraden s! Bestimmen Sie den Punkt B und die Geradengleichung für s!
c) Ermitteln Sie die Länge der neuen Bahnstrecke $\overline{HB}$ und vergleichen Sie diese mit der alten Streckenlänge!
d) Ermitteln Sie die Punkte, an denen die neue Bahnlinie s(x) die alte Bahnlinie g(x) überquert! Zeichnen Sie die Punkte ein!

Das Land nördlich der alten Bahnlinie g(x) ist in Privatbesitz, d.h. auch das Flächenstück A, das im Süden von g(x) und im Norden von s(x) begrenzt wird.

e) Zeichnen Sie das Flächenstück in das Koordinatensystem ein! Ermitteln Sie, wie viel Quadratmeter die Bahngesellschaft wahrscheinlich hinzu kaufen muss!

Südlich des Flusses (hier f(x)) treffen sich zwei geradlinige Straßen a (im Plan Adenauerstraße) und k (im Plan Konradstraße) im Punkt M. Die Straße a stößt rechtwinklig im Punkt W(3/3) von f(x) auf das Flussufer, die Straße k trifft senkrecht auf die südliche Querstraße (=x-Achse). Der Kreuzungspunkt M hat zur Querstraße (x-Achse) einen doppelt so großen Abstand wie zum Flussufer.

f) Skizzieren Sie die Situation in das Koordinatensystem! Zeigen Sie die Existenz des Punktes M und leiten Sie die Koordinaten des Punktes M her!

Lösungshinweise

Aufgabe a)

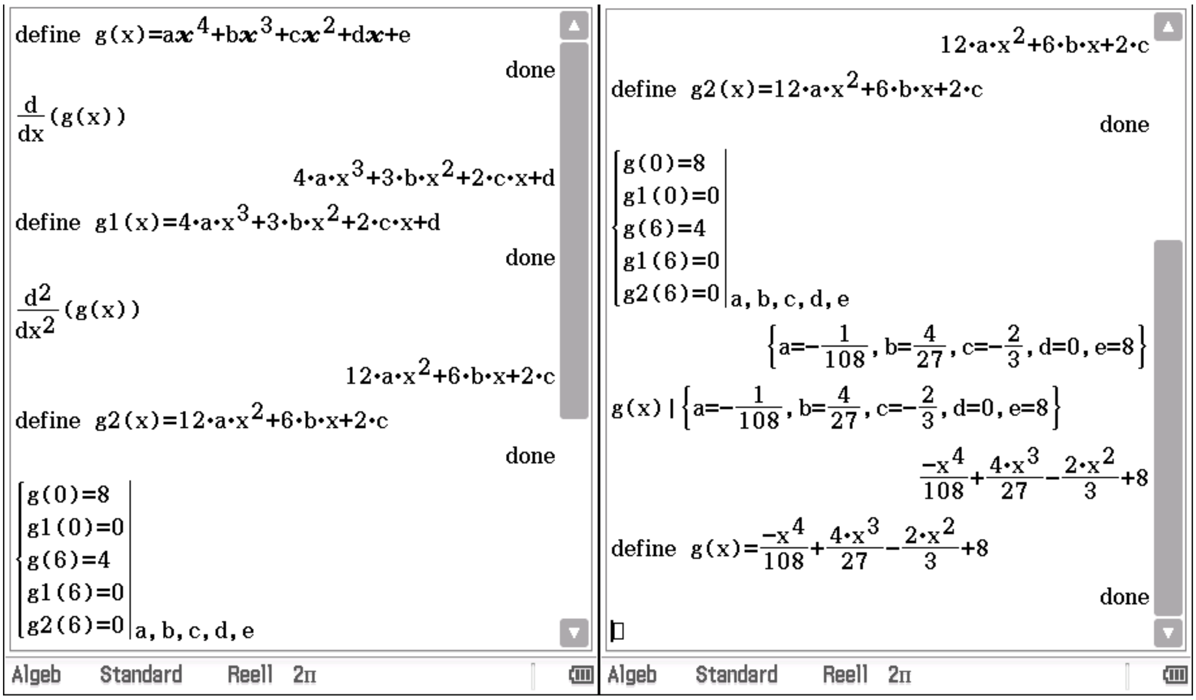
Es handelt sich um eine Funktion 4. Grades: $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit einem Hochpunkt $H(0|8)$ und einem Sattelpunkt $S(6|4)$.

Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen: $g(0) = 8\ und\ g'(0) = 0$ sowie $g(6) = 4, g'(6) = 0\ und\ g''(6) = 0$.

Die Lösung des entsprechenden Gleichungssystems ergibt die folgenden Werte:

$a = -\frac{1}{108}, b = \frac{4}{27}, c = -\frac{2}{3}, d = 0, e = 8$ und damit die Funktionsgleichung:

$g(x) = -\frac{1}{108}x^4 + \frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 8.$



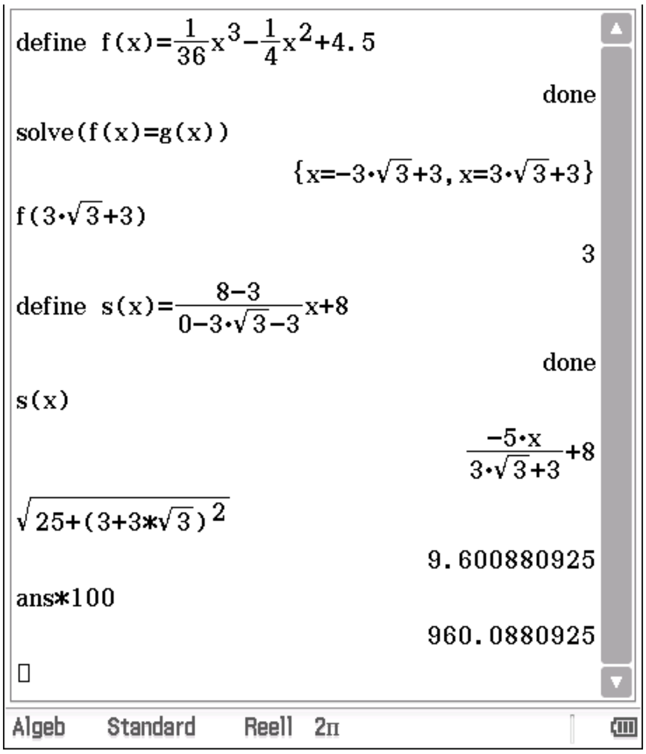
Aufgabe b)

Der Punkt B wird durch Gleichsetzen der Funktionen f(x) und g(x) und Lösen der sich ergebenden Gleichung bestimmt.

Als Lösung erhalten wir nur den Punkt $B(3+3\sqrt{3}|3)$, da $x_2 = 3 - 3\sqrt{3} < 0$ nicht im Definitionsbereich liegt.

Die Geradengleichung folgt nach den Bestimmungen der Steigung m mittels der beiden Punkte H und B sowie dem y-Achsenabschnitt aus Punkt H als:

$s(x) = \frac{-5}{3+3\sqrt{3}}x + 8.$



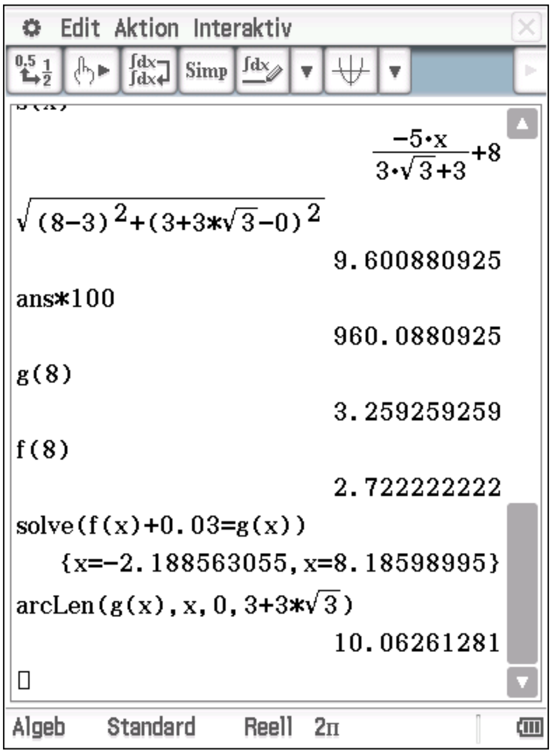
Aufgabe c)

Die Länge der Strecke $\overline{HB}$ wird mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet:

$\Delta y = 8 - 3 = 5$ und $\Delta x = 3 + 3\sqrt{3} - 0$. Damit folgt: $\sqrt{5^2 + (\sqrt{3+3\sqrt{3}})^2} \sim 9{,}601\ LE$.

Da 1LE=100m ist, folgt die Länge der Strecke $\overline{HB} \sim 100m * 9{,}601 = 960{,}1m$.

Alte Streckenlänge-Länge des Bogens über g(x) im Intervall $\langle 0|3+3\sqrt{3}\rangle \sim 10{,}0626 \sim 1006{,}2m$. Die alte Strecke ist also 46,1 m länger als die neue.



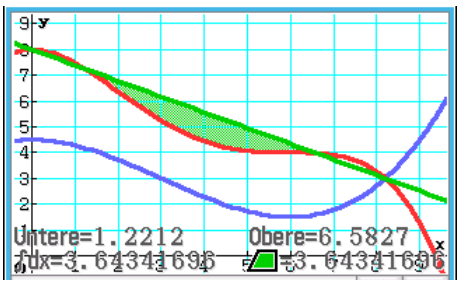
Aufgabe d)
Gleichsetzen der Funktionn g(x) und s(x) liefert die x-Werte der Schnittpunkte

```
solve(g(x)=s(x))
    {x=0, x=1.221152728, x=6.582694849, x=8.196152423}
```

Davon sind nur x_2 und x_3 im gesuchten Bereich, die beiden anderen sind x-Werte der Begrenzungspunkte H und B. Es ergeben sich die Schnittpunkte: $S_1(1{,}221|7{,}255), S_2(6{,}583|3{,}984)$.

Aufgabe e)
Die gesuchte Fläche ergibt sich aus dem Integral:

$$\int_{x_2}^{x_3}\big(s(x)-g(x)\big)dx = 3{,}6434\ FE.$$



$$\int_{1.221152728}^{6.582694849} s(x)-g(x)dx$$

3.643416959

ans*100*100

36434.16959

Eine Flächeneinheit entspricht 100*100 m², d.h. ca. 36434 m² müssen hinzu gekauft werden.

Aufgabe f)

$\frac{x^2-6*x}{12} | x=3$

$-\frac{3}{4}$

define $t(x)=\frac{4}{3}(x-3)+3$

done

solve((4*((3−t(x))^2+(3−x)^2)=(t(x))^2

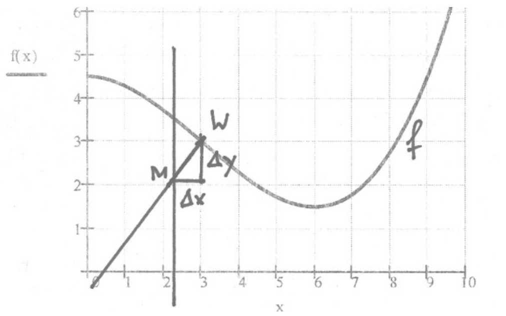
$\left\{x=\frac{9}{2}, x=\frac{33}{14}\right\}$

$t(\frac{9}{2})$

5

$t(\frac{33}{14})$

$\frac{15}{7}$



$W(3|3)$.

Die Steigung beträgt $f'(3) = -0{,}75$. Die Gerade senkrecht zu f(x) in W hat die Gleichung:

$t(x) = \frac{4}{3}(x-3) + 3 = \frac{4}{3}x - 1$. M liegt auf der Geraden t.

$\rightarrow M\big(x\big|t(x)\big); d = \overline{MW}$

$\Delta y = 3 - \big(t(x)\big) = 4 - \frac{4}{3}x;\ \Delta x = 3 - x$

$d = \sqrt{(3-t(x))^2 + (3-x)^2}\ und\ y = t(x) = \frac{4}{3}x - 1 = 2d$

$\leftrightarrow 2 * \sqrt{\big(3-t(x)\big)^2 + (3-x)^2} = t(x)$

$\leftrightarrow 4 * ((3-t(x))^2 + (3-x)^2) = (t(x))^2$ - Die Lösungen sind $x_1 = 4{,}5;\ x_2 = \frac{33}{14} \sim 2{,}357$

Da t(4,5)=5 ist, liegt der Punkt (4,5 / 5) nicht südlich von f(x) und der gesuchte Punkt ist $M\left(\frac{33}{14}\middle|\frac{15}{7}\right)$.

Eiförmige Abwasserrohre

Udo Mühlenfeld

Zum Bau von Abwasserkanälen verwendet man auch Rohre mit einem so genannten Eiprofil.

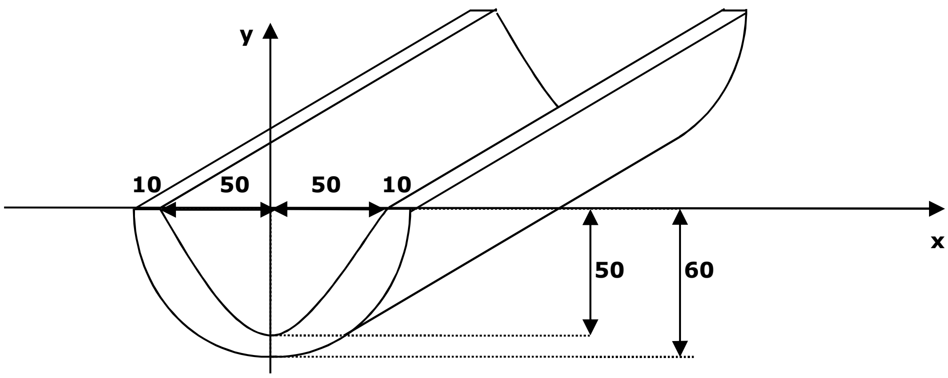
a) Erklären Sie, welchen Vorteil – insbesondere bei geringen Wassermengen – diese Rohre gegenüber Rohren mit kreisförmigem Querschnitt haben.

b) Der innere Querschnitt kann modellhaft durch eine Parabel mit aufgesetztem Halbkreis beschrieben werden. Dabei ist die Höhe 1,5mal so groß wie die größte Breite, die genau 100 cm beträgt. Bestimmen Sie rechnerisch das Fassungsvermögen eines Fertigelements, das genau 2 m lang ist.

c) Das Fertigelement aus Teil b) soll innen mit Kunststoff beschichtet werden. Ermitteln Sie rechnerisch den Inhalt der zu beschichtenden Fläche. Dabei gilt für die Länge L eines Graphen über dem Intervall [a;b] die Formel: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

d) Berechnen Sie die Maße eines 2 m langen Rohres mit kreisförmigem Querschnitt bei gleichem Fassungsvermögen und beurteilen Sie das Ergebnis.

e) Bei einem anderen Rohr besteht der untere Teil aus einem Fertigelement, das außen durch einen Halbkreis, innen durch einen parabelförmigen Bogen sowie zwei Verbindungsstrecken begrenzt wird (s. Abbildung)



Um das Rohr zu verankern, soll es senkrecht zum Halbkreis der Querschnittsfläche an einer Stelle durchbohrt werden, wo die Wandstärke am größten ist.

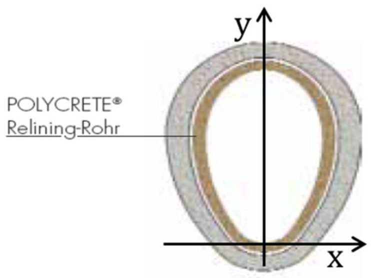
Zeigen Sie, dass sich die Wandstärke d durch den Term $d = 60 - \sqrt{0{,}0004x^4 - x^2 + 2500}$ beschreiben lässt und ermitteln Sie die maximale Wandstärke.

Lösungshinweise

Aufgabe a)

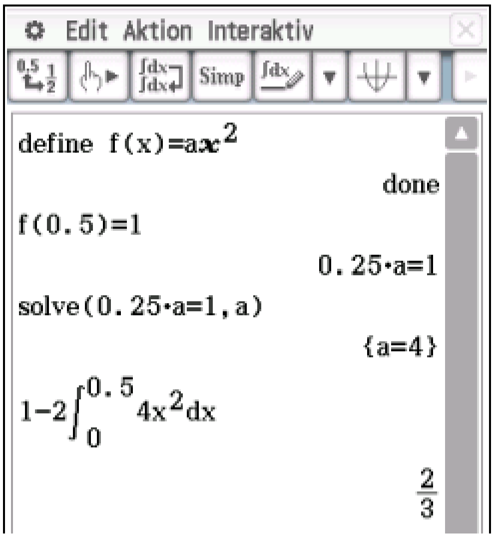
Bei geringen Wassermengen steht das Wasser im Rohr höher und kann leichter abfließen. Beim kreisförmigen Querschnitt ist das Rohr unten breiter, so dass es leichter zu Ablagerungen kommt.

Aufgabe b)



.

Kreisradius $r = 0{,}5m$. Halbkreis $A = \frac{1}{2}\pi r^2 = 0{,}39m^2$. Wahl eines günstigen Koordinatensystems:
$f(x) = a * x^2$. $f(0{,}5) = 1$. (Angaben in m)

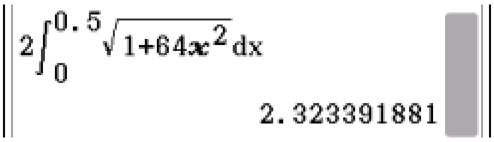


Querschnittsfläche insgesamt: $A_{ges} = 1{,}06m^2$. $V = A * I = 1{,}06m^2 * 2m = 2{,}12m^3$.

Aufgabe c)

Oberer Teil des Rohres: Umfang: $U = \pi * r = 1{,}57m$. Die zu beschichtende Fläche beträgt: $A_1 = 1{,}57m * 2m = 3{,}14m^2$.

Unterer Teil des Rohres: Umfang = 2,32m

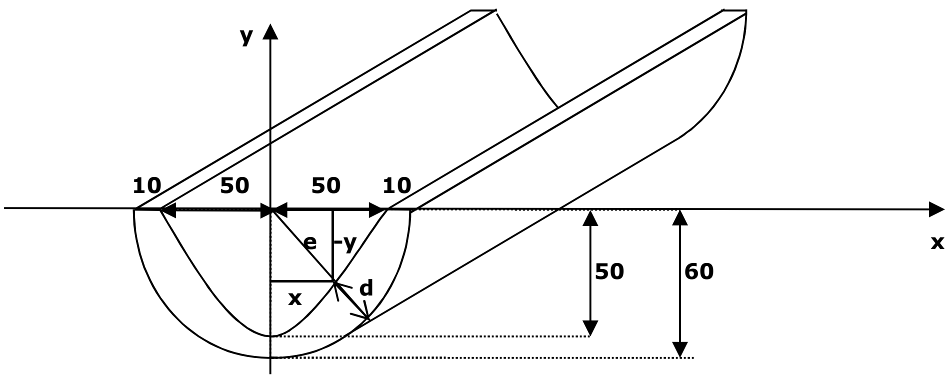


Zu beschichtende Fläche $A_1 = 2{,}32m * 2m = 4{,}64m^2$. Die insgesamt zu beschichtende Fläche beträgt 7,78m².

Aufgabe d)

$V = \pi * r^2 * h \rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi * h}} = \sqrt{\frac{2{,}12m^3}{\pi * 2m}} = 0{,}58m$. Die Röhre ist wesentlich niedriger, also z.B. schlecht begehbar, von der Breite her aber mit der eiförmigen Röhre nahezu vergleichbar, was die Ausmaße betrifft.

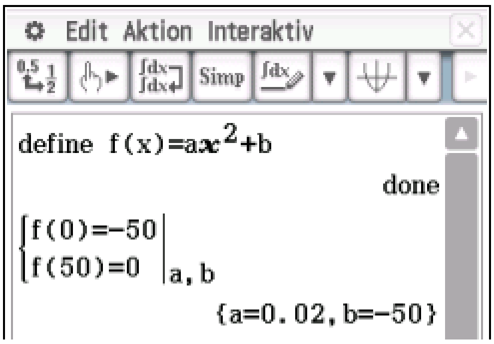
Aufgabe e)



$d = 60 - e \; und \; e = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$

Im vorgegebenen Koordinatensystem gilt:

$f(x) = ax^2 + b$



$\rightarrow d(x) = 60 - \sqrt{x^2 + (0{,}02x^2 - 50)^2} = 60 - \sqrt{0{,}0004x^4 - x^2 + 2500}$

define $d(x)=60-\sqrt{0.0004x^4-x^2+2500}$

done

solve$\left(\frac{d}{dx}(d(x))\right)$

{x=0, x=−35.35533906, x=35.35533906}

$\frac{d}{dx}(d(x))|x=35$

0.01616472992

$\frac{d}{dx}(d(x))|x=36$

−0.03058804232

d(35.4)

16.69868369

Mit Blick auf die Zeichnung kommt für x der Wert 35,4 in Frage, x = -35,4 kann aus Symmetriegründen vernachlässigt werden, bei x = 0 beträgt ebenso wie am Rand bei x=50 die Wandstärke 10 cm. Es liegt ein relatives und mit Blick auf den Definitionsbereich auch ein absolutes Maximum vor. Die Wandstärke beträgt dort 16,70 cm.

Skischanze

Udo Mühlenfeld

Die Abbildung zeigt einen Träger einer alten Skischanze in Altenau im Harz.

a) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen ungefähren Wert für die lichte Höhe des Trägers.
b) Der bogenförmige Teil des Trägers kann näherungsweise als Teil einer Parabel oder Teil eines Kreises aufgefasst werden. Ermitteln Sie jeweils eine geeignete Funktionsgleichung.
c) Beurteilen Sie, welche Modellierung angemessener ist.
d) Bestimmen Sie rechnerisch das Gewicht des sichtbaren Teils eines Trägers, wobei davon auszugehen ist, dass der bogenförmige Teil des Trägers als Teil eines Kreises aufgefasst wird und der ganze Träger eine quadratische Querschnittsfläche mit 50 cm Kantenlänge besitzt. Die Dichte von Beton beträgt 2,4 t / m^3.

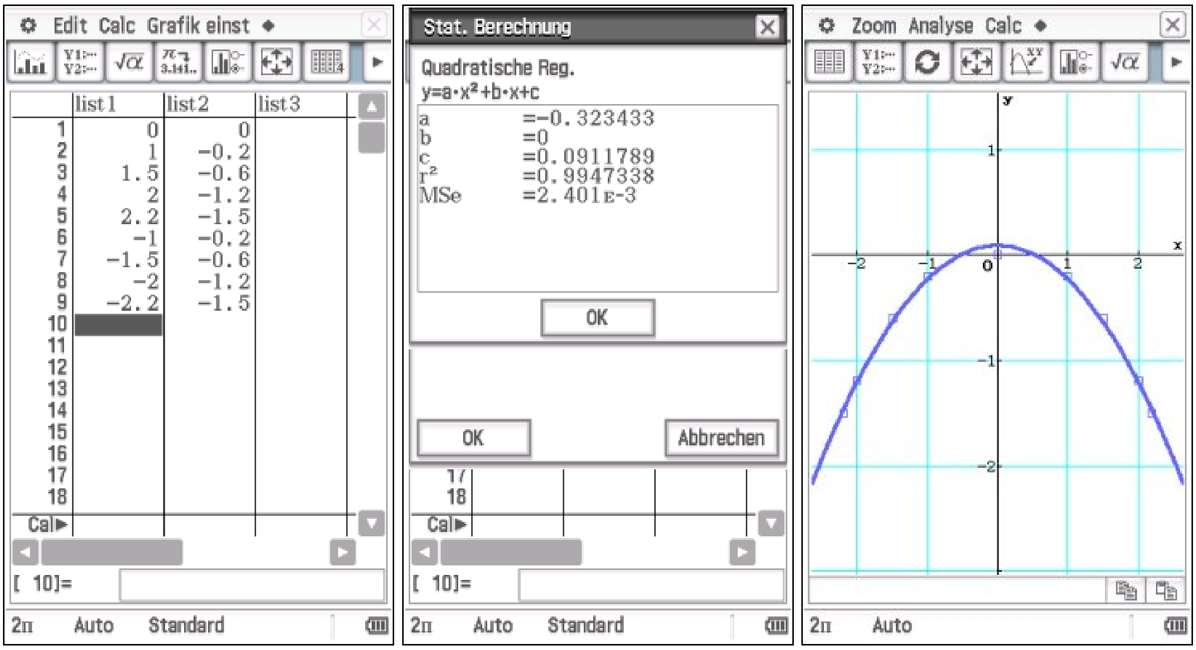
Lösungshinweise

Aufgabe a)
Die Lichte Höhe in der Abbildung gemessen beträgt 4,5 cm (nach rechts abfallender Weg unter dem Träger). Für den Maßstab nehmen wir die Körpergröße der Frau mit 1,60 m an. Also entsprechen 1,3 cm auf dem Foto1,60 m in der Realität. Damit beträgt die lichte Höhe real 5,50 m.

Aufgabe b)

Parabel für $-2{,}2 \leq x \leq 2{,}2$: Ursprung des Koordinatensystems im Scheitelpunkt des Trägers; Betrachtung der Trägerunterkante, Messwerte aus der Abbildung:

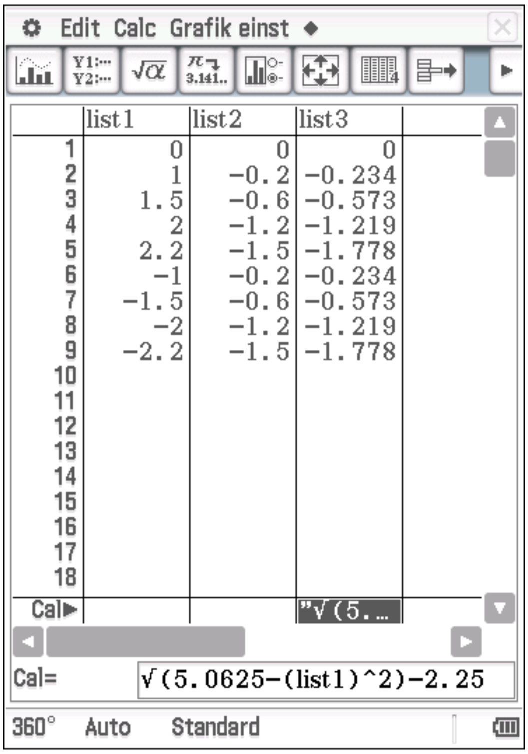
x	0	+/- 1	+/- 1,5	+/- 2	+/- 2,5
y	0	-0,2	-0,6	-1,2	-1,5

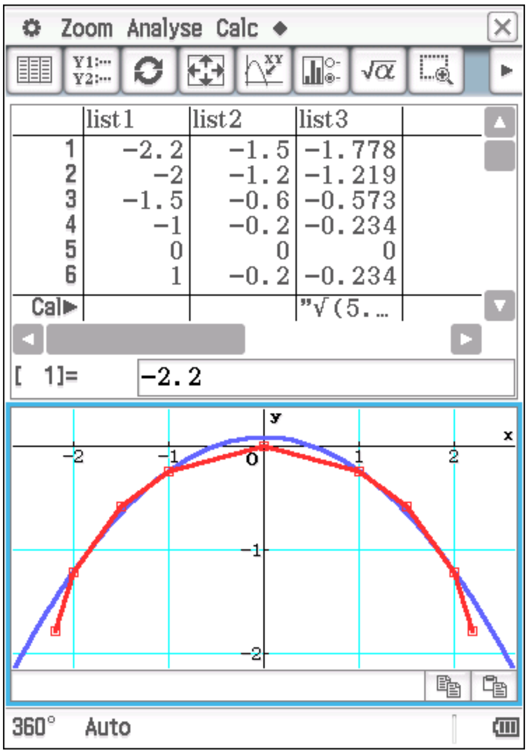


Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -0{,}32x^2 + 0{,}09$.

Kreisbogen für $-2{,}2 \leq x \leq 2{,}2$: Daten wie oben. $x^2 + (y + r)^2 = r^2$ mit $r = 2{,}25$ (aus der Abbildung).

y=gemessene Werte; k=Werte, die sich aus der Kreisgleichung ergeben.





Aufgabe c)

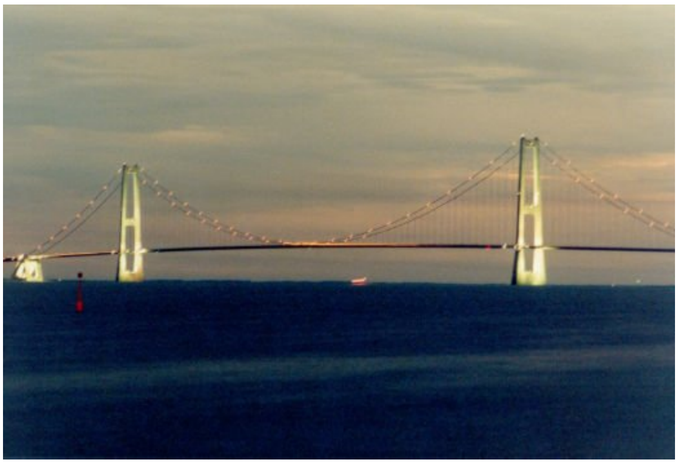
Der Kreis beschreibt mit Ausnahme des letzten Punktes (2,2/-1,5) den Bogen angemessen, der Scheitelpunkt der Parabel liegt dagegen höher als der Scheitelpunkt des Trägers auf dem Foto.

Aufgabe d)

Berechnung der Kreisbogenlänge: $b = \frac{2\pi r * 2\alpha}{360°}$ mit $r = 2{,}25\ cm$ und $\alpha = 71°$, da $\tan(\alpha) = \frac{2{,}2cm}{2{,}25cm-1{,}5cm}$ folgt für $b = 5{,}6cm$. Schenkellänge auf dem Foto ausgemessen: $3{,}8cm + 2{,}8cm = 6{,}6cm$. Gesamtlänge des Trägers: 12,2cm. Mit Maßstab umgerechnet (s.o.) 15m real. Querschnittsfläche: 2500cm², Volumen: 3,75m³, Gewicht: 9t.

Die Brücke über den Großen Belt

Udo Mühlenfeld

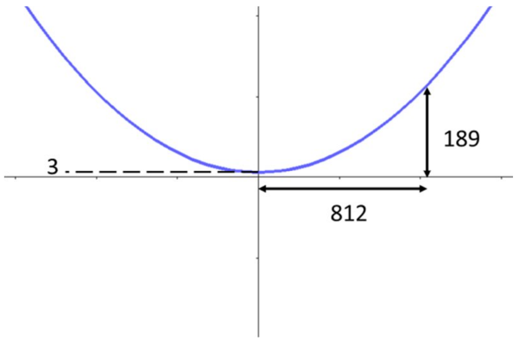


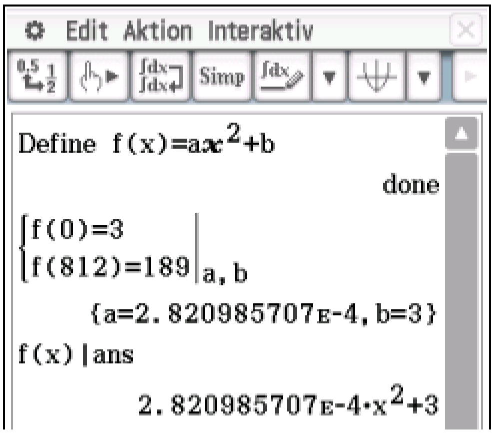
Mitte 1998 wurde in Dänemark eine Verbindung über den Großen Belt eingeweiht. Hauptbestandteil ist die Ostbrücke – eine 6790 Meter lange Hängebrücke – mit einer Spannweite zwischen zwei Pfeilern von 1624 m. Die Durchfahrtshöhe für den Schiffverkehr beträgt 65m, die Spitzen der Pfeiler bilden mit 254 m Höhe über dem Meeresspiegel die größte Erhebung Dänemarks. Der tiefste Punkt des Kabels zwischen den beiden Pfeilerspitzen liegt ca. 3m über der Fahrbahn, deren Dicke vernachlässigt werden soll.

a) Beschreiben Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Lage des Kabels zwischen den beiden Pfeilern durch eine Parabel.
b) Das Kabel lässt sich annähernd auch durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = a * (e^{b*x} + e^{-b*x}); a, b > 0$ beschreiben. Bestimmen Sie rechnerisch a und b. (Zur Kontrolle: a = 1,5; b = 0,00596)
c) Stellen Sie mit Hilfe des ClassPad beide Graphen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar, skizzieren Sie den Verlauf in Ihren Klausurunterlagen und vergleichen Sie beide Modellierungen.
d) Berechnen Sie in beiden Modellen die Steigung des Kabels an den Pfeilerspitzen und vergleichen Sie mit dem Verlauf des Kabels auf dem Foto.
e) Die senkrechten Tragseile haben einen Abstand von 27 m. Berechnen Sie in beiden Modellen die Länge des markierten Tragseiles und ermitteln Sie zum Vergleich die ungefähre Länge des Seiles auf dem Foto bei Aufgabenteil d).
f) Ermitteln Sie rechnerisch, an welcher Stelle sich bei der Berechnung der Längen der senkrechten Tragseile sich die größten Unterschiede bei beiden Modellen ergeben.

Lösungshinweise

Aufgabe a)

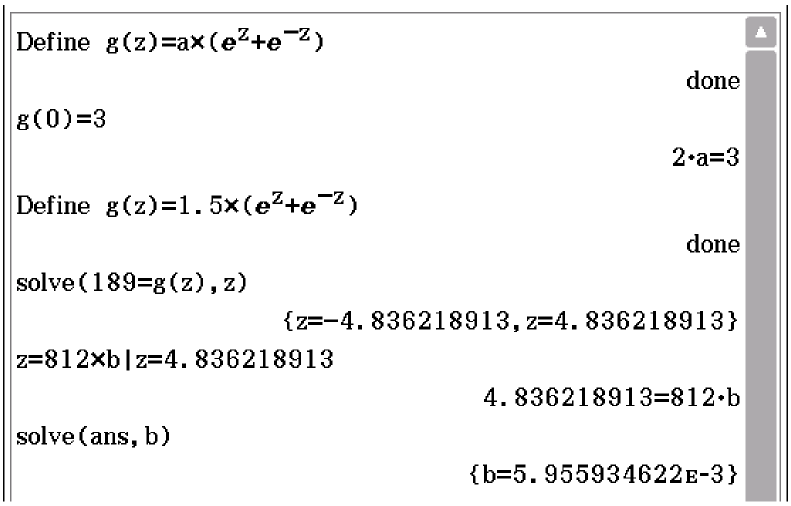




$f(x) = 0{,}00028 * x^2 + 3$

Aufgabe b)

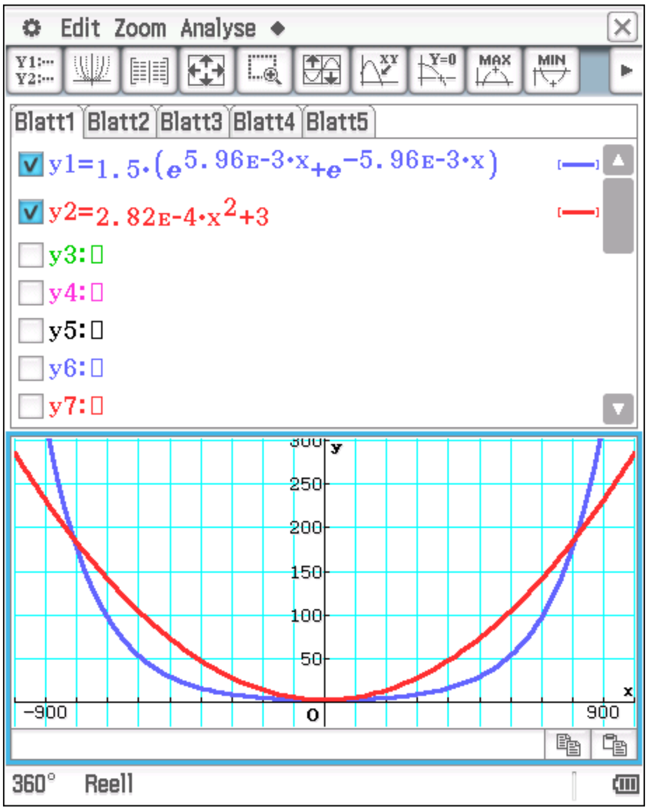
Bei der Berechnung ist eine Substitution erforderlich: z=bx, da sonst eine Berechnung der Parameter a und b nicht möglich ist. Alternativ kann die Gleichung numerisch gelöst werden. Die Lösung lautet:



$g(x) = 1{,}5(e^{0{,}00596x} + e^{-0{,}00596x})$

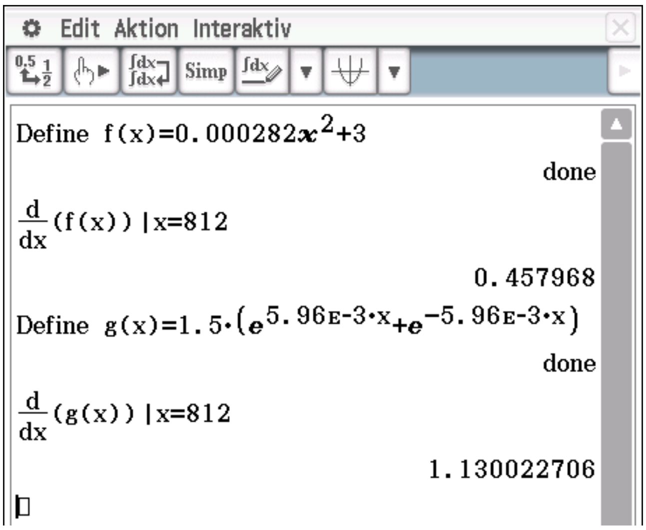
Aufgabe c)

Bei der Modellierung mit Hilfe der e-Funktion hängen die Kabel weiter durch, d.h. der Graph verläuft unterhalb der Parabel. An den Pfeilern verlaufen die Kabel steiler, wenn der Graph der e-Funktion zur Modellierung verwendet wird.



Aufgabe d)

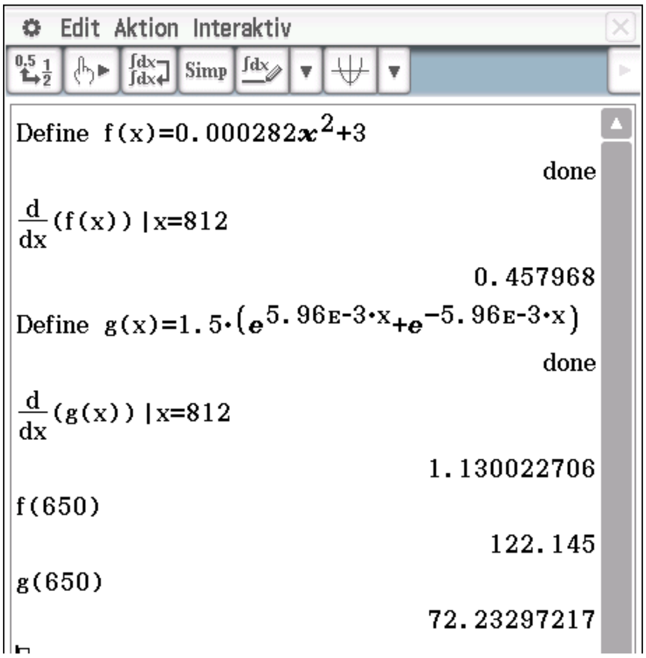
Berechnung und Vergleich der Steigungen für x = 812. Auf dem Foto: Die Tangente bildet mit der Horizontalen einen Winkel von ca. 40°. tan 40° = 0,84, ein Wert, der zwischen beiden berechneten liegt.



Aufgabe e)

1624m : 27m = 60 (Anzahl der Seile zwischen den Pfeilern) Abzählen auf dem Foto ergibt, dass das markierte Seil das 6. Seil rechts vom Pfeiler ist, also horizontal vom Pfeiler etwa 162 m, von der Mitte zwischen den beiden Pfeilern also 650 m entfernt ist. f(650) = 122 g(650) = 72 Auf dem Foto: 4,4 cm entsprechen 189 m, Seillänge 2,8 cm entsprechen also 120 m Die im Teil (c) beschriebenen Unterschiede werden durch die Zahlenwerte bestätigt.

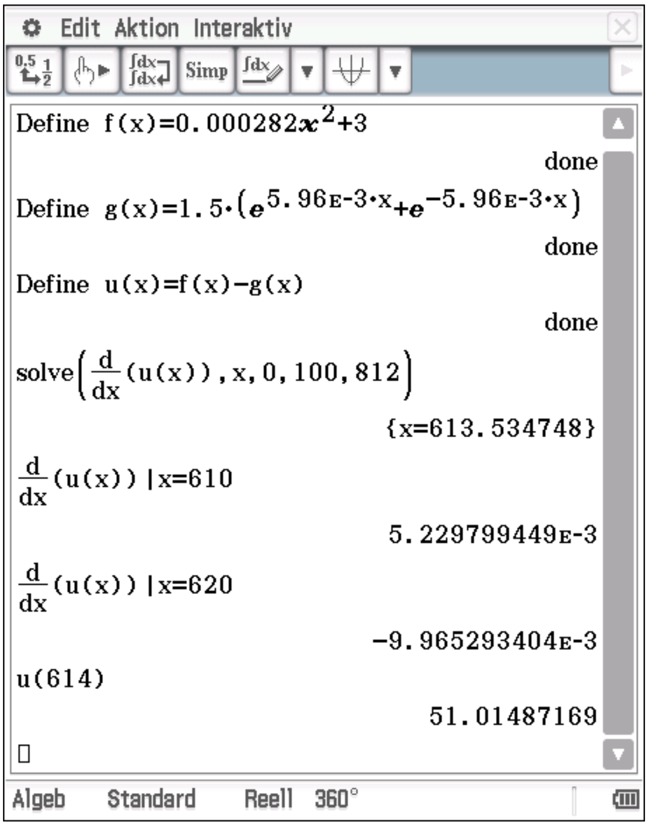
Da die Aufnahme perspektivisch verzerrt ist, liefert die Berechnung mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem eine Kathete die gesuchte Strecke und die andere 162 m lang ist, stark abweichende Ergebnisse.



Aufgabe f)

Die numerische Lösung ergibt einen Unterschied von 51m an der Stelle x = 614. Das Vorzeichenwechselkriterium wird zur Bestimmung der Art der Extremstelle verwendet:

$U'(610) = 0.0052$ und $U'(620) = -0.01$. Also handelt es sich um ein relatives Maximum an der Stelle x = 614. Bei der numerischen Lösung muss das Intervall entsprechend gewählt werden, da sonst die Lösung x=0 angegeben wird. Alternativ kann zunächst erst auch nach einer graphischen Lösung gesucht werden.



Forellenzucht

Antonius Warmeling

In einer Forellenzuchtanstalt im Sauerland wurde bei gleichaltrigen Forellen die durchschnittliche Länge ermittelt. Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt aus den gewonnenen Daten: