Teil 2 Aufgaben

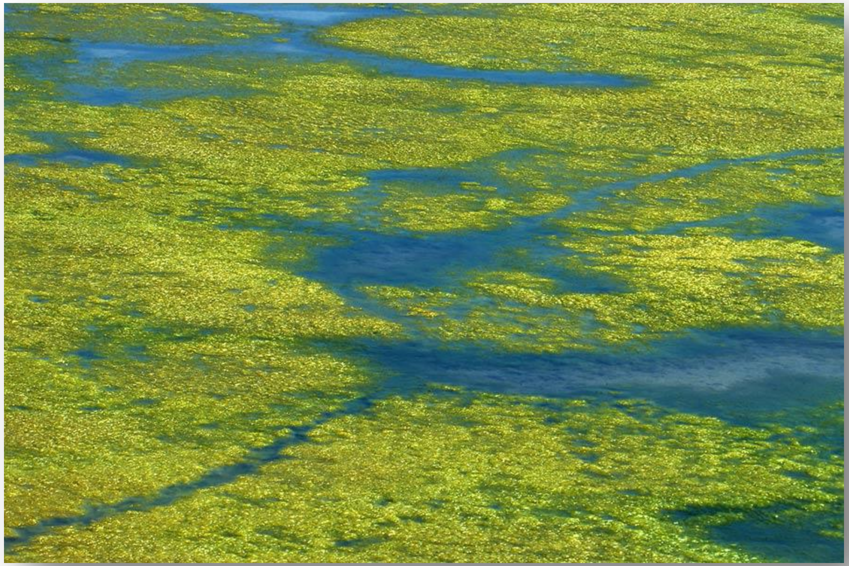
der schriftlichen Reifeprüfung Mai 2019

mit dem Casio ClassPad II

Mag. Roland Prinz – September 2019

Inhalt

Aufgabe 26 - Algenteppich



Aufgabe 26 (Teil 2)

Algenteppich

Auf der Oberfläche eines 800 m^2 großen Teichs befindet sich ein Algenteppich, der immer weiter wächst. Fünf Wochen lang werden jeweils am Ende der Woche die Flächeninhalte des Algenteppichs gemessen. Die Messwerte sind in der nachstehenden Tabelle aufgelistet. Zu Beginn der Beobachtung bedeckt der Algenteppich 4 m^2.

t (in Wochen)	0	1	2	3	4	5
$A(t)$ (Flächeninhalt des Algenteppichs nach t Wochen in m^2)	4	7	12,25	21,44	37,52	65,65

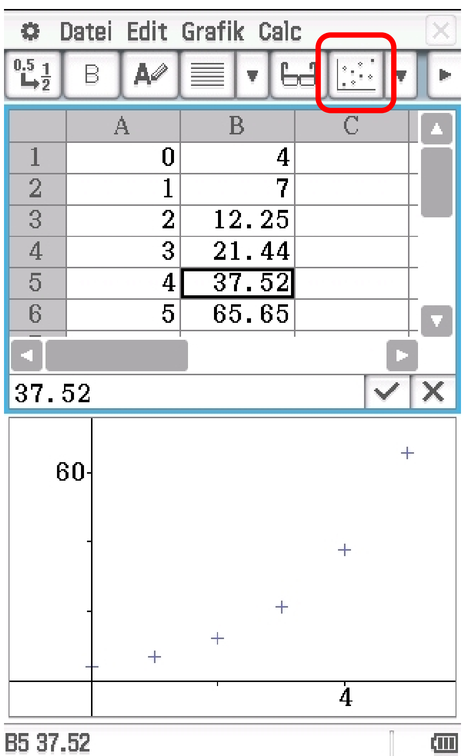
Das Algenwachstum kann mathematisch unterschiedlich modelliert werden.

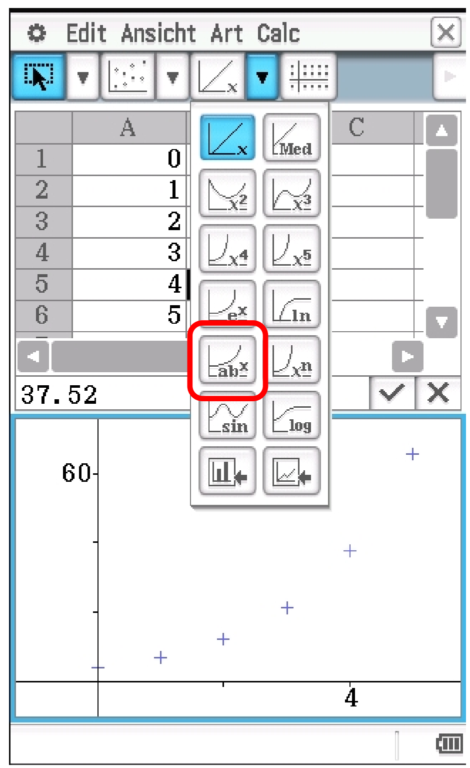
Aufgabenstellung:

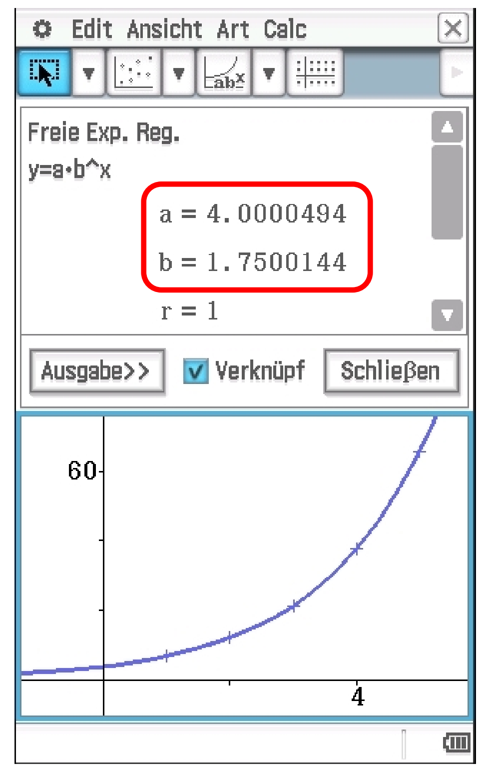
a) In den ersten fünf Wochen kann der Flächeninhalt $A(t)$ des Algenteppichs näherungsweise durch eine Exponentialfunktion A beschrieben werden, weil der Algenteppich nur einen kleinen Teil des Teichs bedeckt ($A(t)$ in m², t in Wochen).

Ermitteln Sie, um welchen Prozentsatz sich der Flächeninhalt des Algenteppichs wöchentlich vergrößert, und geben Sie eine Funktionsgleichung für A an!

$A(t) = 4 \cdot 1{,}75^t$

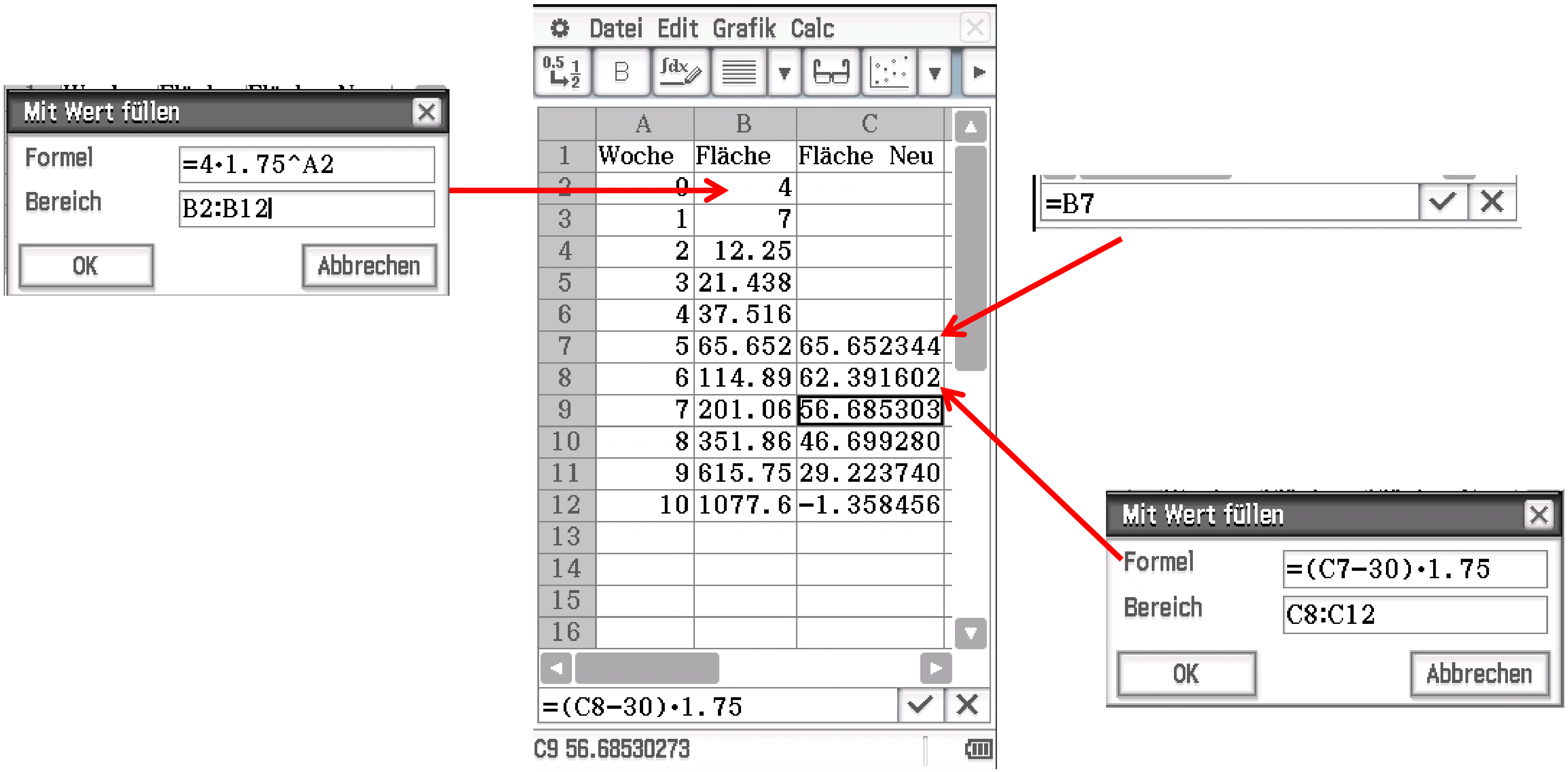






Am Ende der fünften Woche sollen nach erfolgter Messung 30 m^2 Algen geerntet werden. Das soll regelmäßig im Abstand von jeweils einer Woche wiederholt werden.

Ermitteln Sie, wie oft dieser Vorgang unter der Voraussetzung, dass sich der Flächeninhalt des Algenteppichs zwischen den Erntevorgängen weiterhin um den gleichen Prozentsatz vergrößert, durchgeführt werden kann!



	A	B	C
1	Woche	Fläche	Fläche Neu
2	0	4	
3	1	7	
4	2	12.25	
5	3	21.438	
6	4	37.516	
7	5	65.652	65.652344
8	6	114.89	62.391602
9	7	201.06	56.685303
10	8	351.86	46.699280
11	9	615.75	29.223740
12	10	1077.6	−1.358456
13			
14			
15			
16			

Antwort: Die Ernte kann vier mal durchgeführt werden (W6 – W9).

b) $\boxed{A}$ Berechnen Sie die durchschnittliche wöchentliche Änderung (in m² pro Woche) des Flächeninhalts des Algenteppichs vom Ende der zweiten Woche bis zum Ende der vierten Woche des Beobachtungszeitraums!

Datei Edit Grafik Calc

	A	B	C
1	Woche	Fläche	Fläche Neu
2	0	4	
3	1	7	
4	2	12.25	
5	3	21.438	
6	4	37.516	
7	5	65.652	65.652344
8	6	114.89	62.391602
9	7	201.06	56.685303
10	8	351.86	46.699280
11	9	615.75	29.223740
12	10	1077.6	-1.358456
13			
14	12.63		
15			
16			

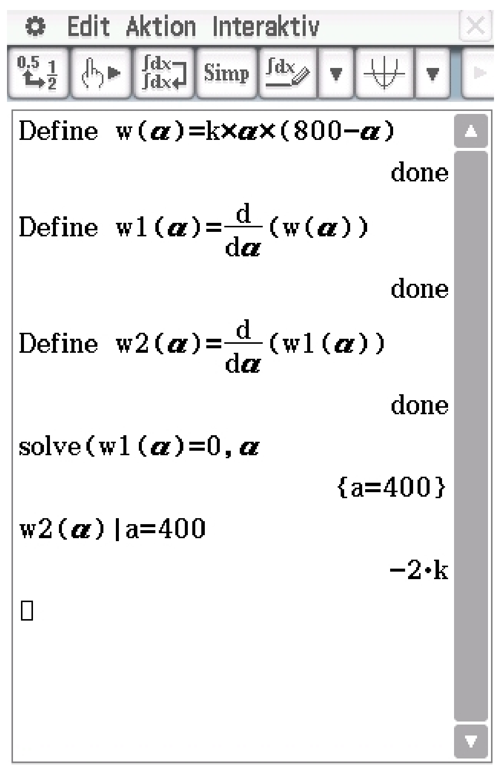
=(B6-B4)/2

Die durchschnittliche Änderung des Algenteppichs beträgt 12,63 m² pro Woche

Die bisher verwendete Exponentialfunktion beschreibt das Algenwachstum bei größerer bedeckter Fläche nur ungenau, weil sich in Abhängigkeit von der Größe des Teichs das Algenwachstum irgendwann verlangsamen wird. Ein realistischeres Modell berücksichtigt auch diesen Aspekt.
In Abhängigkeit vom Flächeninhalt A des Algenteppichs kann die Wachstumsgeschwindigkeit durch die Funktion w mit $w(A) = k \cdot A \cdot (800 - A)$ modelliert werden. Dabei wird A in m^2 angegeben; $k \in \mathbb{R}^+$ ist der sogenannte Wachstumsparameter, der unter anderem von der Algenart abhängt.

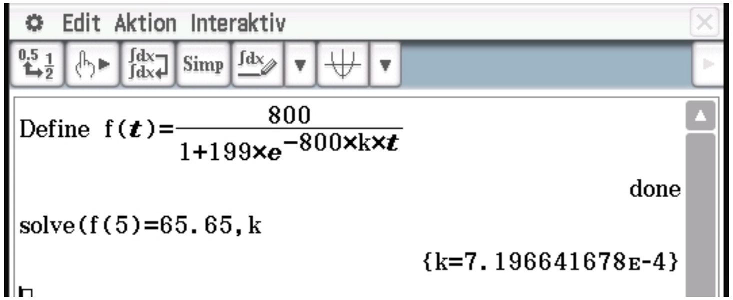
Ermitteln Sie denjenigen Flächeninhalt A_1 des Algenteppichs, bei dem die Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist!

A_1 = **400** m^2



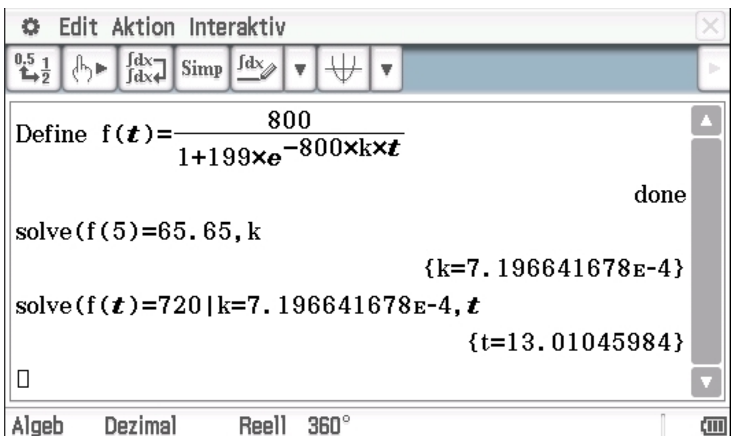
c) Der Beobachtungszeitraum wird über die in der Einleitung beschriebenen fünf Wochen hinaus verlängert. Der Flächeninhalt des Algenteppichs t Wochen nach Beobachtungsbeginn wird mithilfe einer Funktion A_2 mit $A_2(t) = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot k \cdot t}}$ modelliert ($A_2(t)$ in m², t in Wochen).

Geben Sie den Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}^+$ mithilfe des in der Tabelle angegebenen Messwerts zum Zeitpunkt $t = 5$ an!



k = 0,00072

Zu welchem Zeitpunkt bedeckt der Algenteppich erstmals 90 % der Oberfläche, wenn dieses Modell zugrunde liegt?
Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!



Nach rund 13 Wochen

Aufgabe 27 – Vornamen in Österreich

Aufgabe 27 (Teil 2)

Vornamen in Österreich

Seit Jahrzehnten erhebt die Statistik Austria, das statistische Amt der Republik Österreich, die Vornamen, die Eltern ihren Kindern geben. Dabei betrachtet das Amt nur den ersten Vornamen (falls ein Kind mehrere Vornamen hat). Außerdem werden gewisse gleichlautende oder von der gleichen Herkunft stammende Vornamen wie etwa *Sophie*, *Sofie* und *Sofia* zu einem Vornamen zusammengefasst.

Seit vielen Jahren zählen *Anna* und *Lukas* zu den beliebtesten Vornamen. Von den im Jahr 2015 geborenen Kindern (40 777 Mädchen, 43 604 Buben) erhielten 2 144 Mädchen den Vornamen *Anna* und 1 511 Buben den Vornamen *Lukas*.

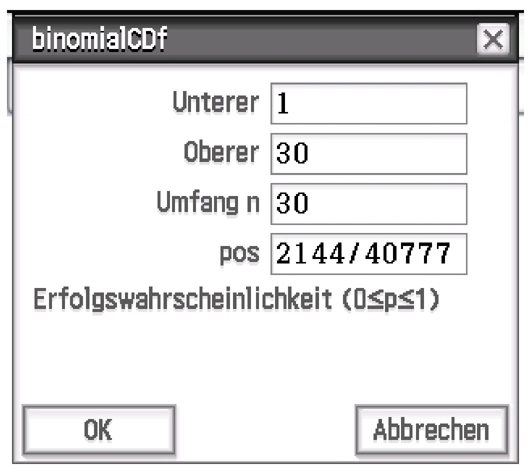
Aufgabenstellung:

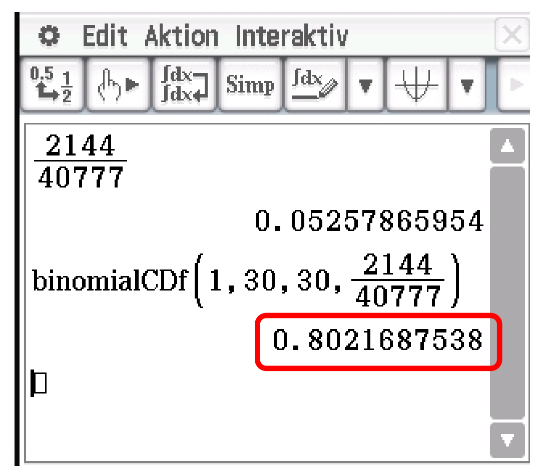
a) Für eine statistische Erhebung werden 30 Mädchen und 30 Buben aus dem Geburtenjahrgang 2015 nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

$\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe mindestens ein Mädchen Anna heißt!

Main / Interaktiv / Verteilungsfunktionen / Diskret / binomialCDf

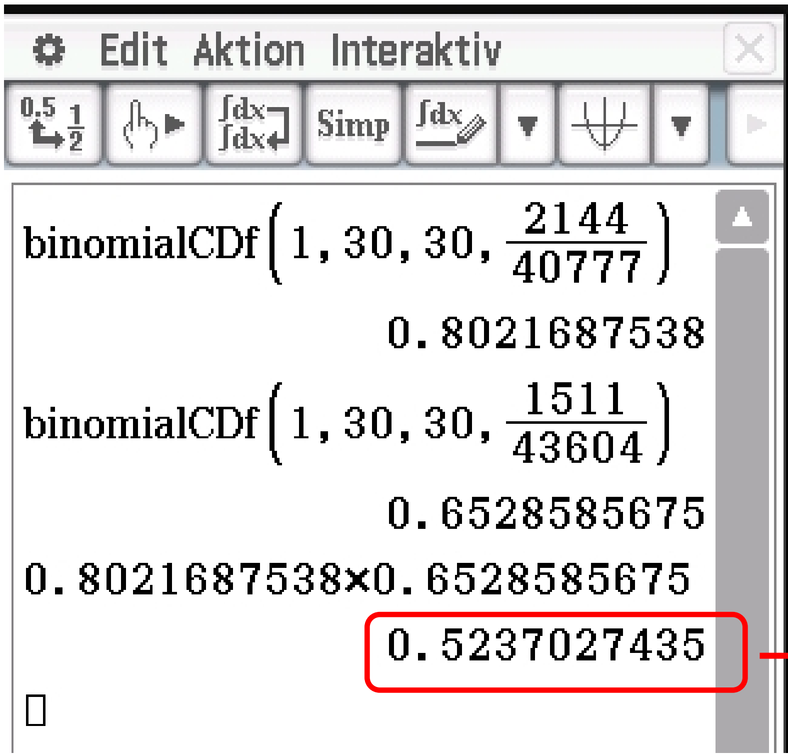
$$\frac{2144}{40777} = 0{,}05257865954$$





Alternativen: Statistik oder Tabellenkalkulationsmenü

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe mindestens ein Mädchen Anna und mindestens ein Bub Lukas heißt!

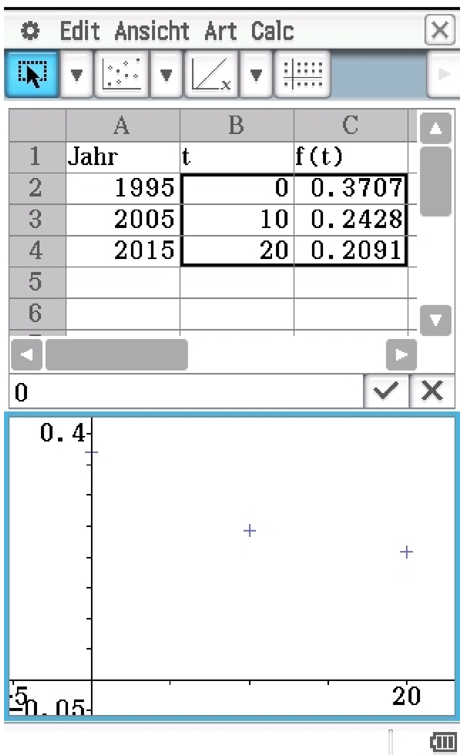


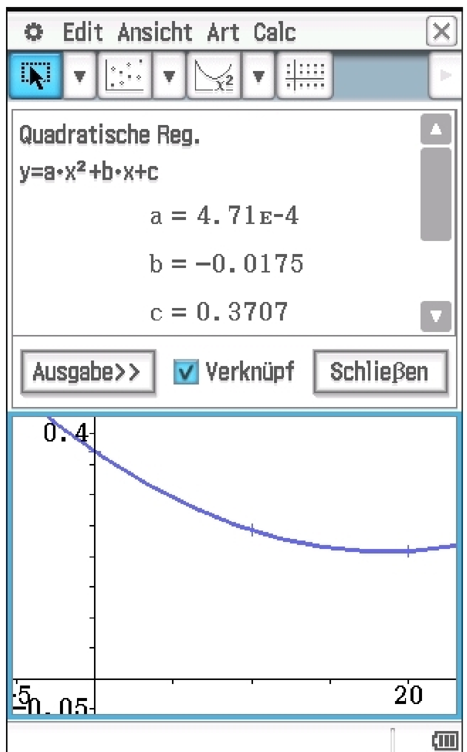
Antwort: 52,4 %

b) Im Jahr 1995 betrug der relative Anteil der zehn beliebtesten Vornamen für Buben 37,07 %. Im Jahr 2005 lag er bei 24,28 %. Im Jahr 2015 betrug er 20,91 %.

Diese Entwicklung des relativen Anteils der zehn beliebtesten Vornamen für Buben wird mit einer quadratischen Funktion f modelliert mit $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Dabei gibt t die Anzahl der Jahre ab 1995 an, es gilt also $f(0) = 0{,}3707$.

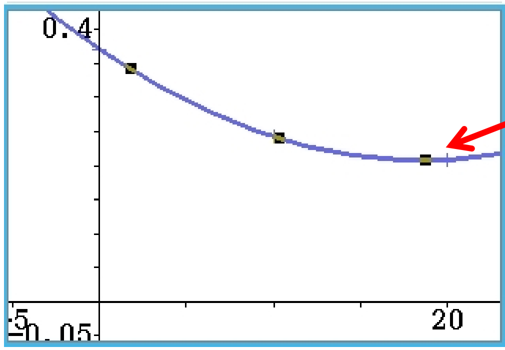
Bestimmen Sie die Werte von a, b und c und geben Sie eine Funktionsgleichung von f an!



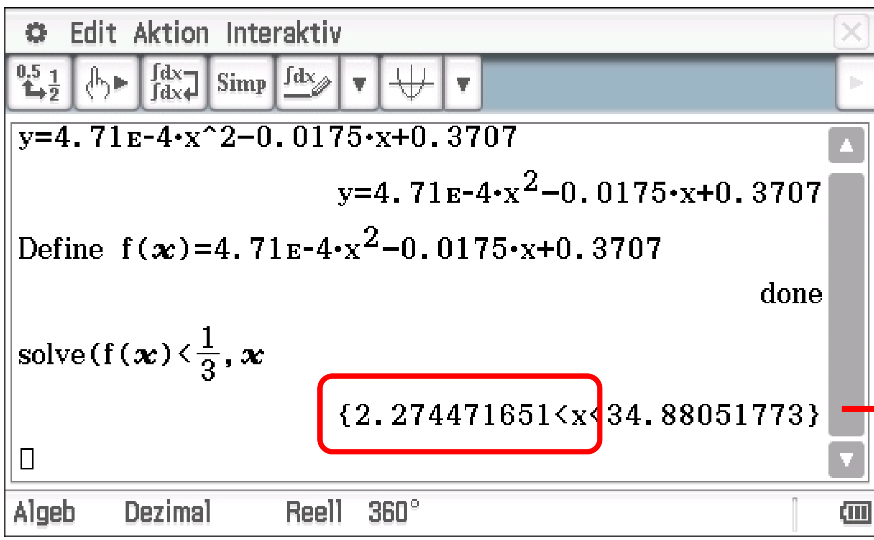


$f(t) = 0{,}000471 \cdot t^2 - 0{,}0175 \cdot t + 0{,}3707$

In welchem Jahr unterschreitet der relative Anteil der zehn beliebtesten Vornamen für Buben in diesem Modell zum ersten Mal ein Drittel?
Geben Sie die entsprechende Jahreszahl an!



markieren - Edit/Kopieren → Main: Einfügen



Antwort: 1998

c) Die Zufallsvariable X modelliert die Anzahl der im Jahr 2015 in Oberösterreich geborenen Mädchen, die den Vornamen *Anna* erhielten. Diese wird binomialverteilt mit den Parametern $n = 7041$ und $p = 0{,}0526$ angenommen.

Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ dieser Zufallsvariablen X!

$\mu \approx$ n·p = 7.041 · 0,0526 = 370,3566

$\sigma \approx \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{7041 \cdot 0{,}0526 \cdot 0{,}9474} = 18{,}73$

Tatsächlich wurde für Mädchen der Vorname *Anna* im Jahr 2015 in allen neun Bundesländern am häufigsten gewählt, wobei der prozentuelle Anteil in Oberösterreich am größten war. In Oberösterreich wurden 7041 Mädchen im Jahr 2015 geboren. Davon erhielten 494 den Vornamen *Anna*.

Es gilt $494 - \mu = c \cdot \sigma$ für ein $c \in \mathbb{R}^+$.
Berechnen Sie c und deuten Sie den Wert von c im gegebenen Kontext!

$$c = \frac{494-\mu}{\sigma} = \frac{494-370{,}36}{18{,}73} = 6{,}6$$

In Oberösterreich weicht der prozentuelle Anteil der im Jahr 2015 geborenen Mädchen, die den Vornamen Anne erhielten, mehr als 6 Standardabweichungen ab. Damit weicht dieser Anteil signifikant von μ ab. (=Korrekturheft)

Aufgabe 28 – Wings for Life World Run

Aufgabe 28 (Teil 2)

Wings for Life World Run

Der *Wings for Life World Run* ist ein in vielen Ländern zur gleichen Zeit stattfindender Volkslauf. Eine Besonderheit dieses Laufs ist, dass keine vorgegebene Distanz zurückgelegt werden muss.

Es starten alle Läufer/innen weltweit gleichzeitig um 11:00 UTC (koordinierte Weltzeit). Vom jeweiligen Startpunkt startet 30 Minuten später ein Auto, das sogenannte *Catcher-Car*, und fährt die Strecke ab. Dabei erhöht sich die Geschwindigkeit des Autos nach einem vorgegebenen Zeitplan. Für jede teilnehmende Person endet der Lauf, wenn sie vom Catcher-Car überholt wird. Das Ergebnis für eine teilnehmende Person ist die Länge derjenigen Strecke, die diese Person bis zum Zeitpunkt des Überholens durch das Catcher-Car zurückgelegt hat.

Für die Geschwindigkeiten des Catcher-Cars wurden bis zum Jahr 2018 folgende Werte vorgegeben (diese dienen modellhaft als Grundlage für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenstellungen):

Uhrzeit	Geschwindigkeit
von 11:30 bis 12:30	15 km/h
von 12:30 bis 13:30	16 km/h
von 13:30 bis 14:30	17 km/h
von 14:30 bis 15:30	20 km/h
von 15:30 bis 16:30	20 km/h
ab 16:30	35 km/h

Aufgabenstellung:

a) Eine Person läuft mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie vom Catcher-Car überholt wird. Diese Person wird während der 15-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Die Laufzeit *t* der Person hängt von der Geschwindigkeit *v* der Person ab.

Geben Sie einen Term an, mit dem *t* bei Kenntnis von *v* berechnet werden kann (mit *t* in h und *v* in km/h)!

Weg Läufer = Weg Catcher-Car

$$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0{,}5) \Rightarrow t = \frac{15}{30 - 2v}$$

Im Jahr 2016 betrug die (konstante) Geschwindigkeit einer Person bei diesem Lauf 9 km/h. Ein Jahr später war ihre (konstante) Geschwindigkeit bei diesem Lauf um 10 % höher.

Geben Sie an, um wie viel Prozent sich dadurch die Streckenlänge erhöhte, die diese Person zurücklegte, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde!

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. **29,4** %.

$$v_1 = 9\,\text{km/h} \rightarrow t_1 = \frac{15}{30-18} = 1{,}25\,\text{h} \rightarrow 11{,}25\,\text{km}$$

$$v2 = 9{,}9\,\text{km/h} \rightarrow t2 = \frac{15}{30-19{,}8} = 1{,}4706\,\text{h} \rightarrow 14{,}559\,\text{km}$$

$$\frac{14{,}559}{11{,}25} = 1{,}29412 \Rightarrow 29{,}4\%$$

b) Eine bestimmte gut trainierte Person läuft während der ersten Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit und benötigt dabei pro Kilometer 5 Minuten. Anschließend wird sie langsamer. Ab diesem Zeitpunkt (also für $t \geq 1$) kann ihre Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v in Abhängigkeit von der gelaufenen Zeit modelliert werden. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$v(t) = 12 \cdot 0{,}7^{t-1}$ mit t in h und $v(t)$ in km/h

Deuten Sie den Ausdruck $12 + \int_1^b v(t)\,dt$ mit $b \geq 1$ im gegebenen Kontext!

Weg, der von der Person bis zum Zeitpunkt t = b zurückgelegt wird.

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der das Catcher-Car diese Person überholt!

Uhrzeit: 1 2 : 5 3 UTC

Wichtig ! : In welchem Zeitintervall findet der Überholvorgang statt? w/Formel für Wegstrecke Catcher-Car

Edit Aktion Interaktiv

Simp

Define $v(t)=12\times0.7^{(t-1)}$

done

$12+\int_1^b v(t)\,dt \mid b=1$

12

$12+\int_1^b v(t)\,dt \mid b=1.5$

17.49542298

$12+\int_1^b v(t)\,dt \mid b=2.5$

25.94001979

Berechnung der Wegstrecke Läufer

t	UTC	Läufer	Auto
0	11:00	0,0	0,0
1	12:00	12,0	7,5
1,5	12:30	17,5	15,0
2,5	13:30	25,9	31,0

$b\in[1{,}5;2{,}5]$

Berechnung der Wegstrecke Auto

$15 + 16\cdot(b-1{,}5)$

solve$\left(12+\int_1^b v(t)\,dt=15+16\times(b-1.5),b\right)$

$\{b=-1.21022427, \boxed{b=1.877695541}\}$

toDMS(1.877695541

1°52'39.7039476"

c) Eine Gruppe von Läuferinnen und Läufern wird während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Juri schließt aus dieser Information, dass diese Gruppe nicht weniger als 40 km und nicht mehr als 88 km zurückgelegt hat, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde. Leo meint zu dieser Behauptung: „Deine Aussage ist wahr, aber ich könnte ein kleineres Intervall nennen, das ebenso zutrifft.“

$\boxed{\text{A}}$ Geben Sie an, ob die Behauptung von Leo stimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Beginn der 20 km/h-Phase: s = 15 + 16 + 17 = 48 km
Ende der 20 km/h-Phase: s = 15 + 16 + 17 + 20 + 20 = 88 km

Die Behauptung ist richtig und das kleinere Intervall wäre [48; 88] km.

In Wien legte 2017 die schnellste Teilnehmerin eine Strecke von 51,72 km zurück, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde.

Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit $\bar{v}$!

$\bar{v}$ = ______ 14 km/h

Die Teilnehmerin wurde in der 20 km/h-Phase überholt und zwar 3,72 km nach Beginn. Für die ersten 48 km benötigte das Fahrzeug 3,5 h und für die 3,72 km noch 0,186 h (=3,72 / 20). Somit benötigten beide für die 51,72 km 3,586 Stunden.

$$\bar{v} = \frac{51{,}72}{3{,}686} = 14{,}03147043$$